

# ESTADÍSTICAS CUÁNTICAS

## INTRODUCCIÓN

En el momento en que introducimos el principio de exclusión de Pauli, toda la estadística

Varía.

Hay dos tipos de partículas:

• Bosones (simétricas) → p.ej., fotones

• Fermiones (antisimétricas) → p.ej., electrones

efectos sobre la estadística es muy alto.

• Consideraremos sólo gases ideales cuánticos.

## FUNCIÓN DE PARTICIÓN

Partición del conjunto macroeconómico (que este permite factorización, que es muy cómoda).

• Sea un sistema en un estado cuántico  $r$ , de energía  $E_r$ . Cada partícula tiene una energía  $\epsilon_{k\sigma}$

• y hay  $n_{k\sigma}$  partículas. Las ligaduras son:

Número de partículas  $\hookrightarrow$  Degeneración dentro del nivel energético  
( $\sigma$  es número que controla la degeneración)

$$N = \sum n_{k\sigma} \rightarrow \text{n.º de partículas en el nivel}$$

$$E_r = \sum n_{k\sigma} \epsilon_{k\sigma} \rightarrow \text{energía en el nivel}$$

$$\text{Ans: } Z = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_{k\sigma}\}} e^{-\beta \sum \epsilon_{k\sigma} n_{k\sigma} + \beta \mu \sum n_{k\sigma}}$$

Para intentar entender qué es esto la hacemos para

si degeneración:

$$Z_2 = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1} \sum_{n_2} e^{-\beta n_1 \epsilon_1 + \beta \mu n_1 - \beta n_2 \epsilon_2 + \beta \mu n_2} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1, n_2} (\lambda e^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} (\lambda e^{-\beta \epsilon_2})^{n_2} \quad (\lambda = e^{\beta \mu})$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1} \sum_{n_2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n_1} x_1^{n_1} x_2^{N-n_1}$$

$$= \left( \sum_{n_1=0}^{\infty} x_1^{n_1} \right) \left( \sum_{n_2=0}^{\infty} x_2^{n_2} \right)$$

↓

Descomposición factorial  
tal vez en unidades energías, igual que  
el número de división a partículas

$N=0 \Rightarrow n_1=0 \Rightarrow \Sigma=1$

$N=1 \Rightarrow n_1=0 \Rightarrow \Sigma = x_2 + x_1$   
 $n_1=1$

$N=2 \Rightarrow n_1=0 \Rightarrow \Sigma = x_2^2 + x_1 x_2 + x_2^2$   
 $n_1=1$   
 $n_1=2$

$(1+x_1+x_1^2+\dots)(1+x_2+x_2^2+\dots)$

legitimamente

Así, en general:  $\mathcal{Z} = \prod_k \left( \sum_{n_k} (\lambda e^{-\beta \epsilon_k})^{n_k} \right) = \prod_k \sum_n (\lambda e^{-\beta \epsilon_k})^n$

Si las partículas son bosones,  $n$  va de 0 a  $\infty$  (el n de partículas a cada nivel puede ser cualquier);

tenemos una serie geométrica y

$$\mathcal{Z}_{BE} = \prod_k \frac{1}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_k}}$$

↳ Bose-Einstein

Si las partículas son fermiones,  $n$  puede ser 0 o 1:

$$\mathcal{Z}_{FD} = \prod_k (1 + \lambda e^{-\beta \epsilon_k})$$

↳ Fermi-Dirac

Aunque parecen funciones similares, tienen diferencias que provocan diferencias macroscópicas  
altas.

Zimatek

# GAS IDEAL DE BOSONES

• Estudiaremos el gas ideal cuando  $\rho \Lambda^3 \sim 1$ .  $\Rightarrow$  Baja temperatura (cero, van der Waals, el gas de los gases)

$\Downarrow$   
El  $\Lambda^3$  de partículas por vol. de vol. (distancia entre partículas<sup>-1</sup>)  $\sim$  longitud de onda térmica

$\Downarrow$   
Distancia entre partículas  $\sim$  longitud de onda térmica

• En estas condiciones, el principio de exclusión de Pauli y la indistinguibilidad juegan un papel importante.

• De hecho, aparece una transición de fase (propiedad de interacción  $\Rightarrow$  en principio a gas ideal no hay transición de fase). Esta interacción, consecuencia de la simetría de las funciones de onda, aparece en el espacio de momentos.

• Vamos a hacer cuentas:

$$p = \frac{N}{V} = \frac{kT}{V} \frac{\partial \ln Z_{gr}}{\partial \mu}$$

$$\ln Z_{gr} = \sum_{\epsilon} \ln (1 - \lambda e^{-\beta \epsilon})^{-1} \xrightarrow{\text{la degeneración } g(\epsilon), \text{ como p. 5.2}} \int \ln (1 - \lambda e^{-\beta \epsilon})^{-1} d^3 p d^3 q =$$

$$= V \frac{S}{h^3} \int_0^{\infty} \ln (1 - \lambda e^{-\beta \epsilon})^{-1} d^3 p$$

$$\text{Tomamos } \epsilon = \frac{p^2}{2m}; \beta \epsilon = \frac{p^2}{2m} \equiv x^2, p = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{1/2} x$$

$$d^3 p = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} dx^3$$

$$d^3 p = 4\pi p^2 dp$$

$$\Rightarrow \ln Z_{gr} = \frac{VS}{h^3} 4\pi \frac{2m}{\beta} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \ln (1 - \lambda e^{-x^2})^{-1} x^2 dx$$

$$\text{Ahí, } p = (\dots) \frac{4\pi S}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-x^2}}{1 - \lambda e^{-x^2}} x^2 dx = \frac{2\pi S}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-x^2}}{1 - \lambda e^{-x^2}} x^2 dx =$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( e^{\mu/kT} \right) = \frac{1}{kT} e^{\mu/kT} = \frac{\lambda}{kT}$$

$$= kT \frac{2\pi S}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} [\lambda e^{-x^2} + \lambda^2 e^{-2x^2} + \lambda^3 e^{-3x^2} + \dots] x^2 dx =$$

• lo más de no singular!!

$$= s \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \left[ \lambda + \frac{\lambda^2}{2^{3/2}} + \frac{\lambda^3}{3^{3/2}} + \dots \right] = s \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \zeta_{3/2}(\lambda) =$$

La función  $\zeta$  de Riemann!!!

