

2012 · UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBA

Matematika II

- BATXILERGOA
- LANBIDE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA-ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak



EUSKAMPUS

Nazioarteko Bikaintasun Campus
Campus de Excelencia Internacional

en la red de



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jarri behar duzula.***

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

***Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.***

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 ariketa

Sistema hau emanda:

$$\begin{cases} (m-1)x + y + z = m \\ x + (m-1)y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

- Eztabaidatu ezazu m parametroaren balioaren arabera.
- Ebatz ezazu, ahal bada, $m = 0$ eta $m = 3$ kasuetarako.

A2 ariketa

$A(-1, 3, 2)$, $B(2, -1, -1)$ eta $C(a - 2, 7, b)$ puntuak emanda:

- Kalkula itzazu a eta b parametroen balioak puntu horiek lerrokatuta egon daitezzen.
- Aurreko atalean kalkulaturako balioetarako, aurkitu ezazu $P(0, -3, 5)$ puntutik pasatzen den eta AC bektorearen perpendikularra den planoaren ekuazioa.

A3 ariketa

Har dezagun $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ funtzioa:

- Kalkula itzazu A , B eta C parametroen balioak f -ren grafikoa $(1, 1)$ puntutik pasa dadin, $x = -4$ balioan maximo bat izan dezan eta $x = 0$ balioan ukitzeaile horizontal bat izan dezan.
- Kalkula itzazu funtzioaren mutur erlatiboak eta goratze- eta beheratze-tarteak, eta marraztu ezazu funtzioaren grafikoa.

A4 ariketa

Kalkula ezazu integral hau:

$$\int \frac{5x - 2}{x^2 - 4} dx .$$

A5 ariketa

Zenbaki palindromo (edo kapikua) deritzo notazio hamartarrean idatzita egonik eskuinetik ezkerrera eta ezkerretik eskuinera berdin irakurtzen den zenbaki oso eta positiboari; adibidez, 232 eta 8778 zenbakiak palindromoak dira.

Kalkula ezazu zenbat zenbaki palindromo dauden 100.000 baino txikiagoak.

B AUKERA

B1 ariketa

Izan bitez $B = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$ matrizea eta $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ unitate matrizea.

- Kalkula ezazu m -ren zer balioetarako betetzen den hau: $B^2 = 2B + I$.
- Kalkula ezazu B -ren alderantzizko matrizea aurreko ataleko m -ren balioetarako.

B2 ariketa

$3x + 4y + 5z = 0$, $2x + y + z = 0$ planoak eta $A(-1, 2, 1)$ puntua izanik:

- Kalkula ezazu A puntutik eta aurreko bi planoen arteko ebakidura-zuzenetik pasatzen den plano.
- Kalkula ezazu plano bat $B(0, 0, -3)$ puntutik pasatzen dena eta aurreko ataleko planoaren paraleloa dena.

B3 ariketa

Denda batean olio saltzen da 2 euroan litroa. x litro saltzen direnean, era guztietako kostuak (eurotan adieraziak) hauek dira: $0,5x + Cx^2$. Eta badakigu 750 litro saltzen direnean lortzen dela etekin maximoa. Aurkitu itzazu C -ren balioa eta lortutako etekin maximoa.

B4 ariketa

Hiru funtzio hauek emanda: $f(x) = x$; $g(x) = x^2$; $h(x) = x^2 / 4$

- Marraztu ezazu hiru funtzioen grafikoek mugatutako esparru finitua.
- Kalkula ezazu esparru horren azalera.

B5 ariketa

Zenbaki arrunten segidan:

1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11,12, 13,14,...

5en lehenengo 40 multiploak ezabatzen badira, beste segida bat sortzen da. Kalkula ezazu segida berriaren lehenengo 160 terminoen batura.



MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa guztira 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik egonez gero).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, eta abar, ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, eta abar.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDEAK

A AUKERA

A1 ariketa (2 puntu)

- a) Sistemaren eztabaidak, gehienez, 1,25 puntuko balioa izango du.
- b) Adierazten diren kasuen ebazpen osoak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.

A2 ariketa (2 puntu)

Ataletariko bakoitzak, gehienez, puntu bateko balioa du.

A3 ariketa (2 puntu)

- a) A, B eta C zuzen kalkulatzek, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- b) Goratze- eta beheratze-tarteak kalkulatzek, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- c) Azkenik, kurba marrazteak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.

A4 ariketa (2 puntu)

Integrala zuzen lortzeko, gehienez, puntu bateko balio du.

