

ESTIMACIÓN POR PLANIFICACIÓN DE GANANCIAS CON TRANSMISIONES SIN ACUSE DE RECIBO

Daniel Dolz, Ignacio Peñarrocha, Roberto Sanchis
Dep. Ingeniería de Sistemas Industriales i Disseny
Universitat Jaume I, Campus de Riu Sec, Castelló
{ddolz, ipenarro, rsanchis}@uji.es

Resumen

Este trabajo aborda el problema de estimación para sistemas discretos donde tanto las mediciones como las acciones de control se transmiten a través de una red de comunicación con pérdida de datos y sin acuse de recibo. Se propone el diseño de un observador cuyas ganancias conmutan su valor dependiendo del escenario de medición, modelado mediante una cadena de Markov, y que a su vez se planifican en tiempo real mediante un estadístico del error de control (diferencia entre la acción de control en el proceso y observador). El observador, que utiliza el valor esperado de la acción de control en el proceso, se diseña de tal forma que se minimice la norma RMS del error de estimación frente a perturbaciones, ruidos de medida y errores de control (perturbación desconocida). Así, el problema de diseño contiene restricciones en forma de desigualdades matriciales paramétricas. El hecho de deber verificarlas para cualquier valor del error de control (parámetro) conlleva la resolución de un problema de dimensión infinita, por lo que se utiliza técnicas de descomposición mediante suma de cuadrados para hacerlo tratable.

Palabras clave: *Estimación en red, pérdida de datos, acuse de recibo.*

1 Introducción

Los sistemas de control en red se caracterizan por tener descentralizados sus diferentes elementos. La transmisión de información (mediciones y acciones de control) se realiza a través de una red de comunicación, cosa que incrementa la flexibilidad y mantenimiento del sistema [6]. Sin embargo, la transferencia de datos suele estar expuesta a diferentes fenómenos adversos, entre otros, a pérdidas [7].

Los protocolos de comunicación utilizados pueden dividirse en dos grandes grupos dependiendo de si ofrecen acuse de recibo (TCP) o no (UDP). Evidentemente, las redes basadas en UDP aligeran el tráfico de datos pero introducen nuevos problemas.

La utilización de redes UDP no supone

ningún problema adicional en el caso de las pérdidas en el canal de medición (sensores hacia controlador/observador). Se ha demostrado que la utilización de observadores con ganancias conmutadas dependientes del escenario de medición ofrecen mejores prestaciones que el empleo de una única ganancia invariante [3, 16]. Estos métodos pueden obtener prestaciones similares a las de las soluciones basadas en el filtro de Kalman [14] con un menor coste computacional, y además, soportan una mayor clase de perturbaciones.

Sin embargo, la ausencia de acuse de recibo sobre la transmisión de acciones de control es un problema crítico. Los autores de [13, 15] demostraron que bajo este paradigma, el principio de separación en el diseño de controladores LQG no se cumple ya que el algoritmo de estimación depende de la acción de control recibida, la cual se desconoce. El diseño conjunto de estimadores y controladores bajo estos supuestos se ha estudiado en numerosos trabajos [5, 9, 20]. Otras propuestas para resolver esta problemática puede encontrarse en [1, 4], donde se proponen métodos para estimar la ocurrencia de la transmisión para que así se cumpla el principio de separación.

En el presente trabajo se plantea una filosofía diferente para tratar el problema de la estimación remota de los estados de un proceso a través de redes UDP con pérdida de datos. Se propone utilizar el valor esperado de la acción de control aplicada en el proceso para ejecutar la predicción. Así, se modela la ausencia de acuse de recibo sobre la acción de control mediante una nueva perturbación desconocida, llamada error de control, que afecta al algoritmo de estimación. Teniendo esto en cuenta, se obtiene un estadístico del error de control calculado en tiempo real, que se puede considerar como un parámetro acotado y variante en el tiempo.

Algunos trabajos como [18] desarrollaron ideas similares pero con ganancias invariantes, cosa que lleva a prestaciones de estimación conservadoras. Aquí se propone el uso de un observador con ganancias conmutadas dependientes del escenario de medición, modelado mediante una cadena de

Markov, que a su vez se planifican en tiempo real utilizando el estadístico del error de control. La principal aportación de este trabajo es el diseño de un observador cuyas ganancias dependen del valor que toma en tiempo real la perturbación desconocida (estadístico del error de control) que aparece debido a las pérdidas de acciones de control. Además, los resultados obtenidos podrían permitir la aplicación del principio de separación siempre que el controlador diseñado respete las cotas impuestas sobre dicho estadístico.

El diseño del observador busca minimizar la norma H_∞ del error de estimación frente a perturbaciones externas. Para poder llevar a cabo el diseño, se imponen una planificación de ganancias con dependencias polinómicas para así poder utilizar técnicas de descomposición mediante suma de cuadrados (SOS) [2]. En la línea de [11], la novedad conceptual introducida con respecto a trabajos previos (véase. [10, 19]) reside en la utilización de técnicas SOS para planificar un observador con un parámetro variante en el tiempo que depende del comportamiento de la red.

Notación : Sea \mathbb{R} y \mathbb{N} el conjunto de números reales y naturales. Sea A y B ciertas matrices. $A \succeq 0$ denota que A es una matriz semidefinida positiva. Véase similar definición para \succ , \prec y \preceq . La suma directa se representa mediante \bigoplus , donde $A \bigoplus B$ es una matriz diagonal con A y B en ella. Sea $x_k \in \mathbb{R}^n$ un proceso estocástico. $\mathbf{E}\{\cdot\}$ y $\mathbf{Pr}\{\cdot\}$ denotan valor esperado y probabilidad. La norma RMS de x_k es $\|x\|_{\text{RMS}} = \lim_{K \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x_k^T x_k}$.

