PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD · 2015

Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

Examen

Criterios de Corrección y Calificación

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
NAZIOARTEKO BIKAINTASUN CAMPUSA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

www.ehu.es

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 10$. Calcular de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor de los siguientes determinantes:

A = $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$ B = $\begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}$

Ejercicio A2

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(-1, 2, 3) y es paralelo a los vectores a(-1, -2, -3) y b(1, 3, 5).

b) Calcular el valor de m para que el plano calculado en el apartado anterior y el plano $mx - y + 5z = 8$ sean perpendiculares.

Ejercicio A3

Dado el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Determinar los coeficientes a, b y c sabiendo que tiene extremos relativos en $x = -1$ y en $x = 1$ y que además pasa por el origen de coordenadas.

b) Estudiar la naturaleza de ambos extremos relativos (si son máximos o mínimos) y realizar un dibujo aproximado del polinomio.

Ejercicio A4

Dibujar la región encerrada entre las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 1$ y $g(x) = -x^2 + 5$ y calcular el área de dicho recinto

Ejercicio A5

Con los dígitos 2 y 3 ¿Cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$x + y - z = -4$$
$$3x + ay + z = a - 1$$
$$2x + ay = -2$$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resolver el sistema en el caso o casos de indeterminación.
c) ¿Existe algún valor de a tal que el sistema no tenga solución? Razona la respuesta.

Ejercicio B2

Encontrar la recta que tiene como vector director el vector v (1, 2, 3) y pasa por el punto por el punto P', siendo P' el punto simétrico del punto P(0,-2,0) respecto al plano $\pi : \mathrm{x} + 3\mathrm{y} + \mathrm{z} = 5$.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$

a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.
b) Calcula los extremos relativos de f (máximos y mínimos).

Ejercicio B4

Calcular el valor de la siguiente integral definida:

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$$

Ejercicio B5

Escribimos en orden creciente 250 múltiplos seguidos del 5 comenzando por el 50. Ahora suprimimos los 90 primeros números ¿Cuánto vale la suma de los restantes números?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)
- Resolución y discusión de cada determinante aplicando las oportunas propiedades. de manera adecuada (1 punto cada apartado)

Problema A.2 (2 puntos)
- Planteamiento del problema y obtención del plano de manera correcta (1 punto)
- Obtención del valor m de manera correcta(1 punto)

Problema A.3 (2 puntos)
- Obtención de los tres parámetros imponiendo las condiciones (1 punto)
- Estudio de la naturaleza de los extremos y dibujo aproximado de la función (1 punto)

Problema A. 4 (2 puntos)
Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:
- Dibujo de las dos parábolas y obtención del recinto(1 punto)
- Cálculo del área del recinto aplicando la regla de Barrow(1punto)

Problema A.5 (2 puntos)
- Obtención del resultado, utilizando bien el diagtrama en árbol, por medio de una tabla, ensayo-error u otro medio constructivo (2 puntos).

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)

- Resolución y discusión del determinante de la matriz del sistema de manera adecuada (0.75 puntos)
- Resolución para el caso de indeterminación a= 1 (0.75 puntos)
- Decir claramente que el sistema tiene siempre solución para cualquier valor de a(0.5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)

- Planteamiento del problema y obtención del punto P´(simétrico del P) respecto al plano. (1.5 puntos)
- Obtención de la recta que pasa por P´y tiene el vector director dado (0.5 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)

- Obtención de la derivada de la función (0.5 puntos)
- Obtención de los intervalos de crecimiento(0.75 puntos)
- Cálculo de los extremos, bien por la segunda derivada o por el cambio de signo de la primera derivada (0,75 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)

- Cálculo integral indefinida, aplicando el método por partes (1,5 puntos)
- Cálculo de la integral definida(0,5 puntos)

Problema B.5 (2 puntos)

- Planteamiento del problema, y resolución del mismo aplicando procedimienros algebraicos u otros (2 puntos)

SOLUCIONES

Problema A.1.

$$A=\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}\right)=2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$$

$$=2\cdot\left(\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}\right)=-2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=-2\cdot 10=-20$$

$$B=\begin{vmatrix} 3p & 3q & 3r \\ 2a & 2b & 2c \\ -x & -y & -z \end{vmatrix}=3.2(-1)\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix} p & q & r \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=-(-1)(-6)\begin{vmatrix} a & b & b \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=6.10=60$$

Problema A.2.

c) El vector normal al plano es el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Dicho vector es : $\boldsymbol{a}$ **x** $\boldsymbol{b}$ = (-1, 2, -1). Por tanto el plano pedido tiene por ecuación

$$-1(x+1)+2(y-2)-1(z-3) = 0.$$

Desarrollando obtenemos: $-x+2y-z = 2$

d) Para que los dos planos sean perpendiculares se ha de verificar que el producto escalar de sus vectores normales sea igual a cero. Por tanto:

$$m.(-1)+(-1).2 + 5(-1) = 0.$$

Resolviendo m = -7

Problema A.3.

a) $P(x)=x^3+ax^2+bx+c \quad\Rightarrow\quad P'(x)=3x^2+2ax+b$

Por ser $x=-1$ extremo relativo $\quad P'(-1)=0 \;\Rightarrow\; 3-2a+b=0$

Por ser $x=1$ extremo relativo $\quad P'(1)=0 \;\Rightarrow\; 3+2a+b=0$

Resolviendo estas dos ecuaciones obtenemos a = 0 y b = -3. Como además la función polinómica pasa por el origen de coordenadas: $P(0)=0 \;\Rightarrow\; c=0$