$$\boxed{= s \frac{\zeta_{3/2}(\lambda)}{\Lambda^3} = p}$$

Recordemos:  $\zeta_n(\lambda) = \sum_p \frac{\lambda^p}{p^n}$

Análogamente,  $\langle E \rangle = U = \frac{3}{2} s k T \left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} V \zeta_{5/2}(\lambda) = \frac{3}{2} s k T V \frac{\zeta_{5/2}(\lambda)}{\Lambda^3} = U$

• A T altas,  $\zeta_{3/2}(\lambda) \approx \zeta_{5/2}(\lambda) \approx \lambda$  (para a T altas  $\lambda$  es pequeño)

Haciendo  $\frac{U}{p} = \frac{3}{2} V k T \Rightarrow U = \frac{3}{2} N k T$  (recuperamos el resultado clásico)

Un gas de bosones se comporta, a altas temperaturas, como un gas ideal

• A T bajas,  $\lambda \rightarrow 1$  ( $\zeta_{3/2} > 1$ , las series divergen y la base diverge)

$$\zeta_{3/2} \rightarrow 2.612$$

$$\zeta_{5/2} \rightarrow 1.341$$

a la temperatura a la cual  $\lambda \rightarrow 1$  se le conoce como temperatura de condensación de Bose-Einstein

$$T_c = \frac{h^2}{2\pi m k} \left( \frac{p/s}{2.612} \right)^{2/3}$$

• Por debajo de esta temperatura ocurre la condensación. No es una condensación del estilo gas  $\rightarrow$  líquido, a una temperatura a la cual todas las partículas tienden al mismo nivel de energía.

El problema es que hemos hecho trampa al pasar de la suma a la integral.

La suma:

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{\sum_{3/2}(\lambda)}{\Lambda^3} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3} \sum_{3/2}(\lambda)$$

$$\sum_{3/2}(\lambda) = \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m k T)^{3/2}}$$

Hay, por tanto, un valor de  $T$ , para el que  $\sum_{3/2}(\lambda) = 2^{-6} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$  ABSURDO!!!

Por debajo de  $T_c$ , el análisis integral no es válido debido a una población anómala del nivel fundamental  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  condensado de Bose

A  $T > T_c$  el análisis integral es total y absolutamente válido (la separación de niveles cuánticos es infinita), pero por debajo

hay que retener una importante contribución del nivel fundamental y el análisis integral tiene solo la cuenta de los otros estados.

Zimatek

• Cuando hay condensación,  $\frac{\Lambda^3}{V} = 2'612 \cdot s \Rightarrow$  suman efectos cuánticos cuando la longitud de onda térmica es del orden de magnitud de la distancia entre partículas.

• Esto se logra aumentando la presión o disminuyendo la temperatura.

• Vamos a reconsiderar el caso suma  $\rightarrow$  integral:

$$\rho = \frac{1}{V} \left[ \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon_0}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_0}} + \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon_1}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_1}} + \dots \right]$$

esta serie debe ser, por definición de  $\rho$ , positiva. Por tanto, debe cumplirse:

(para el término más pequeño)  $1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_0} \Rightarrow 0 \leq \lambda \leq e^{\beta \epsilon_0}$  (si se cumple para  $\epsilon_0$ , se cumple para todas las demás)

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon_0}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_0}} + \sum_{\text{resto}} \frac{\text{resto}}{\text{integral}}$$

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon_0}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_0}} + \frac{s}{h^3} \int \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon}} d^3 p$$

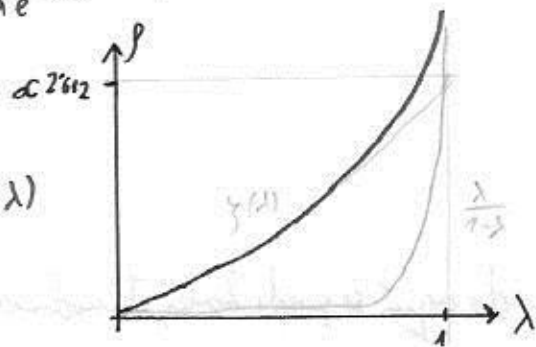
la condición  $\lambda \leq 1$  surge de manera natural

si hacemos, sin pérdida de generalidad  $\epsilon_0 = 0$  (caso  $\lambda \leq 1$ ):

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{\lambda}{1 - \lambda} + \frac{s}{h^3} \int \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon}} d^3 p$$

$\Downarrow$

$$\rho = \frac{1}{V} \frac{\lambda}{1 - \lambda} + \frac{s}{\Lambda^3} \zeta_{3/2}(\lambda)$$



$\downarrow$   
 Caso de  $\lambda = 1$  hay efectos cuánticos  
 Caso de  $\lambda = 0$ ; no

• Vamos a ver cómo llenan las partículas los estados. La ocupación media de un estado vale:

$$\langle n_k \rangle = \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon_k}}{1 - \lambda e^{-\beta \epsilon_k}} = \frac{1}{\lambda e^{\beta \epsilon_k} - 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1}$$

(con el numerador factorizo  $\lambda$  en vez de  $e^{-\beta \mu}$ , que es la misma constante, luego  $\lambda = \frac{1}{e^{-\beta \mu}}$   
 $\langle n_k \rangle = \frac{1}{\frac{1}{e^{-\beta \mu}} e^{\beta \epsilon_k} - 1}$ )

entonces:

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_0 - \mu)} - 1} \stackrel{\epsilon_0 = 0 \text{ sin pérdida de generalidad}}{=} \frac{1}{e^{-\beta \mu} - 1} \Rightarrow \mu = -kT \ln\left(1 - \frac{1}{\langle n_0 \rangle}\right)$$

Como según  $T \ll T_c$ ,  $\langle n_0 \rangle \gg 1 \Rightarrow \mu \approx -\frac{kT}{\langle n_0 \rangle}$  (el potencial químico está relacionado con la ocupación del nivel fundamental)

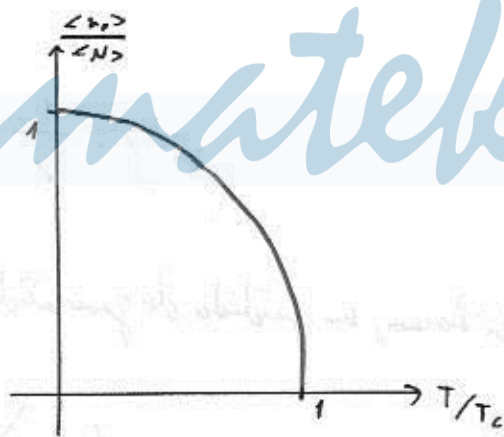
entonces calculamos  $\langle N_{exc} \rangle = \langle N - n_0 \rangle = \langle N \rangle \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} = \langle N \rangle - \langle n_0 \rangle$