2 Descripción del problema

En este artículo se considera el problema de estimación de los estados de un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo donde las mediciones y acciones de control se transmiten a través de una red de comunicación con pérdida de datos y sin acuse de recibo (red con protocolo UDP). Sea la representación del sistema en el espacio de estados tal que

$$x_{k+1} = A x_k + B_u u_k + B_w w_k, \quad (1a)$$

$$y_k = C x_k + v_k \quad (1b)$$

donde $x_k \in \mathbb{R}^n$ es el estado en el periodo $k \in \mathbb{N}$, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ es la acción de control aplicada, $w_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ es la perturbación del estado, $y_k \in \mathbb{R}^{n_y}$ es la medición de la salida y $v_k \in \mathbb{R}^{n_v}$ es el ruido de medida. Asíumase que tanto la perturbación como el ruido son procesos estocásticos estacionarios de

sentido amplio¹ con varianzas acotadas, es decir, $\|w\|_{\text{RMS}} \leq \bar{w}_{\text{rms}}$ y $\|v\|_{\text{RMS}} \leq \bar{v}_{\text{rms}}$.

Asúmase que el observador y el controlador están emplazados en el mismo nodo y por lo tanto el observador conoce la acción de control enviada en cada periodo, pero no la acción de control realmente aplicada.

2.1 Descripción de la recepción de mediciones

Considérese que cada sensor s toman muestras en cada periodo k de su salida de manera sincronizada con la actualización de la acción de control, y que envía hacia el nodo donde se encuentra el observador un mensaje conteniendo la correspondiente medición $y_{s,k}$. La siguiente variable caracteriza la recepción de mediciones del sensor s en cada periodo k

$$\alpha_{s,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_{s,k} \text{ se recibe en el periodo } k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (2)$$

El escenario completo de medición en el periodo k se modela agregando la anterior variable binaria tal que $\alpha_k = \bigoplus_{s=1}^{n_m} \alpha_{s,k}$. Asíumase que α_k sigue una cadena de Markov cuyos estados están dentro del conjunto

$$\alpha_k \in \Xi = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r\}, \quad r = 2^{n_m} - 1, \quad (3)$$

donde η_0 representa el caso $\alpha_k = 0$. Se considera conocida la matriz de transición de probabilidades $\Lambda = [p_{i,j}]$ donde

$$p_{i,j} = \mathbf{Pr}\{\alpha_{k+1} = \eta_j | \alpha_k = \eta_i\}.$$

Nota 1. *Considérese en cada sensor pérdidas Markovianas independientes (véase [17]), es decir,*

$$\mathbf{Pr}\{\alpha_{s,k} = 0 | \alpha_{s,k-1} = 0\} = q_s^y,$$

$$\mathbf{Pr}\{\alpha_{s,k} = 1 | \alpha_{s,k-1} = 1\} = p_s^y,$$

para todo $s = 1, \dots, n_y$. Entonces, se puede calcular las probabilidades de transición de α_k tal que

$$p_{i,j} = \prod_{s=1}^{n_m} \mathbf{Pr}\{\alpha_{s,k} = \eta_{s,j} | \alpha_{s,k-1} = \eta_{s,i}\}$$

donde $\eta_{s,i}$ representa el elemento diagonal s de η_i . \square

2.2 Descripción de la actualización de control

El controlador (que se encuentra junto al observador) transmite a través de la red en cada

¹Si x_k es estacionario de sentido amplio su norma RMS es $\|x\|_{\text{RMS}} = \sqrt{\mathbf{E}\{x_k^T x_k\}}$.

periodo $k-1$ un único paquete conteniendo todas las acciones de control a aplicar en el periodo k (véase [12]). Se utiliza u_k^t para referirse a las acciones enviadas de control (conocidas) en el periodo $k-1$ para aplicarse en k . La recepción de acciones de control en $k-1$ se modela mediante

$$\theta_{k-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_k^t \text{ se recibe en } k-1, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (4)$$

Asúmase que los actuadores implementan un retenedor de orden cero, es decir, se aplica la última acción de control recibida mientras no se adquiera una nueva.

Considérese que se conoce la probabilidad de estar aplicando en k la acción de control enviada $\tau+1$ periodos antes, es decir

$$\varphi_\tau = P\{u_k = u_{k-\tau}^t\}, \quad \tau = 0, \dots, N^u, \quad \sum_{\tau=0}^{N^u} \varphi_\tau = 1, \quad (5)$$

donde N^u es el número máximo de pérdidas consecutivas.

Nota 2. *Asúmase de nuevo pérdidas Markovianas independientes entre sí*

$$\begin{aligned} \Pr\{\theta_k = 0 | \theta_{k-1} = 0\} &= q^u, \\ \Pr\{\theta_k = 1 | \theta_{k-1} = 1\} &= p^u. \end{aligned}$$

Si se asegura un número máximo de pérdidas consecutivas inferior a N^u , se puede calcular las probabilidades en (5) como

$$\varphi_0 = \frac{1}{\xi} \pi_1^u, \quad \varphi_{\tau>0} = \frac{1}{\xi} (q^u)^{\tau-1} (1-p^u) \pi_1^u$$

donde $\pi_{1,u} = \Pr\{\theta_k = 1\}$,

$$\xi = \pi_1^u + \sum_{\tau=1}^{N^u} (q^u)^{\tau-1} (1-p^u) \pi_1^u, \quad \pi^u = \pi^u \Lambda^u,$$

$\pi^u = [\pi_0^u \ \pi_1^u]$ y Λ^u es la matriz de probabilidad de transiciones asociada a θ_k . \square

Puesto que la acción de control actuando sobre el proceso se desconoce, se propone emplear su valor esperado $\mathbf{E}\{u_k\}$ para computar la estimación en bucle abierto (predicción). Se utiliza u_k^c para referirse a $\mathbf{E}\{u_k\}$ donde

$$u_k^c = \sum_{d=0}^{N^u} \varphi_d u_{k-d}^t. \quad (6)$$

El siguiente lema define algunos estadísticos sobre el error de control $\tilde{u}_k = u_k - u_k^c$ (error entre la acción de control aplicada en el proceso y observador).

