

Mecánica Cuántica. 25 de enero de 2018

Problemas. Resuelva 2 de los siguientes 3 problemas.

1. El modo de desintegración más probable del pión π^+ (spin cero) es la desintegración leptónica debida a la fuerza nuclear débil $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ donde μ^+ es el muón y ν_μ su neutrino correspondiente, ambos de spin $1/2$.

- ¿Qué valores puede tomar el momento angular orbital relativo de las partículas finales y su spin total?
- Escriba explícitamente el estado final más general en términos del momento angular orbital y de los spines individuales.
- Suponiendo que fuera factible, prediga la distribución angular para la probabilidad de medir los spines antiparalelos.
- ¿Cuál debe ser el resultado para la distribución angular no polarizada? Verifíquelo haciendo la correspondiente suma sobre estados finales.

2. a) Use la aproximación de Born para estimar la sección eficaz diferencial y la sección eficaz total para

$$V(r) = g \frac{\theta(R-r)}{r}.$$

- Discute los límites $E \rightarrow 0$ y $E \rightarrow \infty$ de la sección eficaz diferencial.
- ¿En qué condiciones es válida la aproximación de Born aplicada?

3. a) Una partícula está en el estado fundamental de un pozo uni-dimensional de potencial infinito de longitud L . En $t = 0$ se aplica una fuerza externa $f(t)$. Obtenga una expresión para la probabilidad de encontrar la partícula en el estado n -ésimo al cabo de un tiempo t .

- b) Considere ahora otra situación. Inicialmente se tiene la misma partícula en el fundamental en el pozo. En $t = 0$ se eliminan las paredes de forma súbita y la partícula se libera. Halle la *probabilidad de transición* $dP_{i \rightarrow F}$ a un conjunto de estados finales de energía en el intervalo $(E_f, E_f + dE_f)$ y obtenga la fórmula de $dP_{i \rightarrow F}/dE_f$. Para su tranquilidad de conciencia compruebe las dimensiones de la cantidad hallada.

(Indicación. Por si le puede servir

$$\int_0^1 \sin(\pi x) e^{icx} dx = \frac{\pi(1 + e^{ic})}{\pi^2 - c^2}. \quad)$$

Mekanika Kuantikoa. 2018ko urtarrilak 25

Problemak. Ondorengo 3 problemetatik, ebatz itzazu 2.

1. Pioiaren desintegrazio ohizkoena indar nuklear ahularen bidezko desintegrazio leptonikoa da $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ non π^+ pioia, μ^+ muoia eta ν_μ neutrino muonikoa den. Pioiaren spina 0 da, eta beste biena $1/2$.
 - a) Zein balio har ditzakete bukaerako partikulen momentu angeluar orbital erlatiboak eta spin totalak?
 - b) Idatzi ezazu bukaerako egoera orokorrena momentu angeluar orbitalararen eta bakoitzaren spinaren arabera.
 - c) Posiblea bada, spinak antiparalelo neurtzeko probabilitatearen banaketa angeluarra aurrean ezazu.
 - d) Zein izan beharko da polarizatu gabeko banaketa angeluarra? Egiazta ezazu bukaerako egoerei dagozkien batura eginez.
2. a) Erabili ezazu Born-en hurbilketa ondorengo potentzialari dagozkion sekzio eragile diferentziala eta totala lortzeko

$$V(r) = g \frac{\theta(R-r)}{r}.$$

- b) Eztabaida itzazu sekzio eragile diferentzialaren $E \rightarrow 0$ eta $E \rightarrow \infty$ limiteak.
 - c) Zer baldintzatan da aplikatutako Born-en hurbilketa ona?
3. a) Partikula bat L luzerako putzu infinitu unidimentsional formako potentzial baten oinarritzko egoeran dago. $t = 0$ unean $f(t)$ kanpo indar bat aplikatzen zaio. Lor ezazu t denboran partikula n -garren egoeran aurkitzeko probabilitatearen espresioa.
 - b) Kontsideratu dezagun beste kasu hau. Hasieran, partikula putzuaren oinarritzko egoeran dago. $t = 0$ aldiunean paretak desagertu egiten dira bapatean eta partikula aske geratzen da. Kalkula ezazu bukaerako egoera $(E_f, E_f + dE_f)$ energia tartean egoteko $dP_{i \rightarrow f}$ trantsizio-probabilitatea-ren formula. Zure latsitasunerako konprobatu espresio horren dimentsioak zuzenak direla.
(Iradokizuna. Ondorengo formula lagungarri suerta dakizuke