Nivel de  $\epsilon_0$

$$\langle n_0 \rangle = \frac{1}{e^{-\beta \mu} - 1}$$

entonces:

$$\langle n_0 \rangle = \langle N \rangle \left[ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \right]$$



(notar que si hubiera fermiones, esto no sería posible)

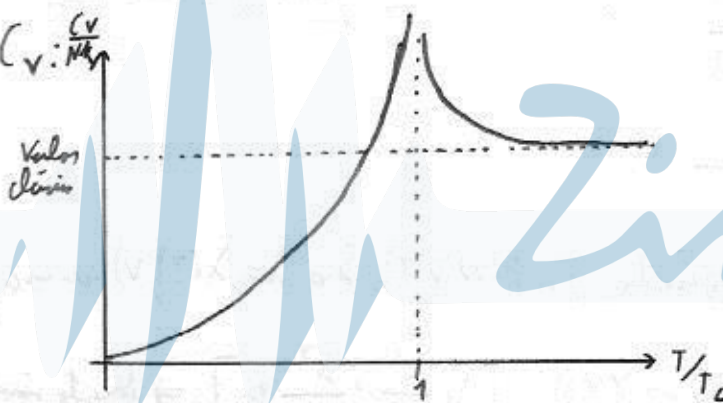
• A partir de aquí se puede hacer termodinámica:

$$\frac{U}{N} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{kT}{\rho \Delta^3} \zeta_{5/2}(\lambda) & \text{si } T > T_c \\ \frac{3}{2} \frac{kT}{\rho \Delta^3} \zeta_{5/2}(1) & \text{si } T < T_c \end{cases}$$

$$\frac{C_V}{Nk} = \begin{cases} \frac{15}{4 \rho \Delta^3} \zeta_{5/2}(\lambda) - \frac{9 \zeta_{3/2}(\lambda)}{4 \zeta_{5/2}(\lambda)} & \text{si } T > T_c \\ \frac{15}{4} \frac{1}{\rho \Delta^3} \zeta_{5/2}(1) & \text{si } T < T_c \rightarrow \infty \Delta = \Delta(T) \Rightarrow C_V \propto T^{3/2} \end{cases}$$

de hecho, sustituyendo:  $\langle E \rangle = 0.513 \frac{3}{2} kT \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \langle N \rangle$

Si dibujamos  $C_V: \frac{C_V}{Nk}$



$\Rightarrow$  la curva del He!!!

$\rightarrow$  según  $T \rightarrow T_c$ , el sistema aparece alrededor del valor clásico, pero los cambios en las propiedades son más bruscos.

$\downarrow$   
Una transición de fase de 1ª orden

Se cumple, por tanto, Clausius-Clapeyron: (tiene valores límite cuando)

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T \Delta V}$$

por el momento, p.v.  $kT \ln Z \Rightarrow P = kT \left[ -\frac{s}{h^3} \int_0^\infty h^2 (1 - \lambda e^{-\beta \epsilon}) d^3 p - \frac{1}{V} \ln(1 - \lambda) \right]$



Comprobamos que el 2º término es despreciable:

$$\lambda = \frac{\langle n_0 \rangle}{\langle n_0 \rangle + 1}$$

$$\lambda = e^{1/kT} = f(\langle n_0 \rangle)$$

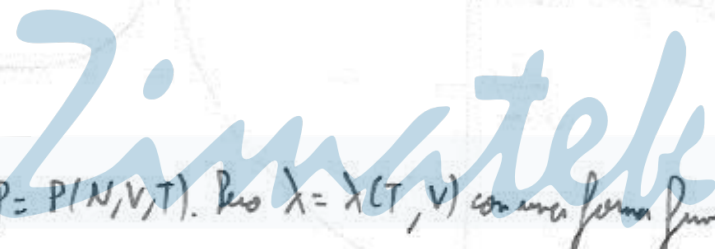
Substituyendo,  $\frac{1}{V} \ln(1-\lambda) \approx \frac{\ln \langle n_0 \rangle}{V} \propto \frac{1}{N}$

por tanto,  $P = \frac{kT}{\Delta^3} \int_{5/2}^{(1)}$   <sup>$\rho \Delta T = T_c, \lambda = 1$</sup>  Substituyendo en Clausius-Clapeyron:

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{T=T_c} = \frac{5}{2} \frac{k}{\Delta^3} \int_{5/2}^{(1)} = \frac{5k\rho_s}{2} \frac{\int_{5/2}^{(1)}}{\int_{3/2}^{(1)}} \stackrel{\rho = \frac{1}{V}}{=} \frac{5}{2} \frac{k_s}{V} \frac{\int_{5/2}^{(1)}}{\int_{3/2}^{(1)}}$$

Nota:  $\Delta = \Delta(T)$

por lo que  $L = \frac{5}{2} kT \frac{\int_{5/2}^{(1)}}{\int_{3/2}^{(1)}}$  (entonces, expresamos  $\Delta V$  en  $V$ , pero  $\Delta V = V - V_{\text{total}}$  <sup>se puede demostrar que es  $V$</sup> )



Vamos a diluir  $P-T$  a  $V$  etc. Necesitamos  $P = P(N, V, T)$ . Pero  $\lambda = \lambda(T, V)$  con una forma funcional aún desconocida. Sabemos que  $\rho \Delta^3 = 5 \int_{5/2}^{(1)} = 5 \left[ \lambda \frac{\lambda^2}{2^{3/2}} + \frac{\lambda^3}{3^{3/2}} + \dots \right] \Rightarrow$  Necesito inventar para hallar

$$\lambda = \lambda(\rho \Delta^3) = \lambda\left(\frac{\Delta^3}{V}\right)$$

Tuquri:  $A = x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \dots$

sup  $x = b_0 A + b_1 A^2 + b_2 A^3 + \dots$

$$\Rightarrow A = (b_0 A + b_1 A^2 + \dots) + a_1 (b_0 A + b_1 A^2 + \dots)^2 + a_2 (b_0 A + b_1 A^2 + \dots)^3 + \dots = b_0 A + (b_1 + a_1 b_0^2) A^2 + \dots \quad \forall A$$