A5 ariketa (2 puntu)

Probleman puntuak lortzeko, hau hartuko da kontuan:

- Egoera argitzeko azalpen on bat emateak (eskema, taula, zenbaki palindromoak antolatzea: bat, bi, hiru, lau eta bost zifrakoak), gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- Problemaren ebazpena zuzen kalkulatzek, gehienez, 1,25 puntuko balioa du.



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

B AUKERA

B1 ariketa (2 puntu)

- a) m parametroa zuzen lortzeak eta haren eztabaidak, gehienez, 1,25 puntuko balioa izango du.
- b) Alderantzizko matrizea lortzeak, bi kasuetan, 0,75eko balioa du gehienez.

B2 ariketa (2 puntu)

Ataletariko bakoitzak, gehienez, puntu bateko balioa du.

B3 ariketa (2 puntu)

- Salmenten araberako etekinaren formula lortzeak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
- C salmenten kalkuluaren planteamenduak, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
- C-ren kalkulari eta etekin maximoaren kalkulari, bakoitzari, 0,5 puntuko balioa emango zaio gehienez.

B4 ariketa (2 puntu)

- a) Hiru grafikoen ebaketa-puntuak kalkulatzek, gehienez, 0,5 puntuko balioa du.
- b) Esparrua eta hiru funtzioen grafikoak marrazteak, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- c) Dagokion integral mugatua aplikatuz eskatutako esparruaren azalera kalkulatzek, gehienez, 0,75 puntuko balioa du.

B5 ariketa (2 puntu)

- Egoera argitzeko azalpen on bat emateak (zer termino batu behar diren adieraziz...), gehienez, 0,75 puntuko balioa du.
- Problemaren ebazpena zuzen kalkulatzek, gehienez, 1,25 puntuko balioa du.



EBAZPENAK

A AUKERA

A1 ariketa

a) Koefiziente-matrizearen determinantea $(m-2)(m-1)$ da; beraz, $m \neq 1$ eta $m \neq 2$ denean, sistema bateragarri determinatua da.

- $m = 1$ denean, matrizearen eta matrize zabalduaren heina 2 da; beraz, sistema bateragarri indeterminatua da.
- $m = 2$ denean, koefiziente-matrizearen heina 2 da, eta matrize zabalduarena 3; beraz, sistema bateraezina da, kasu horretan.

b) $m = 0$ denean, hau da soluzioa: $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. $m = 3$ denean, hau da soluzioa: $(x, y, z) = (1, -2, 3)$.

A2 ariketa

a) AB eta AC bektoreek proportzionalak izan behar dute; hau da, m -ren balio erreal bat existitu behar du, hau beteko duena:

$$m(3, -4; -3) = (a - 1, 4, b - 2)$$

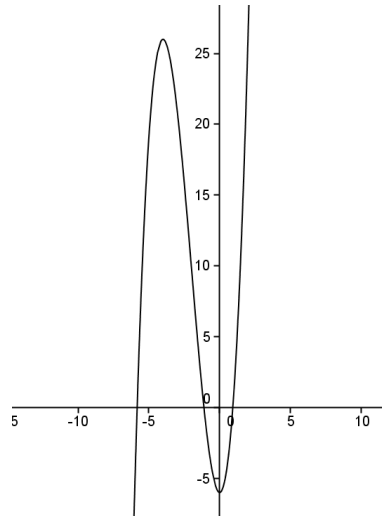
Hortik ateratzen da $m = -1$ dela eta, datu horrekin, $a = -2$ eta $b = 5$ direla.

b) AC bektorea $v = (-3, 4, 3)$ da, eta planoaren ekuazioa hau: $-3x + 4y + 3z + D = 0$. Orain, P puntua planoan dagoelako baldintza ezarri behar da, eta, hala, $D = -3$ lortzen da; horrenbestez, planoak ekuazio hau betetzen du: $-3x + 4y + 3z - 3 = 0$.

A3 ariketa

a) Lehen baldintzaren arabera, $1 = 1 + A + B + C$. Beste bi baldintzen arabera, deribatua zero da $x = -4$ eta $x = 0$ puntuetan. Hortik, hau ateratzen da: $48 - 8A + B = 0$ eta $B = 0$. Horiek ebatzita, balio hauek lortzen dira: $A = 6$, $B = 0$ eta $C = -6$.

b) Funtzioa $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$ da. Lehen deribatua $f'(x) = 3x(x+4)$ da, eta bigarrena, berriz, $f''(x) = 6(x+2)$. Hala lortzen da $x = -4$ balioari maximo bat dagokiola, eta $x = 0$ balioari minimo bat. Funtzioa gorakorra da $(-\infty, -4)$ denean, beherakorra da $(-4, 0)$ denean, eta gorakorra da $(0, \infty)$ denean.



