UNIBERTSITATERAKO SARBIDE PROBA
25 URTETIK GORAKOENTZAT

FASE ESPEZIFIKOA

GIZARTE ETA OSASUN ZIENTZIETARAKO MATEMATIKA

MODULUA

ARIKETAK

ERANTZUNAK

PROBA

ERANTZUNAK

BALIABIDEAK ETA PROGRAMAZIOA

Modulua

GIZARTE ETA OSASUN ZIENTZIETARAKO MATEMATIKA

Unibertsitaterako Sarbidea: 25 urtetik gorakoentzat

Gutxi gorabeherako iraupena: 90 ordu

AURKIBIDEA

1. AURKEZPENA ETA HELBURUAK

Gaur egungo gizarteak jakintzaren paradigmaren pean egiten du aurrera. Gero eta teknifikatuago dagoen munduan bizi gara, errealitatearen interpretazioen objektibotasuna hobetzeko Matematikaren hizkuntza eta logika batez ere erabiltzen duen mundu batean, hain zuzen ere. Horrenbestez, beharrezkoa ematen du zientzia horren lege, printzipio, hizkuntza eta egituraren funtsezko alderdiak ulertzeko eta erabiltzeko gai izango diren gizabanakoak prestatzeak. Ezinbestekoa izango da gizabanakoek oinarrizko kultura matematikoa edukitzea, jakintza zientifiko eta profesionalaren arlo guztietako edukiak eskuratuko badituzte.

Horrez gain, kontuan izan behar dugu teknologietako askok oinarri gisa dituzten matematika-gaiek funtzionalak eta dinamikoak izan beharko dutela. Sormenerako, komunikaziorako, produkziorako, problemak ebazteko eta aurrera egiteko izpiritua duten gizabanakoak prestatzera jo behar dute. Ildo horretan, Matematika da arlorik egokiena. Izan ere, pentsamenduaren eragiketarik garrantzitsuenak (analisia, laburpena, interpretazioa, iritzi kritikoa, eta abar) modu positiboan egituratzeko eta arintzeko lagungarria da.

Hainbat jakintzak osatzen dute Matematika, eta jakintza horiek oso lotura estua duten hainbat multzotan biltzen dira. Honako hauek dira lanbide-trebakuntzaren berezko heldutasunarekin gehien lotzen diren Matematikaren multzoak:

Aritmetika eta aljebra.
Analisi matematikoa.
Estatistika eta Probabilitatea.

Eduki teorikoak eta praktikoak behar bezala nahastuko dituen metodologiaren bidez garatu beharko da Matematika modulua, baina ezin izango da ahaztu zer helburu lortu nahi den eta prestakuntza zein hartzaile-profilari zuzentzen zaion. Moduluaren planteamenduak batez ere praktikoa eta funtzionala izan beharko du. Moduluaren funtsezko xedea instrumentala da, hau da, matematika lanbide-ikasketarako oinarrizko eta funtsezko tresna gisa izango da baliagarria.

- Prestakuntza zientifiko orokorra eskuratzeko aukera emango duten kontzeptu, prozedura eta estrategia matematikoak ulertzea.
- Jakintza matematikoak askotariko egoeretan aplikatzea, eta lan-esparruaren interpretazioan eta ohiko jardueretan erabiltzea.
- Hainbat iturritatik datorren informazioa aztertzea eta baloratzea, eta gaur egungo arazoei buruzko iritzi kritikoa osatzeko tresna matematikoak erabiltzea.
- Matematikoki azter daitezkeen egoeretan ahoz, idatziz eta grafiko bidez adieraztea, eta, horretarako, notazio eta termino matematikoen berariazko hiztegia eskuratzea eta erabiltzea.
- Teknologia berriek eskaintzen dituzten informazio-bideez baliatzea, eta planteatzen diren problemak ebazteko erabilgarriena izan daitekeena aukeratzea.
- Matematikaren eta ingurune sozial, kultural eta ekonomikoaren arteko erlazioak finkatzea, gure kulturaren zati gisa duen balioa ulertuz.

Gai honen eskaintza aintzat hartuko duen edozein prestakuntza-prozesuetarako programazioa egitean, ondoren zerrendatzen diren “*edukiak*” hartu beharko dira kontuan, eta “*ezagutzaren adierazleak*” atalean deskribatzen diren maila eta hedadura izan beharko da aintzat. Izatez, azken horiek ebaluazio-irizpideak dira, eta, eduki-multzo bakoitzerako gai eta ereduzko ariketa diren aldetik, pertsonek jakin behar duten edo egiten jakin behar duten alderdirik funtsezko eta kritikoenak adierazi nahi dituzte.

