

Mecánica Cuántica. 15 de enero de 2016

Cuestiones sin libros

1. Considera los siguientes tensores cartesianos de rango 2:

$$T_{ij} = r_i r_j \quad \text{y} \quad T'_{ij} = p_i p_j$$

- a) Expresa el valor esperado de T_{ij} en el estado fundamental del átomo de hidrógeno (no consideres el espín) en función de $\langle 1s | r^2 | 1s \rangle$.
- b) Expresa el valor esperado de T'_{ij} en el estado fundamental del átomo de hidrógeno (no consideres el espín) en función de $\langle 1s | p^2 | 1s \rangle$.

Indicación: Escribe T_{ij} y T'_{ij} como una suma de términos que correspondan a componentes de tensores esféricos de distinto rango y usa el teorema de Wigner-Eckart.

2. Tenemos una partícula desconocida, X , que está totalmente polarizada $m_X = s_X$. Sabemos que uno de sus caminos de desintegración es $X \rightarrow A+B$, y sabemos los espines de las partículas A y B : $s_A = 1/2$ y $s_B = 0$. Después de la desintegración, hemos medido la componente z del espín de la partícula A y hemos encontrado las siguientes probabilidades:

$$P(m_A = 1/2) = 1/5 \quad P(m_A = -1/2) = 4/5$$

¿Cuál es el espín de la partícula X ? Considere sólo el momento angular relativo mínimo posible entre las partículas A y B .

3. Considera el operador densidad de un sistema de dos niveles. Explica por qué ρ se puede expresar como la siguiente matriz

$$\rho = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix},$$

donde a y b son números reales. Sean E_0 y $E_1 > E_0$ las energías propias del sistema, y $|0\rangle$ y $|1\rangle$ los estados estacionarios correspondientes. Muestra a partir de la ecuación del movimiento de ρ que en la representación de energía a y b son independientes del tiempo mientras que $c(t) = c(0)e^{i\omega t}$ con $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$.

Determina los valores de a , b y $c(t)$ para el caso de que el sistema esté inicialmente en el estado $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Dado que las paridades de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son más y menos respectivamente, halla la evolución temporal del valor esperado $\bar{x}$ en términos del elemento de matriz $\langle 0|x|1\rangle$.

Mekanika Kuantikoa. 2016ko urtarrilak 15

Libururik gabeko galderak

1. Kotsidera ditzagun ondorengo heina 2ko tentsore kartesiarrak:

$$T_{ij} = r_i r_j \quad \text{y} \quad T'_{ij} = p_i p_j$$

- a) Idatzi ezazu T_{ij} tentsoreen itxarotako balioa hidrogeno atomoko oinarritzko egoerarako $\langle 1s | r^2 | 1s \rangle$ funtzioaren menpe (ez ezazu espina kotsideratu).
- b) Idatzi ezazu T'_{ij} tentsoreen itxarotako balioa hidrogeno atomoko oinarritzko egoerarako $\langle 1s | p^2 | 1s \rangle$ funtzioaren menpe (ez ezazu espina kotsideratu).

Iradozizuna: Idatzi T_{ij} eta T'_{ij} hein desberdineko tentsore esferikoen batura bezela eta Wigner-Eckart teorema erabili.

2. Partikula ezezagun bat dugu, X , guztiz polarizatua dagoena $m_X = s_X$. Badakigu bere desintegrazio-bide bat ondokoa dela $X \rightarrow A + B$, eta A eta B partikulen spinak badakizkigu baita: $s_A = 1/2$ eta $s_B = 0$. Desintegrazioa eta gero, A partikularek z -norabidearekiko spin osagaia m_A neurtu dugu, eta ondorengo probabilitateak aurkitu ditugu:

$$P(m_A = 1/2) = 1/5 \quad P(m_A = -1/2) = 4/5$$

Zein da X partikularek spin? Kotsideratu ezazu bakarrik A eta B partikulen arteko momentu angeluar erlatiboa posible txikiena.

3. Kotsidera dezagun bi mailako sistema baten dentsitate-eragilea. Espikatu zergatik ρ ondorengo matrize bezela idatzi daiteken

$$\rho = \begin{pmatrix} a & c \\ c^* & b \end{pmatrix},$$

non a eta b zenbaki errealeak diren. Bitez E_0 eta E_1 ($E_1 > E_0$) sistema-ren energia propioak, eta $|0\rangle$ eta $|1\rangle$ dagozkien egoera propioak. Froga ezazu, ρ eragilearen higidura ekuazioa erabiliz, energiaren oinarri propioan a eta b denboraren independenteak direla eta $c(t) = c(0)e^{i\omega t}$ non $\omega = (E_1 - E_0)/\hbar$.

Sistema-ren hasierako egoera $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ dela jakinik, kalkula itzazu a , b eta $c(t)$. Lor ezazu $\bar{x}$ itxarotako balioaren denbora eboluzioa $\langle 0 | x | 1 \rangle$ matrize elementuaren menpe, $|0\rangle$ eta $|1\rangle$ egoera propioen paritateak $+1$ eta -1 direla jakinik, hurrenez hurren. Interpreta ezazu zure erantzuna fisikoki.

Mecánica Cuántica. 15 de enero de 2016

Problemas

1. Muestra que en la aproximación de Born los desplazamientos de fase $\delta_\ell(E)$ en el scattering por un potencial central $V(r)$ están dados por

$$\delta_\ell(E) \simeq -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r^2 V(r) (j_\ell(kr))^2.$$

Aprovecha la fórmula anterior para expresar la longitud de scattering en onda s en la aproximación de Born en términos de una integral del potencial.

¿Cuándo es válida la aproximación de Born?