Lema 1. *El error de control \tilde{u}_k tiene un valor esperado nulo y*

$$\mathbf{E}\{\tilde{u}_k^T \tilde{u}_k\} = \sum_{d=0}^{N^u} \varphi_d (\star)^T \underbrace{\left(u_{k-d}^t - \sum_{d=0}^{N^u} \varphi_d u_{k-d}^t \right)}_{\star}. \quad (7)$$

Prueba. En primer lugar, el valor esperado de \tilde{u}_k es cero por definición de u_k^c , véase (6). En segundo lugar, usando el teorema de la probabilidad total se obtiene (7). \square

Denótese $\mathbf{E}\{\tilde{u}_k^T \tilde{u}_k\}$ mediante δ_k . El valor de δ_k se puede computar en cada periodo utilizando (7), y por lo tanto su valor es conocido. Asúmase que δ_k es un parámetro acotado y variante en el tiempo tal que $\delta_k \in \mathcal{S}$ con $\mathcal{S} = \{\delta_k : 0 \leq \delta_k \leq \bar{\delta}, \forall k\}$, donde $\bar{\delta}$ es un valor conocido. Si no se conociera, se podría utilizar como un parámetro de ajuste tal y como se verá en secciones posteriores.

2.3 Algoritmo de estimación

Considerando las descripciones previas, se propone el siguiente algoritmo de estimación:

$$\hat{x}_{k-} = A \hat{x}_{k-1} + B_u u_{k-1}^c, \quad (8a)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-} + L_k \alpha_k (y_k - C \hat{x}_{k-}). \quad (8b)$$

En cada periodo k , se predice la evolución del estado (8a) utilizando el valor esperado de la acción de control aplicada en el proceso u_{k-1}^c . Seguidamente, cuando sea posible, se actualiza la estimación con las mediciones recibidas (elementos diagonales no nulos de α_k) mediante la matriz L_k , véase (8b).

La dinámica resultante del error de estimación $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ es:

$$\tilde{x}_k = (I - L_k \alpha_k C) (A \tilde{x}_{k-1} + B_W \mathcal{W}_{k-1}) - L_k \alpha_k v_k \quad (9)$$

donde $B_W = [B_w \ B_u]$ y $\mathcal{W}_{k-1} = [w_{k-1}^T \ \tilde{u}_{k-1}^T]^T$. Nótese que para el observador el error de control es como una perturbación desconocida.

Nota 3. *El método propuesto para tratar la incertidumbre en la pérdida de acciones de control permite que se cumpla el principio de separación siempre que el controlador diseñado respete la cota sobre el error de control, es decir, $\delta_k \leq \bar{\delta}$.* \square

El objetivo de este trabajo es obtener las ganancias matriciales L_k que minimicen el error de estimación frente a perturbaciones del estado, ruidos de medida y la incertidumbre introducida por la pérdida de acciones de control. Algunos

trabajos previos demostraron que la utilización de ganancias conmutadas mejoran las prestaciones de estimación [16]. En esta línea y para evitar conservadurismo con respecto a los errores de control, se propone el uso de ganancias conmutadas que se planifiquen en tiempo real con el parámetro δ_k . La ley resultante que rige el comportamiento de L_k es:

$$L_k = \begin{cases} L_i(\Delta_{k-1}) & \text{si } \alpha_k = \eta_i \text{ para } i = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{si } \alpha_k = \eta_0. \end{cases} \quad (10)$$

donde

$$\Delta_{k-1} = [\delta_{k-1} \quad \delta_{k-2}]^T. \quad (11)$$

Nótese que se planifica L_k con el valor actual del estadístico del error de control δ_{k-1} (en periodo k) y el anterior δ_{k-2} (en periodo $k-1$). Esto permite incluir en el algoritmo de estimación tanto la incertidumbre de control δ_{k-1} como la variación de δ_{k-2} a δ_{k-1} .

3 Diseño del observador

En esta sección se lleva a cabo el diseño del observador con ganancia $L(\alpha_k, \Delta_{k-1})$ utilizando un método basado en la norma H_∞ . En primer lugar, se derivan condiciones suficientes para la existencia del observador basadas en desigualdades matriciales paramétricas (PDMI) relacionadas con Δ_k . En segundo lugar, imponiendo dependencias polinómicas, se presenta un procedimiento basado en SOS para resolver el problema de diseño en tiempo polinómico.

El siguiente teorema muestra las condiciones en forma de PDMI que debe cumplir $L(\alpha_k, \Delta_{k-1})$ para obtener un error de estimación acotado en norma H_∞ .