esto solo ocurre si:  $b_0 = 1$

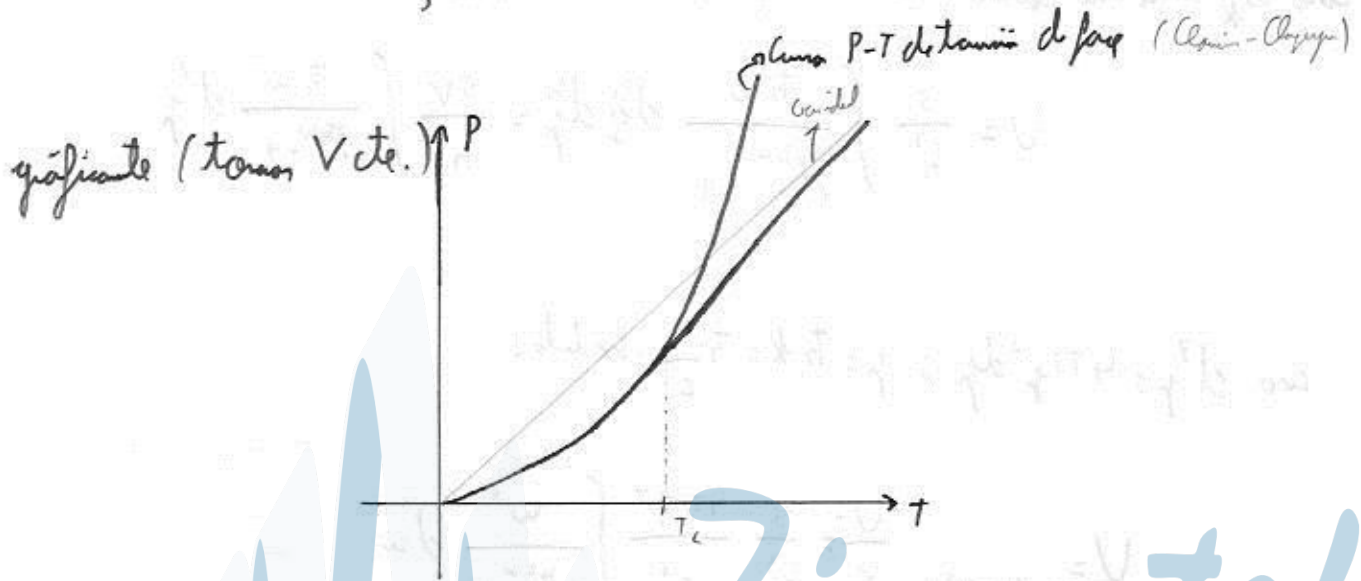
$$b_1 + a_1 b_0^2 = 0 \Rightarrow b_1 = -a_1$$

etc.

haciendo los cambios:

$$\frac{P \cdot V}{NKT} = \sum_l a_l \left( \frac{\Delta^3}{V} \right)^{l-1} \rightarrow \text{se le suele llamar expansión de estado del virial}$$

- $a_1 = 1$
- $a_2 = -0.17$
- $a_3 = -0.003$



como a la izquierda  $V=0$ , las transiciones de fase ocurren a lo largo de la línea, misma se pone a la izquierda  $\Rightarrow$   $T_{trans} = aT = T_c$  ocurre una transición de fase constante a lo largo de todo el estado fundamental. las transiciones nunca ocurren.

## RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

• Su interés histórico es enorme. Planck supuso que la radiación está formada por osciladores (que es controlada por las oscilaciones de los sólidos), y llegó a:

$$L(\lambda, T) = \text{---} \text{ Ley de Planck}$$

• Nosotros trabajamos con los fotones como bosones. Como pueden ser absorbidos/emisidos, des-

pense la ligadura  $\langle N \rangle = \sum n_k \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ . Por tanto

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1} = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}$$

por lo que  $U = \sum_k \frac{\epsilon_k}{e^{\beta \epsilon_k} - 1} = \sum_k \frac{\hbar \omega_k}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}$

si  $\omega_k$  tiene un carácter continuo:

↳ la degeneración (el fotón tiene 2 grados de libertad)

$$U = \frac{s}{h^3} \int \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d^3 q d^3 p = \frac{sV}{h^3} \int \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d^3 p$$

como  $d^3 p = 4\pi p^2 dp$ ;  $p = \hbar k = \frac{\hbar \omega}{c}$ . Por tanto:

$$\frac{U}{V} = \frac{s}{h^3} \frac{4\pi \hbar^4}{c^3} \int \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega$$

como estamos con fotones,  $s=2$ :

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi \hbar^4}{h^3 c^3} \int \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega$$

$$\frac{U}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega \equiv \int n(\omega, T) d\omega$$

con:

$$n(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

• Según T disminuye, el pie de  $n$  es menor pronunciado y se mueve a longitudes de onda mayores.

• Es muy útil para hacer los cálculos precisos de las transferencias de calor por radiación.

• En lo que respecta al cálculo de  $\frac{U}{V}$ , tomamos  $x = \beta \hbar \omega$ :

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi^5}{15h^3c^3} k^4 T^4 \int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi^5}{15h^3c^3} k^4 T^4 = \frac{\sigma T^4}{\text{constancia } \frac{\sigma}{c}}$$

Ley de Stefan-Boltzmann

este valor  $T^4 \Rightarrow$  la emisión varía muy notablemente con la temperatura

• El número de  $n$  se da para:

$$\beta \hbar \omega = 2.923 \Rightarrow \frac{\omega_1}{T_1} = \frac{\omega_2}{T_2}$$

Si disminuye la frecuencia, la temperatura disminuye (y viceversa)

Ley de desplazamiento de Wien (para  $T = \text{cte.}$ )

• El calor específico vale:  $c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 6T^3$   
 $\hookrightarrow$  Obtenemos que eso es independiente en la ley de Wien (que a otros casos es  $kT$ ) porque  $N$  es fijo

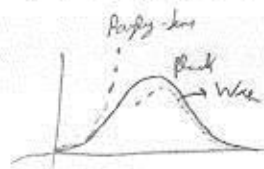
• Vamos a los extremos: (uno que es altamente históricamente o finis clásica)

$$h\nu \ll kT \Rightarrow e^{-\beta \hbar \omega} \sim 1 + \beta \hbar \omega \Rightarrow u(\nu, T) = \frac{8\pi^5 kT}{c^3} \nu^2 \rightarrow \text{Ley de Rayleigh-Jeans}$$