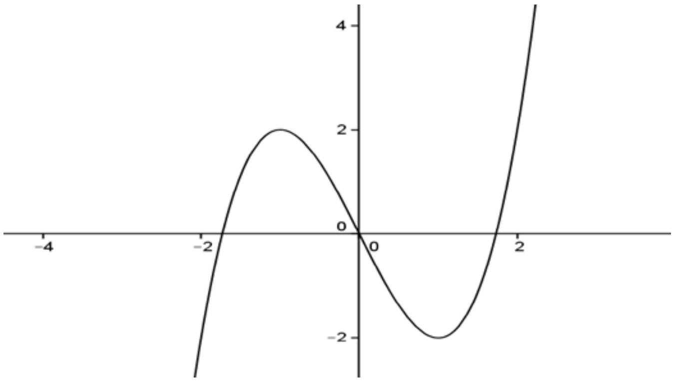
Por tanto, el polinomio buscado es $P(x)$= x^3-3x .

b) Según sabemos la naturaleza de los extremos (máximo o mínimo) depende del signo de la segunda derivada: $P''(x)=6x$.

$P''(-1)=-6<0 \;\Rightarrow$ en $x=-1$ la función tiene un máximo relativo

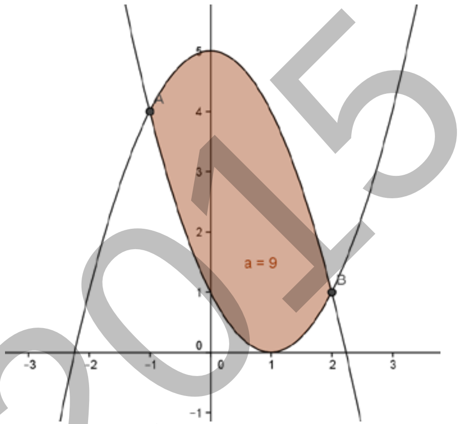
$P''(1) = 6 > 0 \;\Rightarrow$ en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo.

La gráfica de $P(x)$ es :



Problema A.4.

El recinto es :

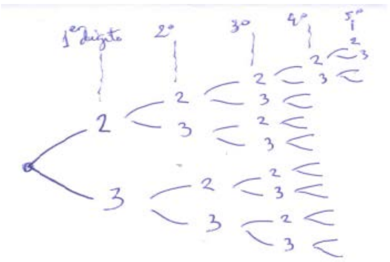


Las dos parábolas se cortan en los puntos x = -1 y x = 2. El área será entonces:

$$\int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2+5\right)-\left(x^2-2x+1\right)-\right] dx = \left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^{2} = 9$$

Problema A.5.

Es claro que el primer dígito puede ser 2 o 3, siendo el primer dígito 2 el segundo dígito puede ser 2 o 3 y así sucesivamente hasta las cinco cifras. El diagrama es suficientemente explicativo:



En total existirán $2^5 = 32$ números distintos

Problema B.1.

a) El determinante del sistema es igual a: $|A| = -2a + 2$. Por tanto para a = 1 el valor del determinante será igual a cero.
Si $a \neq 1$ el sistema será compatible determinado, ya que el rango de la matriz es igual a 3, y coincide con el rango de la matriz ampliada y con el número de incógnitas.
Para a = 1, se puede comprobar que el rango de la matriz y el de su ampliada coinciden, tomando el valor 2, siendo este valor menor que el número de incógnitas. Por tanto el sistema es compatible indeterminado.
b) Para a =1, como hemos visto es compatible indeterminado, el sistema será:

$$x + y - z = -4$$
$$3x + y + z = 0$$

Resolviendo (2-z, -6+2z, z), para $z \in R$
Como hemos visto de la discusión correspondiente al apartado a) no hay valores del parámetro a para los cuales no hay solución.

Problema B2.

En primer lugar calculamos el punto P' (simétrico de P respecto al plano):
El vector $\vec{n} = (1, 3, 1)$ es normal al plano. Las ecuaciones paramétricas de la recta PP' (que pasa por P y tiene a $\vec{n}$ como vector direccional) son:

$$\left.\begin{array}{r} x = t \\ y = -2 + 3t \\ z = t \end{array}\right\}$$

El punto A, intersección de la recta y el plano, se obtiene resolviendo la ecuación:

$$t + 3(-2 + 3t) + t = 5$$

Resolviendo t= 1 y por tanto A(1,1, 1). Puesto que A es el punto medio del segmento PP', obtenemos que $P'(2,4,2)$. Para finalizar podemos escribir la ecuación de la recta pedida:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{3}$$

Problema B3.

a) La primera derivada de f es,

$$f' = -e^x (x-1)(x + \frac{3}{2}) .$$

Igualando a cero obtenemos dos valores x = 1 ; x = -3/2. Como e^x es siempre positivo estudiaremos el signo de

$$-(x-1)(x + \frac{3}{2})$$

x en	$(-\infty, -3/2)$	$(-3/2, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de f'	negativo	positivo	negativo

Crecimiento	Decreciente	Creciente	Decreciente

b) El mínimo se alcanza en el punto $A\ (-3/2, -9e^{-\frac{3}{2}})$ y el máximo en B (1, e)

Problema B4..

La resolveremos utilizando el método de integración por partes y aplicando posteriormente la regla de Barrow

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} (\ln(x) - \frac{1}{3}) \right]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Problema B5.

La suma de los 250 primeros números es:

50+55+60+⋯⋯+ 1295= 168.125,

mientras que la suma de los 90 primeros sumandos es:

50+55+60+⋯+495 = 24.525.

Por tanto la suma pedida nos da: 168.125 – 24525 = **143.600**