Teorema 1. *Considérese el algoritmo de estimación (8) sobre el sistema (1). Si existen matrices simétricas definidas positivas $P_j(\Delta_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrices completas $G_j(\Delta_k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $X_j(\Delta_k) \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, y funciones escalares reales positivas $\gamma_w(\Delta_k)$, $\gamma_v(\Delta_k)$ y $\gamma_u(\Delta_k)$ para todo $i, j = 0, \dots, r$ y $\delta_k \in \mathcal{S}$ que cumplan*

$$\Upsilon_i(\Delta_k, \Delta_{k-1}) = \begin{bmatrix} \Omega & \bar{M}_{A,i} & \bar{M}_{B,i} \\ \bar{M}_{A,i}^T & P_i(\Delta_{k-1}) - I & 0 \\ \bar{M}_{B,i}^T & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \succ 0 \quad (12)$$

donde

$$\Omega = \bigoplus_{j=0}^r G_j(\Delta_k) + G_j(\Delta_k)^T - P_j(\Delta_k),$$

$$\bar{M}_{A,i} = [\sqrt{p_{i,0}} M_{A,0}^T \quad \dots \quad \sqrt{p_{i,r}} M_{A,r}^T]^T,$$

$$M_{A,j} = (G_j(\Delta_k) - X_j(\Delta_k) \eta_j C) A,$$

$$\bar{M}_{B,i} = [\sqrt{p_{i,0}} M_{B,0}^T \quad \dots \quad \sqrt{p_{i,r}} M_{B,r}^T]^T,$$

$$M_{B,j} = [(G_j(\Delta_k) - X_j(\Delta_k) \eta_j C) B_W - X_j(\Delta_k) \eta_j],$$

$$\Gamma = \gamma_w(\Delta_k) I_{n_w} \oplus \gamma_u(\Delta_k) I_{n_u} \oplus \gamma_v(\Delta_k) I_{n_m}$$

y $B_W = [B_w \quad B_u]$, entonces, definiendo las ganancias del observador como $L_i(\Delta_k) = G_i(\Delta_k)^{-1} X_i(\Delta_k)$, las siguientes afirmaciones son ciertas para todo $\alpha_k \in \Xi$, $\delta_k \in \mathcal{S}$, $\|w\|_{\text{RMS}} \leq \bar{w}_{\text{rms}}$ y $\|v\|_{\text{RMS}} \leq \bar{v}_{\text{rms}}$: (i) en la ausencia de perturbaciones, ruidos de medida y errores de control, el sistema (9) es asintóticamente estable en valor medio; (ii) bajo condiciones iniciales nulas, el error de estimación está acotado por

$$\mathbf{E}\{\|\tilde{x}\|_{\text{RMS}}^2\} < \bar{\gamma}_w \bar{w}_{\text{rms}}^2 + \bar{\gamma}_v \bar{v}_{\text{rms}}^2 + \bar{\gamma}_u, \quad (13)$$

donde

$$\bar{\gamma}_u = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_u(\Delta_k) \delta_k, \quad (14a)$$

$$\bar{\gamma}_\chi = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \gamma_\chi(\Delta_k), \quad \chi = \{w, v\}. \quad (14b)$$

Prueba. Si se cumple (12), entonces $G_j(\Delta_k) + G_j(\Delta_k)^T - P_j(\Delta_k) \succ 0$ y por lo tanto, $G_j(\Delta_k)$ es no singular. Como $P_j(\Delta_k)$ es una matriz simétrica definida positiva, entonces se tiene que $(P_j(\Delta_k) - G_j(\Delta_k)) P_j(\Delta_k)^{-1} (P_j(\Delta_k) - G_j(\Delta_k))^T \succeq 0$, que implica que $G_j(\Delta_k) + G_j(\Delta_k)^T - P_j(\Delta_k) \preceq G_j(\Delta_k) P_j(\Delta_k)^{-1} G_j(\Delta_k)^T$. Definiendo la función de Lyapunov como

$$V_k = V(\tilde{x}_k, \alpha_k, \Delta_{k-1}) = \tilde{x}_k^T P_i(\Delta_{k-1}) \tilde{x}_k$$

para $\alpha_k = \eta_i$ y $i = 0, \dots, r$. Recordando que $X_j(\Delta_k) = G_j(\Delta_k) L_j(\Delta_k)$, aplicando una transformación de congruencia en (12) con $\left(\bigoplus_{j=0}^r G_j(\Delta_k)^{-1}\right) \oplus I \oplus I \oplus I$, aplicando posteriormente complementos de Schur y premultiplicando el resultado por $[\tilde{x}_k^T \quad w_k^T \quad \tilde{u}_k^T \quad v_{k+1}^T]$ y postmultiplicándolo por su transpuesta, se obtiene que

$$\mathbf{E}\{V_{k+1} | \alpha_k = \eta_i\} - V_k + \tilde{x}_k^T \tilde{x}_k - \gamma_w(\Delta_k) w_k^T w_k - \gamma_u(\Delta_k) \tilde{u}_k^T \tilde{u}_k - \gamma_v(\Delta_k) v_{k+1}^T v_{k+1} < 0 \quad (15)$$

para todo $i = 0, \dots, r$ y $\delta_k \in \mathcal{S}$.

(i) En la ausencia de perturbaciones ($w_k = 0$), errores de control ($\tilde{u}_k = 0$) y ruidos de medida

($v_k = 0$), (15) implica $\mathbf{E}\{V_{k+1}|\alpha_k = \eta_i\} - V_k < 0$ para todo $i = 0, \dots, r$ y $\delta_k \in \mathcal{S}$, lo que garantiza la estabilidad asintótica en valor medio. Esto concluye la prueba de la primera afirmación.