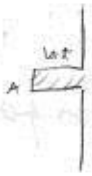
(depende de ambas partes del espectro)

$$h\nu \gg kT \Rightarrow e^{-\beta \hbar \omega} \gg 1 \Rightarrow u(\nu, T) = A \nu^3 e^{-\beta h\nu} \rightarrow \text{Ley de Wien}$$

(depende de la otra parte del espectro)



Ejercicio: calcular la radiación que sale por un orificio (de  $\propto T^4$ )



El n° de partículas que en un instante tienen una velocidad  $v_x$  suficiente para salir vale

$$S v_x t dn(v_x)$$

Así, por cada instante sale un n° de partículas igual a:

$$\int_0^{\infty} S v_x t dn(v_x) = S t \int_0^{\infty} v_x dn(v_x)$$

donde se la suma por todas las partículas que se mueven hacia la derecha

en decir, la energía que sale, por cada instante,

$$S u \int_0^{\infty} v_x dn(v_x)$$

$$v_x = c \cos \theta \text{ (hacia el S.R. exterior)}$$

$$dP(v_x) = dP(\cos \theta) = \text{unif. en } \theta \text{ de } 0 \text{ a } \pi/2$$

Así, la energía por cada instante es

$$S u c \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = S u c$$

integrando en  $\forall u$ :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{8\pi^5}{15h^3c^2} k^4 T^4 \cdot S = \sigma T^4 \cdot S, \text{ con } \sigma \text{ como antes}$$

Zimatek

# GAS IDEAL DE FERMIONES

- Consideremos la magnitud, de nuevo,  $\rho \Lambda^3$ . (Los efectos cuánticos aparecen a T bajas y  $\rho$  altas.)  
↓  
 Aunque aquí hay también interacción y el otro dijo de ser ideal
- Para un gas de fermiones,

$$\frac{PV}{kT} = \frac{5}{h^3} V \int d^3 p \ln(1 + \lambda e^{-\beta \epsilon}) \quad \text{f.v.: } kT \ll \epsilon$$

$$\rho = \frac{\langle N \rangle}{V} = \frac{5}{h^3} \int \frac{\lambda e^{-\beta \epsilon}}{1 + \lambda e^{-\beta \epsilon}} d^3 p \quad \rho = \frac{kT}{v} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu}$$

$\rightarrow P = P(N, V, T)$

son las ecuaciones paramétricas de la ecuación de estado!!

↓  
 el parámetro  $\lambda = e^{\frac{\mu}{kT}}$

- Para juntar ambas ecuaciones, introducimos el n.º de ocupación:  $\langle n_k \rangle = \frac{1}{\lambda^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$

para  $T \rightarrow 0$ :  
 $\beta \rightarrow \infty$

· Si  $\epsilon_k < \mu \Rightarrow \langle n_k \rangle = 1$   
 · Si  $\epsilon_k > \mu \Rightarrow \langle n_k \rangle = 0$

↓  
 $\langle n_k \rangle = \theta(\epsilon_F - \epsilon)$



Hay una energía límite (nivel de Fermi) de ocupación a 0K. (esto es lo que ocurre, porque se cumple el principio de exclusión de Pauli)

- Si subimos la temperatura, aparecen huecos por debajo del nivel de Fermi.
- Vamos ya a retomar en materia. Tomamos, para empezar,  $\lambda < 1 \Rightarrow$ ; o, lo que es lo mismo,  $\rho \left(\frac{h^2}{2\pi m kT}\right)^{3/2} \ll 1$ :  
Talita o plaja

- Usar el siguiente cambio de variable:

$$\beta \epsilon = \beta \frac{p^2}{2m} = x^2; \quad d^3 p = \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} dx^3 \quad (d^3 p = 4\pi p^2 dp)$$

- Se llega a:

$$\frac{PV}{kT} = \frac{5}{h^3} \int_0^{\infty} h (1 + \lambda e^{-x^2}) 4\pi \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} x^2 dx =$$

$$= \frac{5}{h^3} 4\pi \frac{2m}{\beta^{3/2}} \int_0^{\infty} \underbrace{h (1 + \lambda e^{-x^2})}_u \underbrace{x^2}_{dv} dx =$$

$$= A \ln(1 + \lambda e^{-x^2}) \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{x^4 \lambda e^{-x^2}}{1 + \lambda e^{-x^2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3} 5 \frac{kT}{\Delta^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^4}{\lambda^{-1} e^{x^2} + 1} dx$$

- Además, de la otra ecuación:

$$\rho = 5 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Delta^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(\lambda^{-1} e^{x^2} + 1)} dx = 5 \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Delta^3 \int_0^{\infty} (\lambda x^2 e^{-x^2} + \lambda^2 x^2 e^{-2x^2} + \dots) dx$$

Dividen a los  $x^2$  numerador y denominador y desarrollan a serie (λ pequeño)

$$= \frac{5}{\Delta^3} \left[ \lambda - \frac{\lambda^2}{2^{3/2}} + \frac{\lambda^3}{3^{3/2}} \dots \right] = 5 \Delta^{-3} f(\lambda)$$

↳ Los los signos de menos para alternando signos

- Como en el caso de los bosones, suponiendo que  $\lambda$  se puede desarrollar a serie de  $\rho$ :

$$\lambda = \frac{1}{5} (\Delta^3 \rho) \left[ 1 - \frac{\Delta^3 \rho}{5 2^{3/2}} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}} \right) \frac{\Delta^3 \rho}{5^2} + \dots \right]$$

- Usando todas las ecuaciones, queda:

$$\frac{PV}{kT} = s \kappa T \Delta^{-3} \int_{s/2}^{\infty} f(\lambda)$$

→ Evolución total de analogía al gas de bosones

substituye  $\lambda$ :

$$\frac{PV}{NkT} = 1 - 0.17 \frac{\rho \Delta^3}{s} - 0.0033 \left( \frac{\rho \Delta^3}{s} \right)^2 + \dots$$

→ modificación, un efecto cuántico

Los efectos cuánticos aparecen como una "fuerza negativa" debido al principio de exclusión de Pauli.

- Existe, así, en un gas de fermiones energía de punto cero.

- La energía interna vale:

$$U(T, \mu) = V s \frac{kT}{\Delta^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int \frac{x^4}{\lambda^{-1} e^{x^2 + \mu}} dx$$

$L_1 \sim \int_{s/2}^{\infty} f(\lambda)$

que si se substituye  $\lambda$  queda  $U = U(T, V)$

- Y derivando para obtener el calor específico:

$$C_V = \frac{3}{2} Nk \left( 1 - 0.088 \frac{\rho \Delta^3}{s} + \dots \right)$$

→ Aquí se ve los efectos cuánticos en términos de energía

- De hecho, como nos ha aparecido la integral 2 veces:

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} = \frac{2}{3} u = P$$

→ La presión es igual a la densidad de energía PARA CUALQUIER GAS Y CUALESQUIERA CONDICIONES

de hecho, a  $T \rightarrow 0$   $P \neq 0 \Rightarrow$  hay presión de punto cero.