$$\int_0^1 \sin(\pi x) e^{icx} dx = \frac{\pi(1 + e^{ic})}{\pi^2 - c^2}.$$

Mecánica Cuántica. 25 de enero de 2018

Cuestiones sin libros.

Resuelva 3 de los siguientes 4 problemas.

✓ 1. Una partícula de espín $1/2$ se describe por una matriz densidad ρ .

- a) ¿Puede ser nulo el valor esperado del espín $\langle S \rangle$ si ρ describe un estado puro? Explica brevemente.
- b) ¿Puede ser nulo el valor esperado $\langle S \rangle$ en un estado mezcla? Explica brevemente.
- c) Si

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

¿describe un estado puro o mezcla? Calcule la entropía del estado.

- d) Calcule $\langle S \rangle$ con ρ dada en el apartado anterior.
 - e) ¿Cuál es la probabilidad de que al medir la componente positiva y del espín se obtenga el valor $\frac{\hbar}{2}$?
2. La amplitud de emisión o absorción de radiación es proporcional a ciertos elementos de matriz de operadores tensoriales entre estados propios de momento angular y de paridad.
- a) ¿Cuál es el operador a considerar para la radiación dipolar eléctrica? Establezca las reglas de selección para los elementos de matriz de radiación dipolar eléctrica entre estados $|j_i, m_i\rangle$ y $|j_f, m_f\rangle$ de paridades respectivas ε_i y ε_f . ¿Es posible una transición de este tipo entre $|n_i, l = 1, m = 1\rangle$ y $|n_f, l = 1, m = 0\rangle$? ¿Por qué?
 - b) Dé un argumento por el cual el elemento de matriz de cualquier operador tensorial de rango mayor o igual que uno es cero si $j_i = j_f = 0$, independientemente del valor de las paridades.
 - c) Establezca la regla de selección para la radiación dipolar magnética, sabiendo que los elementos de matriz en este caso, son los de un operador de momento angular. ¿Es posible una transición de este tipo entre $|n_i, l = 1, m = 1\rangle$ y $|n_f, l = 1, m = 0\rangle$? ¿Por qué?

3. El operador *Squeeze*, S , se define de la siguiente manera para el oscilador armónico:

$$S(\gamma) = \exp \left(-\frac{\gamma}{2} (a^\dagger a^\dagger - aa) \right),$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$. Demuestre que el operador S es unitario.

Actuando sobre el estado fundamental del oscilador armónico $|0\rangle$ con el operador S , se obtiene el estado $|0_\gamma\rangle \equiv S(\gamma)|0\rangle$. ¿Cuál es el valor esperado del Hamiltoniano con respecto al estado $|0_\gamma\rangle$?

(Sugerencia: Utilice que $S^\dagger(\gamma)a^\dagger S(\gamma) = a^\dagger \cosh \gamma - a \sinh \gamma$)

4. Una partícula X , de espín $3/2$, se desintegra en un nucleón y en un pión. Al principio, la partícula X se hallaba totalmente polarizada hacia "abajo", es decir, $m_X = -3/2$. Después de la desintegración, se ha medido que el espín del nucleón puede estar tanto para arriba como para abajo. Obtenga el momento angular relativo del nucleón y el pión. Determine si se puede deducir que el proceso es debido a la fuerza nuclear débil o la fuerza nuclear fuerte, teniendo en cuenta sólo la paridad del proceso, si la paridad de la partícula X es $+1$, o si es -1 . [Indicaciones: El espín del pión es 0 y su paridad es -1 (0^-); el espín del nucleón es $1/2$ y su paridad $+1$ ($1/2^+$).]