(ii) Utilícese $\mathbf{E}\{V_{k+1}|\alpha_k\}$ para denotar $\mathbf{E}\{V_{k+1}|\alpha_k = \eta_i\}$. Tomando valores esperados condicionados a α_{k-1} sobre (15) y recordando que se conoce α_k en el periodo k , se obtiene

$$\mathbf{E}\{V_{k+1}|\alpha_k\} - \mathbf{E}\{V_k\} + \mathbf{E}\{\tilde{x}_k^T \tilde{x}\} - \gamma_w(\Delta_k) \bar{w}_{\text{rms}}^2 - \gamma_u(\Delta_k) \delta_k - \gamma_f(\Delta_k) \Delta f_k^T \Delta f_k - \gamma_v(\Delta_k) \bar{v}_{\text{rms}}^2 < 0 \quad (16)$$

para todo $\alpha_k \in \Xi$ y $\delta_k \in \mathcal{S}$, donde se han considerado las hipótesis hechas sobre w_k y v_k , y que $\delta_k = \mathbf{E}\{\tilde{u}_k^T \tilde{u}_k\}$, $\|w\|_{\text{RMS}}^2 \leq \bar{w}_{\text{rms}}^2$ y $\|v\|_{\text{RMS}}^2 \leq \bar{v}_{\text{rms}}^2$.

En adelante se omite el hecho que las desigualdades se cumplen para todo $\alpha_k \in \Xi$ y $\delta_k \in \mathcal{S}$. Considerando condiciones iniciales nulas ($V_0 = 0$), sumando la expresión (16) desde $k = 0$ hasta $K - 1$, dividiendo el resultado por K y aplicando el límite cuando K tiende a infinito, se obtiene que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{E}\{\tilde{x}_k^T \tilde{x}_k\} < \bar{\gamma}_w \bar{w}_{\text{rms}}^2 + \bar{\gamma}_u + \bar{\gamma}_v \bar{v}_{\text{rms}}^2 \quad (17)$$

donde se ha considerado que $\mathbf{E}\{V_{K+1}|\alpha_K\} > 0$, $\bar{\gamma}_-$ es como se definió en (14) y que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{t=0}^{K-1} (\mathbf{E}\{V_k|\alpha_{k-1}\} - \mathbf{E}\{V_k\}) = 0.$$

Entonces, el resultado (17) lleva directamente a (13), lo que concluye esta prueba. \square

Nótese que las ganancias $\gamma_-(\Delta_k)$ (con $\gamma_- = \{\gamma_w, \gamma_u, \gamma_v, \gamma_f\}$) depende de Δ_k para mejorar la caracterización de la propagación de las perturbaciones, errores de control y ruidos de medida hacia el error de estimación del estado para todo $\delta_k \in \mathcal{S}$.

3.1 Descomposición mediante SOS

Diseñar un observador que cumpla las condiciones del Teorema 1 conlleva la resolución de un problema de dimensión infinita. Para transformar el diseño en uno de dimensión finita, se imponen dependencias polinómicas de δ_k de grado fijo. Así, se consigue una estrategia computacionalmente tratable gracias a la utilización de técnicas basadas en SOS.

Los siguientes lemas extraídos de [2] definen los polinomios de tipo SOS y muestran que

verificar si una matriz polinómica es positiva dentro de un dominio caracterizado por restricciones polinómicas se puede reescribir mediante condiciones suficientes en forma de desigualdades lineales matriciales.

Lema 2. Sea $p(x)$ un polinomio de grado $2d$ en $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $x^{\{d\}}$ un vector con todos los monomios en x de grado menor o igual que d . Entonces, $p(x)$ se dice que es SOS si y solo si existe una matriz semidefinida positiva Q que cumple $p(x) = (x^{\{d\}})^T Q x^{\{d\}}$. El conjunto de polinomios SOS en x se denota por $\Sigma(x)$.

Lema 3. Sea $p(x)$ un polinomio en $x \in \mathbb{R}^n$, y sea $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$. Supóngase que existen polinomios SOS $s_j(x) \in \Sigma(x)$ ($j = 1, \dots, m, x \in \mathbb{R}^n$) que cumplen $p(x) - \sum_{j=1}^m s_j(x) g_j(x) \in \Sigma(x)$, entonces, se cumple la siguiente condición: $p(x) \geq 0, \forall x \in X$.

Lema 4. Sea $P(x) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ una matriz simétrica polinómica en $x \in \mathbb{R}^n$ y $X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$. Supóngase que existen polinomios SOS $s_j(x, v) \in \Sigma(x, v)$ ($j = 1, \dots, m$) que cumplen $v^T P(x) v - \sum_{j=1}^m s_j(x, v) g_j(x) \in \Sigma(x, v)$ con $v \in \mathbb{R}^N$, entonces, se cumple la siguiente condición: $P(x) \succeq 0, \forall x \in X$.

En el siguiente teorema se derivan condiciones suficientes para obtener matrices y funciones paramétricas que garanticen las propiedades descritas en el Teorema 1. Se utilizará $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \Delta_1 = [\delta_1 \ \delta_2]^T$ y $\Delta_2 = [\delta_2 \ \delta_3]^T$ para denotar variables SOS independientes que representan los posibles valores de $\delta_k, \delta_{k-1}, \delta_{k-2}, \Delta_k$ y Δ_{k-1} respectivamente, donde $\delta_k \in \mathcal{S}$ para todo k .