•  $\rho \Lambda^3 \geq 1$  (densidad alta o T bajas. De hecho, para mas bajas como talia es  $\Rightarrow$  el exponente depende de la masa)

- Integrado por partes  $\rho = s \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Lambda^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(\lambda^{-1} e^{x^2} + 1)} dx = \frac{2}{3} s \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^4 \lambda^{-1} e^{-x^2}}{(\lambda^{-1} e^{x^2} + 1)^2} dx$

- Para resolver la integral, vamos a calcular la energía de Fermi. Como  $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \langle n_x \rangle = \frac{1}{\lambda^{-1} e^{x^2} + 1} \rightarrow \theta(\epsilon_F - \epsilon)$

(Todo esto a  $T=0$ )

$$\rho = s \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Lambda^3 \int_0^{\infty} x^2 \theta(\epsilon_F - \epsilon) dx = 2^{5/2} \pi s m^{3/2} h^{-3} \int \epsilon^{1/2} \theta(\epsilon_F - \epsilon) d\epsilon$$

$\downarrow$   
Comisión  
Lorwin

$$= 2^{5/2} \pi s m^{3/2} h^{-3} \frac{2}{3} (\epsilon_F)^{3/2}$$

$$\Downarrow$$

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2 \rho}{s} \right)^{2/3}$$

Son la degeneración. Ej.:

•  $e^- \Rightarrow 2 (\uparrow \downarrow)$

• Metales  $\Rightarrow$  con la valencia se ve cuantos  $e^-$  aporta cada átomo

(s es la valencia)

De nuevo, si esa integral la aplicamos para la densidad de energía:

$$u = s \frac{kT}{\Lambda^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int \frac{x^4}{\lambda^{-1} e^{x^2} + 1} dx = \frac{3}{5} \rho \epsilon_F = u$$

entre que hay una distribución de los  $e^-$  en el momento  
7  $e^-$  en el nivel de los

$$P = \frac{2}{3} u = \frac{1}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{s} \right)^{2/3} \rho^{5/3}$$

Tienen una presión a  $T=0 \Rightarrow$  presión a un punto líent nulo!!!

esta presión no está asociada a las colisiones, sino asociada al principio de exclusión de Pauli (que obliga a los  $e^-$  a ir a niveles de energía altos)

- Vamos a buscar la ecuación de estado para  $T \neq 0$ :

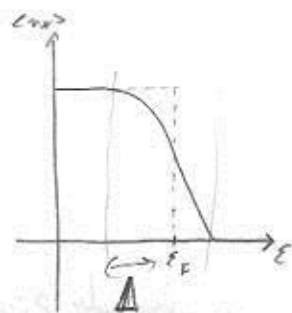
$$\rho = \frac{5}{3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Delta^{-3} \int \frac{x^2}{\lambda^{-1} e^{x^2} + 1} dx = \frac{2}{3} \frac{5}{\Delta^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int \frac{x^2 \lambda^{-1} e^{-x^2}}{(\lambda^{-1} e^{x^2} + 1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} y = x^2 \\ \eta = \frac{\mu}{kT} \\ \lambda = e^\eta \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{3} \frac{5}{\Delta^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int \frac{y^2 e^{-\eta} e^{\eta}}{(e^{y-\eta} + 1)^2} \frac{1}{2} y^{-1/2} dy = \frac{2}{3} \frac{5}{\Delta^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int \frac{y^{3/2} e^{y-\eta}}{(e^{y-\eta} + 1)^2} dy$$

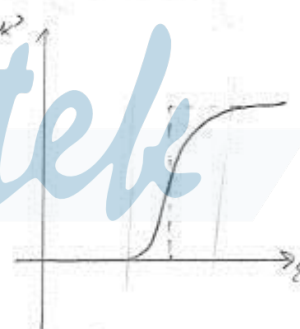
Vamos a intentar desarrollar en serie, la población de Fermi vale:

$$1 - \langle n_k \rangle = 1 - \frac{1}{\lambda^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + 1} = \frac{\lambda^{-1} e^{\beta \epsilon_k}}{\lambda^{-1} e^{\beta \epsilon_k} + 1}$$

pero el integrando nos da  $\frac{\lambda^{-1} e^{x^2}}{(\lambda^{-1} e^{x^2} + 1)^2} = \langle n_k \rangle (1 - \langle n_k \rangle)$



Zimatek



pero  $\langle n_k \rangle (1 - \langle n_k \rangle) \neq 0$  solo en cierto intervalo  $(\epsilon_F \pm \Delta)$ , con  $\Delta \sim kT$

Como  $T \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \ll -1 \Rightarrow$  Pudo desarrollar en serie alrededor de  $y = \eta$ !!!  
(aproximación de Sommerfeld)

$$y^{3/2} \approx \eta^{3/2} + \frac{3}{2} \eta^{1/2} (y - \eta) + \frac{3}{8} \eta^{-1/2} (y - \eta)^2 + \dots$$

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{5}{\Delta^3} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} (\eta^{3/2} + \frac{3}{2} \eta^{1/2} x + \dots) dt \quad (x = y - \eta)$$

para 1/1-4 Callen  
7 (eq. 3.99)

tengo un integral del tipo de:

$$I_n = \int \frac{t^n e^t}{(e^t + 1)^2} dt \quad (\text{integral de Bernoulli})$$

Series de Bernoulli  $\Rightarrow$  Tabuladas

$$I_n = (n-1)! 2^n (1-2^{1-n}) \zeta(n) \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

↓  
Notar que para n

impares se anula por la propiedad de la integral

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\rho = \frac{2^{7/2}}{3} \pi m^{3/2} \frac{5}{h^3} \mu^{3/2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{(kT)^2}{\mu} + \dots \right]$$

y relacionarlo  $\rho$  con  $\epsilon_F$  (para  $\mu$  de  $\epsilon_F$  a  $\mu$  en  $\epsilon_F$ ,  $\mu = \epsilon_F$ )

$$\mu = \epsilon_F \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right) = \mu(\epsilon_F, T) \quad (\text{Ver que si } T \rightarrow 0, \mu \rightarrow \epsilon_F)$$