A4 ariketa

Integral hau kalkulatzeko, zuzenean deskonposatu behar da funtzioa frakzio sinpletan. Hau lortzen da:

$$\int \frac{5x-2}{x^2-4} dx = 3 \ln(x+2) + 2 \ln(x-2) + C$$

A5 ariketa

Zifra batekoak 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 eta 9 dira, alegia, guztira 9. Bi zifraoak ere 9 dira. Hiru zifraoetarako, 0-9 bitarteko digituak erabil daitezke erdiko zifran, eta 1etik 9rakoak lehenbiziko zifran; beraz, hiru zifraoak 90 dira, eta badira, halaber, lau zifrao 90. Azkenik, bost zifraoak 900 dira. Eta guztira:

$$9 + 9 + 90 + 90 + 900 = 1098.$$



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

B AUKERA

B1 ariketa

a) Hauek kalkulatu behar dira:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2+2m+m^2 & 2 \\ 2 & 2-2m+m^2 \end{pmatrix} \text{ eta } 2B + I = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

Bi matrizeen berdintzarekin, hau lortzen da: $m^2 - 1 = 0$, eta hortik, $m = 1$ eta $m = -1$.

b) $m = 1$ denean, hau da alderantzizko matrizea:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$m = -1$ denean, berriz, hau da alderantzizko matrizea:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B2 ariketa

a) Problema ebazteko, zenbait modu daude; haietako bat plano sorta bat erabiltzea da. Aurkitu nahi dugun plano sorta honetakoa izango da:

$$3x + 4y + 5z + m(2x + y + z) = 0$$

$A(-1, 2, 1)$ puntutik pasatu beharra ezarriz gero, $m = -10$ da. Beraz, plano $17x + 6y + 5z = 0$ da.

b) Paraleloa denez, ekuazioa $17x + 6y + 5z + C = 0$ izango da; gainera, $B(0, 0, -3)$ puntua daukanez, $-15 + C = 0$ bete behar da; beraz, $C = 15$. Horrenbestez, hau da eskatutako plano: $17x + 6y + 5z = -15$

B3 ariketa

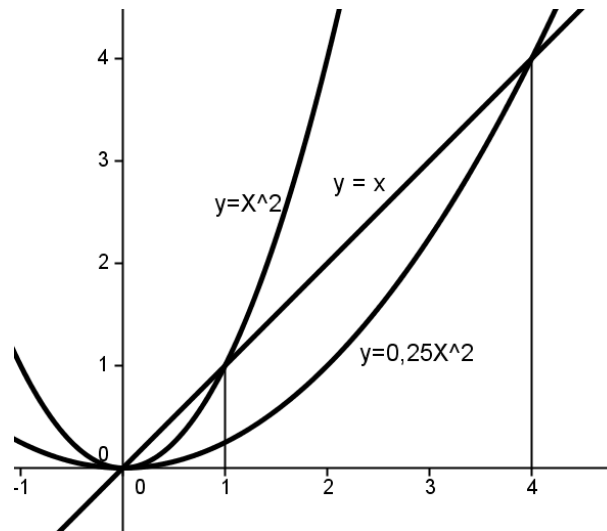
Salmentaren diru-sarrerari kostuak kenduta kalkulatu da irabazia. x litro saltzen badira, diru-sarrera hauek lortzen dira: $B(x) = 2x - (0,5x + Cx^2)$. Funtzio horren lehen deribatua hau da:

$$B'(x) = 1,5 - 2Cx.$$

Ematen diren datuen arabera, zero izan behar du $x = 750$ denean. Hau da: $C = 1/1.000$. C -ren balio horretarako, $B(750) = 562,5$ euro da.

B4 ariketa

a) Hiru funtzioen irudia nahikoa adierazgarria da.



Grafikoen arteko ebakitze-puntuak ebartziz, egiazta daiteke zuzenak eta g parabolak $x = 1$ puntuan ebakitzen dutela elkar, eta zuzenak eta h parabolak, berriz, $x = 4$ puntuan. Puntu horiek mugatzen dute kalkulatu beharreko esparrua.

b) Azalera honela kalkulatu da:

$$\int_0^1 (x^2 - 0,25x^2) dx + \int_1^4 (x - 0,25x^2) dx = \frac{3}{12} + \frac{27}{12} = \frac{30}{12} = \frac{10}{4}$$

B5 ariketa

Guztira, lehenbiziko 200 zenbaki naturalatik 5en 40 multiploak kentzen dira. Beraz, lehenbiziko 200 zenbaki naturalen baturari bosten lehenengo 40 multiploen batura kendu behar zaio. Beraz, hau da eskatutako baturaren emaitza:

$$\text{Batura} = \frac{(200)(201)}{2} - 5 \frac{(40)(41)}{2} = 16.000$$