Teorema 2. Si existen matrices simétricas polinómicas

$$P_i(\Delta_1) = \left(\Delta_1^{\{d_P\}} \otimes I_n \right)^T P_i \left(\Delta_1^{\{d_P\}} \otimes I_n \right),$$

$$P_i(\Delta_2) = \left(\Delta_2^{\{d_P\}} \otimes I_n \right)^T P_i \left(\Delta_2^{\{d_P\}} \otimes I_n \right)$$

con matrices simétricas reales P_i for $i = 0, \dots, r$, matrices polinómicas

$$G_i(\Delta_1) = G_i \left(\Delta_1^{\{d_G\}} \otimes I_n \right),$$

$$X_i(\Delta_1) = X_i \left(\Delta_1^{\{d_P\}} \otimes I_{n_m} \right)$$

con matrices reales G_i y X_i , y funciones polinómicas

$$\gamma_w(\Delta_1) = \gamma_w^T \Delta_1^{\{d_\gamma\}}, \quad \gamma_u(\Delta_1) = \gamma_u^T \Delta_1^{\{d_\gamma-1\}},$$

$$\gamma_v(\Delta_1) = \gamma_v^T \Delta_1^{\{d_\gamma\}}$$

con vectores reales γ_w, γ_u y γ_v , donde $2d_P, d_G, d_X, d_\gamma, d_\gamma - 1$ y d_f son los grados de

los respectivos polinomios, de tal manera que se cumplan las siguientes restricciones

$$\mu^T P_i(\Delta_1) \mu - s_{P1,i} h_1 - s_{P2,i} h_2 \in \Sigma(\Delta_1, \mu), \quad (18a)$$

$$s_{P1,i} \in \Sigma(\delta_1, \mu), \quad s_{P2,i} \in \Sigma(\delta_2, \mu), \quad (18b)$$

$$\nu^T \Upsilon_i(\Delta_1, \Delta_2) \nu - s_{\Upsilon1,i} h_1 - s_{\Upsilon2,i} h_2 - s_{\Upsilon3,i} h_3 \in \Sigma(\Delta_1, \Delta_2, \nu), \quad (18c)$$

$$s_{\Upsilon1,i} \in \Sigma(\delta_1, \nu), \quad s_{\Upsilon2,i} \in \Sigma(\delta_2, \nu), \quad s_{\Upsilon3,i} \in \Sigma(\delta_3, \nu), \quad (18d)$$

$$\gamma_j(\Delta_1) - s_{j1} h_1 - s_{j2} h_2 \in \Sigma(\Delta_1), \quad (18e)$$

$$s_{j1} \in \Sigma(\delta_1), \quad s_{j2} \in \Sigma(\delta_2), \quad j = \{w, u, f, v\}, \quad (18f)$$

para $i = 0, \dots, r$ con $\Upsilon_i(\cdot)$ como se definió en (12), μ y ν vectores reales de las dimensiones correspondientes, y

$$h_m = \delta_m (\bar{\delta} - \delta_m), \quad m \in \{1, 2, 3\}, \quad (19)$$

entonces, se cumplen las condiciones del Teorema 1.

Prueba. Nótese en primer lugar que el conjunto \mathcal{S} se reescribe utilizando su correspondiente restricción polinómica tal y que $\mathcal{S} = \{\delta_m : h_m \geq 0\}$, véase (19). En segundo lugar, por el Lema 3 y Lema 4, las condiciones (18c) y (18d) aseguran la positividad de $\Upsilon_i(\Delta_1, \Delta_2)$ para cualquier $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathcal{S}$, cosa que garantiza (12) en el Teorema 1. De manera análoga, las condiciones (18a), (18b), (18e) y (18f) garantizan la positividad de $P_i(\Delta_1)$, $\gamma_w(\Delta_1)$, $\gamma_u(\Delta_1)$, y $\gamma_v(\Delta_1)$ para cualquier $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{S}$, tal y como se requería en el Teorema 1. \square

En el problema de factibilidad previo basado en SOS, μ y ν son vectores de escalado empleados para convertir matrices polinómicas en polinomios (véase Lema 4). La variables de decisión del problema son las matrices P_i , G_i , X_i , γ_w , γ_u y γ_v ; a la par que los coeficientes de los polinomios SOS s_{\cdot} en (18). Se propone seleccionar el grado de estos polinomios de tal forma que se tenga el mismo grado de cada variable en la correspondiente expresión SOS. Fijando d_P , d_G , d_X , y d_γ se puede obtener lo anteriormente mencionado imponiendo para todo $j = 1, 2$ y $i = 0, \dots, r$ que

$$\deg s_{Pj,i} = \deg \left\{ \delta_j^{\max\{2d_P-2, 0\}}, \mu^2 \right\},$$

$$\deg s_{\Upsilon j,i} = \deg \left\{ \delta_j^{\max\{2d_P-2, d_G-2, d_X-2, 0\}}, \nu^2 \right\},$$

$$\deg s_{\Upsilon 3,i} = \deg \left\{ \delta_j^{\max\{2d_P-2, 0\}}, \nu^2 \right\},$$

$$\deg s_{wj} = \deg s_{vj}(\delta_j) = \deg \delta_j^{\max\{d_\gamma-2, 0\}},$$

$$\deg s_{uj} = \deg \delta_j^{\max\{d_\gamma-3, 0\}}$$

donde \deg es la función que devuelve el máximo grado para cada polinomio.

3.2 Problema de optimización

Minimizar el error de estimación conlleva lidiar con la minimización de la función (véase (13)):

$$J(\Delta_k) = \gamma_w(\Delta_k) \bar{w}_{\text{rms}}^2 + \gamma_v(\Delta_k) v_{\text{rms}}^2 + \gamma_u(\Delta_k) \delta_k$$

sujeto a (18). Una solución a este problema consistiría en minimizar una cota superior de $J(\Delta_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\delta_k \in \mathcal{S}$. Esto conllevaría la obtención del observador con las prestaciones de estimación para el peor caso (solución robusta).