Usando todo lo que he hecho para  $\rho$  para  $n$ :

$$n = \frac{3}{5} \rho \epsilon_F \left( 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right)$$

$$c_v = \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_v = \frac{\pi^2 k^2}{2 \epsilon_F} T = c_v \Rightarrow \text{Cuando } T \rightarrow 0, \text{ el calor específico tiene un comportamiento lineal}$$

Por ejemplo, en un material cristalino:  
 · Contribución del fonón  $\rightarrow T^{3/2}$   
 · Contribución electrónica  $\rightarrow T$

# EMISIÓN TERMIÓNICA

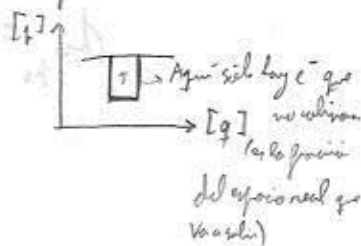
Tenemos electrones en un potencial de altura  $E_A$  (en eV). El objetivo es calcular  $j$ : el número de  $e^-$  que salen del cátodo por unidad de superficie y unidad de tiempo. Habrá que sumar, en  $j$ , para todos los  $e^-$  con energía suficiente.



Para ello necesitamos (para la superficie del cátodo la consideramos en dirección  $Z$ )  $(dn)_{t_z}$ :

$$dn_{t_z} = \int \int \int \frac{1}{h^3} \frac{V}{e^{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + 1} e^{\frac{p_z^2}{2m} - \frac{M}{kT} + 1}} d^3 \vec{p} dp_x dp_y$$

El espacio de la fase:



donde lo considerado que toda la energía es cinética

$$dn_{t_z} = \left( \frac{2}{h^3} V \int \frac{dp_x dp_y}{A e^{\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + 1}} \right) dp_z$$

Lo integral que queda se hace a polos:

$$dn_{t_z} = \frac{2V}{h^3} \int \int \frac{p dp d\varphi}{A e^{\frac{p^2}{2m} + 1}} = \frac{4\pi V}{h^3} \int \frac{p dp}{A e^{\frac{p^2}{2m} + 1}} dp_z$$

Para buscar los primitivos, nos fijamos en que el denominador puede surgir de un logaritmo

referimos:

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln \left( A e^{\frac{p^2}{2m} + 1} \right) = \frac{A \frac{p}{2m} 2p e^{\frac{p^2}{2m}} dp}{A e^{\frac{p^2}{2m} + 1}}$$

pero:  $\ln \left( A e^{\frac{p^2}{2m} + 1} \right)$ , queda  $-\frac{A \frac{p}{2m} 2p}{A e^{\frac{p^2}{2m}}}$  (el  $e$  da  $e^{-\frac{p^2}{2m}}$ )

Ahí: sólo falta  $-\frac{1}{A} \ln$

Entonces:

$$dn_{t_z} = \frac{4\pi V}{h^3} \left[ \int_0^{\infty} -\frac{m}{p} \frac{\partial}{\partial p} \ln \left( \frac{e^{-\frac{p^2}{2m}}}{A} + 1 \right) dp \right]_{t_z} = \frac{4\pi V}{h^3} \frac{m}{p} \left[ \ln \left( \frac{e^{-\frac{p^2}{2m}}}{A} + 1 \right) \right]_{p=0}^{p=\infty}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^3} \frac{m}{\beta} \ln\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) d\mu_z$$

Am, donde  $\frac{\mu_z^2}{2m} = \epsilon_z$ :

$$dn_{\mu_z} = \frac{(4\pi m kT) V}{h^3} \ln\left(e^{\frac{\mu_0 - \epsilon_z}{kT}} + 1\right) (2m)^{1/2} \epsilon_z^{-1/2} d\epsilon_z$$

$$j_z = \int \left( \frac{dn_{\mu_z}}{V} \right) \frac{V_{drift}}{L_{drift}} d\epsilon_z$$

→ largo (que la densidad de corriente eléctrica) /  $d\epsilon_z$

$$j_z = \frac{4\pi m e kT}{h^3} \int_{\epsilon_A}^{\infty} \ln\left(e^{\frac{\mu_0 - \epsilon_z}{kT}} + 1\right) (2m)^{1/2} \epsilon_z^{-1/2} \underbrace{\sqrt{2m\epsilon_z}}_{V_z} d\epsilon_z =$$

$$= \frac{4\pi m e kT}{h^3} \int_{\epsilon_A}^{\infty} \ln\left(1 + e^{\frac{\mu_0 - \epsilon_z}{kT}}\right) d\epsilon_z$$

Ahora, como  $\mu_0 - \epsilon_z \gg \mu_0 - \epsilon_A \gg kT \Rightarrow \ln(1+x) \approx x$

$$\text{Am, } j_z = \frac{4\pi m e (kT)^2}{h^3} e^{-\frac{\mu_0}{kT}}$$

Para mejorar la aproximación, hay que tener en cuenta que:

- los  $e^-$  colisionan entre sí
- los  $e^-$  colisionan con la red

(si el residuo libre neto es grande, la aproximación a buena)

Una alternativa es considerar que existe un equilibrio entre el material y un gas de  $e^-$ .

En la aproximación clásica,

$$p(T, \mu) = s \Lambda^{-3} \int_{s/2}^{\infty} \lambda \approx s \Lambda^{-3} \lambda$$

con  $\lambda = e^{\mu/kT}$

• Sustituyendo,

$$j_z = p e \left( \frac{k}{2\pi m} \right)^{1/2} T^{1/2} e^{-\frac{E_A}{kT}} \quad (\text{la expresión original de Richardson})$$

Veremos por tanto que el resultado clásico difiere del cuántico ( $T^{1/2} v_T^{-2}$ )

• El flujo de  $e^-$  vale:  $j_z = \frac{1}{4} p \langle u \rangle_z$

$$j_z = e j = e \frac{p}{(2\pi m kT)^{1/2}}$$

$p \cdot V = N kT \Rightarrow p = \frac{N}{V} = \frac{P}{kT}$

• Sustituyendo  $\langle u \rangle_z$

*Zimatek*

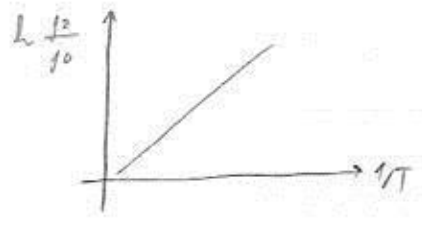
para un gas de  $e^-$ ,  $P = s kT \Lambda^{-3} \int_{s/2}^{\infty} \lambda \approx s kT \Lambda^{-3} \lambda = \frac{2 kT (2\pi m kT)^{3/2}}{h^3} e^{\mu/kT}$  (con  $E_A = 0$ )