Indicación: con $q = 2k \sin(\theta/2)$ tenemos

$$\frac{\sin(qr)}{qr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) j_\ell(kr)^2 P_\ell(\cos \theta).$$

2. Una partícula de masa m se mueve como un oscilador armónico simple de frecuencia angular ω . Inicialmente está en el estado fundamental pero a partir de $t = 0$ su movimiento se perturba por una fuerza independiente de la posición $F(t)$. Muestra que en $t > 0$ y a primer orden en $F(t)$ el estado es

$$|\psi, t\rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} |0\rangle + a_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |1\rangle$$

donde

$$a_1 = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \int_0^t dt' F(t') e^{i\omega t'}.$$

Calcula $\langle x \rangle(t)$ y muestra que tu expresión coincide con la solución clásica

$$x(t) = \int_0^t dt' F(t') G(t-t'),$$

donde la función de Green es $G(t-t') = \sin[\omega(t-t')]/m\omega$. Muestra que un desplazamiento del punto de equilibrio inicial del oscilador podría dar lugar a esta perturbación y calcula el valor de ese desplazamiento en función de F .

3. Considera un electrón y un positrón fijos en el espacio en interacción con un campo magnético uniforme en la dirección z . El Hamiltoniano se puede escribir como

$$\hat{H} = \omega(\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}),$$

donde $\hat{S}_1$ es el operador de espín del electrón, $\hat{S}_2$ es el operador de espín del positrón, y ω es una constante.

- a) ¿Cuáles son los valores propios de la energía de este sistema y cuáles son sus degeneraciones?
- b) Define el espín total $\hat{S} \equiv \hat{S}_1 + \hat{S}_2$.
 - (i) ¿Conmuta $\hat{S}^2$ con $\hat{H}$?
 - (ii) ¿Conmuta $\hat{S}_z$ con $\hat{H}$?
 - (iii) Da dos ejemplos diferentes de pares de observables que conmutan.
- c) Si el sistema electrón-positrón está en un estado de espín cero en $t = 0$, ¿cuál es la probabilidad de que sea encontrado en un estado de espín 0 en un tiempo posterior $t = t_1$?
- d) Si, en un tiempo posterior $t = t_2$, se hace una medida simultánea de S_{1x} y S_{2x} , ¿cuál es la probabilidad de que las dos medidas den como resultado los dos espines con proyecciones positivas?

(Indicación: La representación de espín con proyección positiva para S_x en la base S_z es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

Mekanika Kuantikoa. 2016ko urtarrilak 15

Problemak

1. Froga ezazu Born-en hurbilketan, $V(r)$ potentzial zentral batek sorturiko sakabanaketaren ondorioz gertatzen diren $\delta_\ell(E)$ fase lerraketak honela idatzi daitezkeela:

$$\delta_\ell(E) \simeq -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r^2 V(r) (j_\ell(kr))^2.$$

Erabili ezazu aurreko formula, s uhineko sakabanaketa-luzera idazteko Born-en hurbilketan, potentzialaren integral baten menpe.

Noiz da Born-en hurbilketa ona?

Iradokizuna: $q = 2k \sin(\theta/2)$ kontutan hartuz,

$$\frac{\sin(qr)}{qr} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) j_\ell(kr)^2 P_\ell(\cos \theta).$$

2. Partikula bat, m masaduna, ω maiztasun angeluarreko osziladore simple bat bezela higitzen da. Hasieran, oinarritzko egoeran dago, baina $t=0$ -ren ondoren, bere higidura perturbatu egiten dugu F indar konstanten baten bidez.

Froa ezazu $t > 0$ denboretarako eta F -n lehenengo ordenerarte, egoera hau dela:

$$|\psi, t\rangle = e^{-iE_0 t/\hbar} |0\rangle + a_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |1\rangle$$

non

$$a_1 = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \int_0^t dt' F(t') e^{i\omega t'}.$$

Kalkula ezazu $\langle x \rangle(t)$ eta froga ezazu lortzen duzun espresioa soluzio klasikoarekin,

$$x(t) = \int_0^t dt' F(t') G(t-t'),$$

bat datorrela, non Green-en funtzioa $G(t-t') = \sin[\omega(t-t')]/m\omega$ den. Froga ezazu perturbazio bera lortuko genukela osziladorearen hasierako oreka puntua desplazatuko bagenu. Kalkula ezazu desplazamendu horren balioa F -ren funtzio bezala.

3. Demagun elektroi bat eta positroi bat ditugula, espazioan finko, eta z norabidean dagoen eremu magnetiko uniforme batekin elkarrekintzan. Hamiltondarra honela idatzi daiteke:

$$\hat{H} = \omega(\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}),$$

non $\hat{S}_1$ elektroiaren spin eragilea den, $\hat{S}_2$ positroiaren spin eragilea, eta ω konstante bat.

- a) Zeintzu dira sistemaren balio propioak eta zeintzu dira endekapenak?
- b) Spin totala $\hat{S} \equiv \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ dela jakinik,
 - (i) $\hat{S}^2$ eta $\hat{H}$ trukakorrak al dira?
 - (ii) $\hat{S}_z$ eta $\hat{H}$ trukakorrak dira?
 - (iii) Trukakor diren eragile bikoteen bi adibide desberdin eman.
- c) Demagun elektroi-positroi sistema spin totala zero duen egoeran badaude $t = 0$ denboran, zein da ondorengo $t = t_1$ denboran sistema spin totala zero duen egoeran aurkitzeko probabilitatea?
- d) Ondorengo $t = t_2$ denboran S_{1x} eta S_{2x} neurketak egiten dira aldi berean. Zein da bi neurketa horietan bi espinen proiektzio positiboa lortzeko probabilitatea?

(Iradokizuna: S_z -ren oinarrian, S_x -en proiektzio positiboaren adierazpena $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ da.)