Con el objetivo de obtener resultados menos conservadores, se plantea una optimización paramétrica donde se minimice el valor óptimo de la función de coste $J(\Delta_k)$ en función del parámetro $\delta_k \in \mathcal{S}$ asegurando a su vez (18) para todo $\delta_k \in \mathcal{S}$ (robustez). Para resolver este problema (y teniendo en cuenta la formulación SOS) se propone introducir una función de peso $g(\Delta_1)$ de tal forma que

$$\bar{J} = \int_{\mathcal{S} \times \mathcal{S}} g(\Delta_1) J(\Delta_1) d\Delta_1. \quad (20)$$

Entonces, el problema de optimización paramétrico se reescribe tal que

$$\begin{aligned} &\text{minimiza } \bar{J} \\ &\text{sujeto a } (18) \end{aligned} \quad (21)$$

obteniendo así el observador que minimiza la norma RMS del error de estimación del estado bajo la función de peso $g(\Delta_1)$.

Nota 4. Una elección razonable para $g(\Delta_1)$ es aquella que considera el escenario donde δ_k es invariante en el tiempo (acción de control constante o en forma de rampa, véase (7)), es decir, $\delta_1 = \delta_2$, y donde todos los posibles valores de $0 \leq \delta_k \leq \bar{\delta}$ tienen el mismo peso (es decir, se asume que los valores tienen idéntica ocurrencia). Así, $g(\Delta_1)$ sería de la siguiente forma:

$$g(\Delta_1) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\delta}} & \text{if } \delta_2 = \delta_1 \text{ and } 0 \leq \delta_1 \leq \bar{\delta}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \quad (22)$$

\square

4 Ejemplo

Para facilitar el análisis, se propone estudiar el siguiente sistema definido por las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.11 \\ 0.11 & 0.97 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.6 \end{bmatrix}, \quad C = [0.18 \quad 0.8],$$

donde sólo hay una salida. La perturbación del estado y el ruido de medida son tienen media nula y norma RMS acotada por

$$w_{\text{rms}} = 0.05, \quad v_{\text{rms}} = 0.01.$$

Se asume que la ley de control viene dada por

$$u_k = 2.7 \sin(k/11).$$

La matriz de probabilidades de transición asociada al escenario de medición tiene los siguientes parámetros: $q^y = 0.8$ y $p^y = 0.3$ (véase Nota 1). El proceso de pérdida de acciones de control sigue una versión truncada de una cadena de Markov con parámetros $q^u = 0.5$, $p^u = 0.4$ y $N^u = 6$ (véase Nota 2). Teniendo en cuenta esto, la probabilidad de estar aplicando la acción de control transmitida $\tau - 1$ periodos anteriormente es

$$\varphi = [0.668 \ 0.2 \ 0.08 \ 0.032 \ 0.0128 \ 0.005 \ 0.002],$$

donde $\varphi = [\varphi_0 \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4 \ \varphi_5 \ \varphi_6]$. Asíumase que en el peor caso δ_k está acotado por $0 \leq \delta_k \leq 0.1$ para todo k , es decir, $\bar{\delta} = 0.1$.

En este ejemplo se analizan las prestaciones del observador con planificación de ganancias propuesto usando polinomios de grado 2 ($d_P = 1$, $d_G = d_X = d_\gamma = 2$) y la función de peso en (22) (véase Sección 3), y del observador resultante de imponer polinomios de grado 0 ($d_P = d_G = d_X = d_\gamma = 0$), es decir, cuando las ganancias no dependen de δ_k . Ambos observadores se calculan utilizando la herramienta YALMIP [8].

En la Figura 1 se muestra como las ganancias se adaptan a δ_k cuando éste es invariante en el tiempo, es decir, cuando $\delta_k = \delta_{k-1} = \delta_1$. Nótese que en el caso donde la ganancia del observador depende de δ_k , ésta varía hasta un 30% para valores de δ_1 entre 0 y 0.1.

La Figura 2 recoge los datos obtenido tras simular el comportamiento de los observadores diseñados. Se puede observar que en los periodos en los que el error de control es pequeño, el observador con planificación de ganancias con polinomios de orden 2 desempeña mejores prestaciones que el que no depende de δ_k . Cuando el error de control está próximo a su máximo, ambas soluciones estiman con prestaciones similares. Esto se podría haber predicho analizando la Figura 1 puesto que las ganancias para ambos diseños tienen valores similares cuando el error se acerca a su cota superior.

5 Conclusión

En el presente trabajo se ha estudiado el problema de estimación remota con pérdidas de mediciones

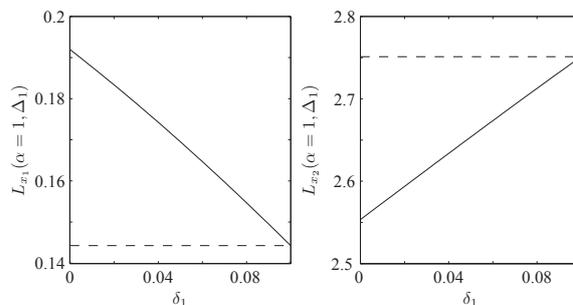


Figura 1: Ganancias del observador en función δ_1 , con polinomios de segundo grado (línea continua) y cero grado (línea discontinua).