Sustituyendo:

$$j_z = e \frac{4\pi m (kT)^2}{h^3} e^{\frac{\mu - W}{kT}}, \text{ el resultado obtenido rigurosamente}$$

• Si aplicamos un campo, la altura de la barrera disminuye:  $E_z = E_A - eV \Rightarrow W \rightarrow W - e \cdot V$

$$\ln \frac{j_z}{j_0} = \frac{eV}{k} \cdot \frac{1}{T}$$



# ENANA BLANCA

• Son estrellas que han consumido todo su combustible. Están compuesta por núcleos de He y e<sup>-</sup>. No están trabajamos con un gas de e<sup>-</sup> en equilibrio con la atracción gravitatoria de los núcleos de He.

Lo S. no hay equilibrio, la estrella colapsa (por q. es de Feo Phys al bajo T)

• Tenemos la masa de la estrella  $M = 2 N m_p$  (dependen de un de los e<sup>-</sup>)

• La energía de Fermi vale:

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} (6\pi^2 \rho)^{2/3} = 20 \text{ MeV} \Rightarrow T_F = \frac{\epsilon_F}{k} = 10^{11} \text{ K} \gg T_{\text{estrella}}$$

por tanto, estamos en la región inferior al nivel de Fermi  $\Rightarrow$  tan solo contribuye la presión de los e<sup>-</sup>.

de pts 0:  $P_0 = - \left( \frac{\partial E_0}{\partial V} \right)_N$

$$E_0 = \frac{5}{h^3} \int \epsilon d^3p d^3q = \frac{5}{h^3} \int \sqrt{(pc)^2 + (m_e c)^2} d^3p d^3q$$

$$\frac{\hbar}{m_e c} = x$$

$$= \frac{V m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x_F} (\sqrt{x^2 + 1}) x^2 dx$$

$$\int_0^{x_F} \sqrt{x^2 + 1} x^2 dx = \begin{cases} \frac{1}{3} x_F^3 \left[ 1 + \frac{3}{10} x_F^2 + \dots \right] & \text{si } x_F \ll 1 \rightarrow \text{límite no relativista} \\ \frac{1}{4} x_F^4 \left[ 1 + \frac{1}{3x_F^2} + \dots \right] & \text{si } x_F \gg 1 \rightarrow \text{límite relativista} \end{cases}$$

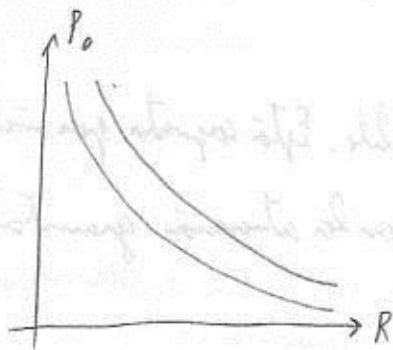
haciendo las sustituciones:

$$P_0 \approx \begin{cases} \frac{m_e^4 c^5}{5\pi^2 \hbar^3} \frac{4}{3} \frac{\bar{M}^{5/3}}{\bar{R}^3} & x_F \ll 1 \\ \propto \frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} & x_F \gg 1 \end{cases}$$

$$\text{con } x_F = \frac{\hbar p_F}{m_e c} = \frac{2 m_e \hbar^2}{2 m_e} (6\pi^2)^{2/3} \left( \frac{N m_e}{V} \right)^{2/3}$$

$$x_F = \frac{\bar{M}}{\bar{R}} ; \text{ con } \begin{cases} \bar{M} = \frac{9\pi}{8} \frac{M}{m_p} \\ \bar{R} = \frac{m_e c}{\hbar} R \end{cases}$$

Gráficamente:



(a medida que se agranda, la presión se va alando)

↓  
Hay una tendencia a expandirse

En equilibrio:

$$dE_0 = -P_0 dV = -\alpha \frac{\gamma M^2}{R^2} dR$$

(cte. de gravitación de la TGR)

↳ Enjejo dada por la relatividad general (calculo de sig)

$$P_0 4\pi R^2 dR = \alpha \frac{\gamma M^2}{R^2} dR$$

$$P_0 = \frac{\alpha}{4\pi} \gamma \frac{M^2}{R^4}$$

Esto se puede tratar desde varios puntos de vista:

a) Consideramos que los fermiones forman un gas clásico: → cuando  $T \ll T_f \Rightarrow$  el gas está fuertemente degenerado

$$P_0 = \frac{NKT}{V} = \frac{3KT}{8\pi m_p} \frac{M}{R^3} \Rightarrow R = \frac{2}{3} \alpha \frac{\gamma m_p}{KT} M$$

(esto a cuando  $T \ll T_f$  y  $R$  puede ser independiente  $\Rightarrow$  podría haber estrellas de cualquier masa y tamaño)

b)  $x_F \ll 1$ :

$$P_0 = \frac{4}{3} \frac{M^{5/3}}{R^5} \Rightarrow \frac{\alpha}{4\pi} \gamma \frac{M^2}{R^4} = \frac{4}{3} \frac{M^{5/3}}{R^5} \Rightarrow$$

$$R = \frac{cte.}{M^{1/3}}$$

(de nuevo, no hay límite para  $P_0(M)$ )



c)  $X_F \gg 1$ :

$$P_s = \text{cte.} \left[ \frac{\bar{M}^{-4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{-2/3}}{\bar{R}^2} \right] \Rightarrow \bar{R} = \bar{M}^{2/3} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}\right)^{2/3}}$$

$$\text{con } \bar{M}_0 = \left(\frac{27\pi}{64\alpha}\right)^{3/2} \left(\frac{\hbar c}{\gamma_{\text{np}}^2}\right)^{3/2} = 1.7 M_{\text{sol}} \text{ (límite teórico)} \\ \text{menor de } 1.4 M_{\text{sol}}$$

Esta ecuación implica  $\bar{M} > \bar{M}_0$   $\Rightarrow$  existe un límite teórico para la masa de una estrella  
(debido al equilibrio que debe haber entre presión gravitatoria y presión)

$\hookrightarrow$  Por una razón similar, existe un límite de altura y profundidad para océanos y ríos en la Tierra.