Mekanika Kuantikoa. 2018ko urtarrilak 25

Libururik gabeko problemak.

Ondorengo 4 ariketetatik aska itzazu 3.

1. Spina 1/2 duen partikula bat ρ dentsitate-matrizearen bidez deskribatuta dago.

a) ρ eragileak egoera puru bat deskribatzen badu, izan al daiteke $\langle S \rangle$ nulua? Esplika ezazu laburki.

b) Eta egoera nahasia bada, izan daiteke $\langle S \rangle$ nulua? Esplika ezazu laburki.

c) Egoera

$$\rho = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

matrizeak emandakoa bada, egoera purua ala nahasia da? Kalkula ezazu egoeraren entropia.

d) Kalkula ezazu $\langle S \rangle$ aurreko atalean emandako ρ -rentzat.

e) Zein da spinaren y osagaia neurtzerakoan $\frac{\pm \hbar}{2}$ lortzeko probabilitatea?

2. Erradiazioa xurgatu edo igortzeko anplitudea momentu angeluarraren eta paritatearen egoera propioen arteko eragile tentsorial jakin batzuen matrize elementuekiko proportzionala da

a) Zein eragile hartu behar da kontuan erradiazio dipolar elektrikorako? Lor itzazu ε_i paritatea duen $|j_i, m_i\rangle$ egoeraren, eta ε_f paritatea duen $|j_f, m_f\rangle$ egoeraren arteko erradiazio dipolar elektrikoari dagozkion matrize elementuen hautespen legeak. Posible al da $|n_i, l = 1, m = 1\rangle$ -tik $|n_f, l = 1, m = 0\rangle$ -rako trantsizioa? Zergatik?

b) Argudia ezazu heina 1 edo handiago duen edozein eragile tentsorialari dagokion matrize elementua nulua dela $j_i = j_f = 0$ kasurako, paritatea edozein delarik.

c) Lor itzazu erradiazio dipolar magnetikoari dagozkion hautespen erregelak, kasu hontan matrize elementuak momentu angeluar bati dagozkionak direla jakinik. Posible al da $|n_i, l = 1, m = 1\rangle$ -tik $|n_f, l = 1, m = 0\rangle$ -rako trantsizioa? Zergatik?

3. Osziladore armonikoaren kasuan *Squeeze* eragilea S honela definitzen da:

$$S(\gamma) = \exp \left(-\frac{\gamma}{2} (a^\dagger a^\dagger - aa) \right),$$

non $\gamma \in \mathbb{R}$. Frogatu eragilea Unitarioa dela.

Osziladore harmonikoaren oinarrizko egoerari, $|0\rangle$, S eragilearekin eraginez $|0_\gamma\rangle$ egoera lortzen dugu, hau da, $|0_\gamma\rangle \equiv S(\gamma)|0\rangle$. Zein da Hamiltondarraren itxarotako balioa $|0_\gamma\rangle$ egoerarekiko?

(Iradokizuna: Erabili ezazu $S^\dagger(\gamma)a^\dagger S(\gamma) = a^\dagger \cosh \gamma - a \sinh \gamma$]

4. Partikula bat, X , spin $3/2$ duena, nukleoi eta pioi batetan deusezten da. Hasieran X partikula guztiz polaritzen dugu "beherantz", hau da, $m_X = -3/2$. Deuseztapena eta gero, nukleoiaren spinaren z osagaia bai gora eta bai behera egon daitekela neurtu dugu. Lortu nukleoiaren eta pioiaren momentu angeluar erlatiboa. Posible al da jakitea prozesua indar nuklear ahularen ala indar nuklear sendoaren ondorio den, paritateari bakarrik erreparatuta, X partikularen paritatea $+1$ bada? Eta -1 bada? [Iradokizunak: Pioiaren spina 0 da eta paritatea -1 (0^-); eta nukleoiak spin $1/2$ dute eta paritatea $+1$ ($1/2^+$).]