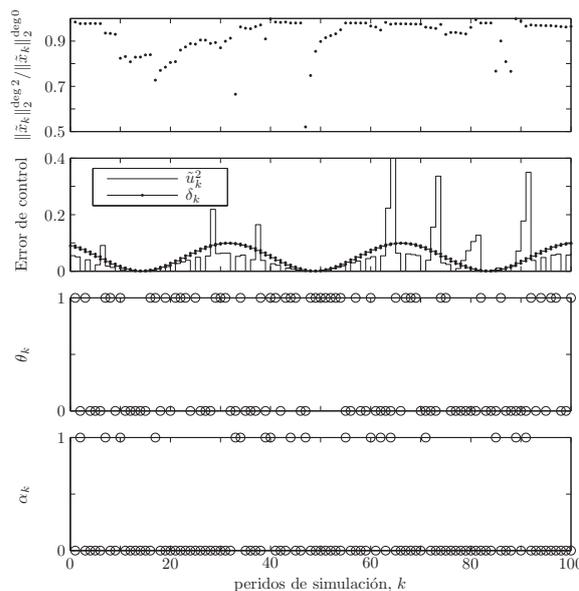


Figura 2: Prestaciones de estimación del estado en simulación frente a pérdidas de acciones de control y mediciones.

y acciones de control sin acuse de recibo. Se ha utilizado una cadena de Markov para caracterizar el escenario de medición y se ha descrito el error de control existente entre la acción de control aplicada en el proceso y el observador. Se ha propuesto la introducción de una nueva perturbación desconocida para tratar el problema de la incertidumbre de control. Así, se ha relacionado la ganancia del observador tanto con el escenario de medición como con el valor que toma en tiempo real un estadístico de el error de control. Finalmente, se ha probado mediante el ejemplo que la propuesta realizada da las mismas prestaciones de estimación que en el caso de utilizar ganancias invariantes (polinomios de grado 0) cuando el error de control es máximo, pero estima con un error menor siempre que el error de control sea inferior.

La evolución natural de este trabajo sería el diseño de controladores inferenciales bajo el mismo paradigma considerado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el proyecto del MICINN con referencia DPI2011-27845-C02-0 y por la beca PREDOC/2011/37 de la *Universitat Jaume I*.

Referencias

- [1] R. Blind and F. Allgöwer. Estimating the fates of the control packets for Networked Control Systems with loss of control and measurement packets. In *48th IEEE Conf. Decis. Control*, pages 2687–2692, 2009.
- [2] G. Chesi. LMI techniques for optimization over polynomials in control: a survey. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55(11):2500–2510, 2010.
- [3] D. Dolz, I. Peñarrocha, and R. Sanchis. Jump state estimation with multiple sensors with packet dropping and delaying channels. *Int. J. Syst. Sci.*, 2014.
- [4] M. Epstein and R. M. Murray. Estimation schemes for networked control systems using UDP-like communication. In *46th IEEE Conf. Decis. Control*, pages 3945–3951, 2007.
- [5] E. Garone, B. Sinopoli, A. Goldsmith, and A. Casavola. LQG control for mimo systems over multiple erasure channels with perfect acknowledgment. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(2):450–456, 2012.
- [6] R. A. Gupta and M.-Y. Chow. Networked control system: overview and research trends. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 57(7):2527–2535, 2010.
- [7] J. P. Hespanha and P. Naghshtabrizi. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), 2007.
- [8] J. Löfberg. Pre-and post-processing sum-of-squares programs in practice. *IEEE Trans. Autom. Control*, 54(5):1007–1011, 2009.
- [9] M. Moayed, Y.K. Foo, and Y.C. Soh. Networked LQG control over unreliable channels. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 23(2):167–189, 2013.
- [10] I. Peñarrocha, D. Dolz, N. Aparicio, and R. Sanchis. Synthesis of nonlinear controller for wind turbines stability when providing grid support. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2013.
- [11] I. Peñarrocha, D. Dolz, and R. Sanchis. A polynomial approach for observer design in networked control systems with unknown packet dropout rate. In *52nd IEEE Conf. Decis. Control*, pages 5933–5938, 2013.
- [12] I. Peñarrocha, D. Dolz, and R. Sanchis. Inferential networked H_∞ control with accessibility constraints in both the sensor and actuator channels. *Int. J. Syst. Sci.*, 45(5):1180–1195, 2014.
- [13] L. Schenato, B. Sinopoli, M. Franceschetti, K. Poolla, and S. S. Sastry. Foundations of control and estimation over lossy networks. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):163–187, 2007.
- [14] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M. I. Jordan, and S. S. Sastry. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49(9):1453–1464, 2004.
- [15] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, and S. Sastry. Optimal linear LQG control over lossy networks without packet acknowledgment. *Asian J. Control*, 10(1):3–13, 2008.
- [16] S. C. Smith and P. Seiler. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 48(12):2163–2171, 2003.
- [17] D. Wang, J. Wang, and W. Wang. H_∞ controller design of networked control systems with markov packet dropouts. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, 43(3):689–697, 2013.
- [18] Y. Wang, H. Ye, S. X. Ding, G. Wang, and D. Zhou. Residual generation and evaluation of networked control systems subject to random packet dropout. *Automatica*, 45(10):2427–2434, 2009.
- [19] F. Wu and S. Prajna. SOS-based solution approach to polynomial LPV system analysis and synthesis problems. *Int. J. Control*, 78(8):600–611, 2005.
- [20] J.-T. Yu and L.-C. Fu. An optimal compensation framework for linear quadratic gaussian control over lossy networks. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2015.