2. EDUKIAK

1. MULTZOA: ARITMETIKA ETA ALJEBRA (22 ordu)

Zenbaki arrazionalak eta irrazionalak. Zuzen erreala.

Notazio zientifikoa.

Hizkuntza aljebraikoa:
- Lehen eta bigarren mailako ekuazioa. Soluzioa.
- Problemak planteamendu aljebraiko bidez ebaztea.

Matrize eta determinanteen azterketa:
- Matrizearen kontzeptua. Matrize-motak.
- Eragiketak matrizeekin.
- Determinantearen kontzeptua.
- Determinantea kalkulatzea, Sarrus-en erregela.

Ekuazio-sistemak (3x3 artekoak).
- Ekuazio linealen sistema. Sistema baliokideak.
- Sistema bateragarriak eta bateraezinak.
- Sistema baten soluzioa: mugatua eta mugagabea.
- Sistema ebaztea, Gauss-en metodoa.
- Problemak sistemen planteamendu bidez ebaztea.

Kalkulagailu zientifikoa eta bere erabilera.

EZAGUTZA ADIERAZLEAK:

1.1. Zuzen errealean zenbaki-motak identifikatu eta irudikatzea.
1.2. Zenbaki arrazionalekin eta irrazionalekin kalkuluak egitea, arkatz eta paperarekin zein kalkulagailuarekin.
1.3. Adierazpen aljebraikoekin, polinomikoekin eta arrazionalekin lan egitea.
1.4. Problemak sistema linealen bidez planteatzea eta ebaztea.
1.5. Problemak lehen eta bigarren mailako ekuazioen bidez planteatzea eta ebaztea.
1.6. Lanbide-problemen testuinguruan, problemak interpretatzea eta matrizeekin lan egitea.
1.7. Matrizeen determinanteak kalkulatzea (3x3 arte).
1.8. Ekuazioen sistemak ebaztea (3x3 arte) Gauss-en metodoaren bidez.

2. MULTZOA: ANALISI MATEMATIKOA (33 ordu)

Funtzioak eta grafikoak:
- Funtzioaren kontzeptua. Eremua eta ibilbidea.
- Hainbat fenomenoren grafikoen azterketa intuitiboa.

Eredu funtzionalak:
- Funtzio linealak.
- Funtzio koadratikoak.
- Funtzio polinomikoak eta arrazionalak (sinpleak).
- Funtzio esponentzialak eta logaritmikoak.

.

Puntu bateko funtzio baten limitea (maila intuitiboan). Puntu bateko funtzio batzuen limitea kalkulatzea.

Jarraitutasunari buruzko ideia intuitiboak.

Puntu bateko funtzio baten deribatua. Kurba batekiko zuzen tangentea puntu batean.

Funtzio deribatua.

Deribazioaren oinarrizko arauak. Funtzio batzuen deribatuak.

Funtzio baten gorapena eta beherapena. Mutur erlatiboak. Kurben marrazkiak.

Funtzio baten jatorrizkoa. Jatorrizko sinpleak kalkulatzea.

Integral definiturako hurbilketa. Kurba baten azpiko azalera kalkulatzea.

Integral definitua Barrow-ren erregela bidez kalkulatzea.

EZAGUTZA ADIERAZLEAK:

2.1. Egoera baten adierazpena edo adierazpen aljebraikoa abiapuntu izanik taulak egitea, unitateak, eskalak eta ardatz egokiak aukeratuz.
2.2. Funtzio sinpleen eremua kalkulatzea.
2.3. Oinarrizko funtzio sinpleak (linealak, koadratikoak, polinomikoak eta arrazionalak) grafiko bidez irudikatzea.
2.4. Funtsezko funtzioak ezagutzea: esponentzialak, logaritmikoak eta trigonometrikoak.
2.5. Funtzio baten puntu bateko jarraitutasuna edo desjarraitutasuna kontzeptuak ezagutzea (maila intuitiboan).
2.6. Puntu batean oinarrizko funtzioen mugak kalkulatzea (kasu infinitua barne).
2.7. Puntu batean funtzio baten deribatuaren ideiara modu intuitiboan hurbiltzeko hainbat estrategia eta egoera problematiko erabiltzea.
2.8. Puntu batean kurba batekiko zuzen tangentea lortzea. Funtzio deribatuaren kontzeptua ulertzea.
2.9. Funtzio baten maximoak eta minimoak lortzea.
2.10. Optimizazioarekin lotutako ariketa soilak ebaztea.
2.11. Oinarrizko funtzioen deribatuak kalkulatzea, eta horretarako deribazio-erregelak aplikatzea.
2.12. Oinarrizko funtzioen jatorrizkoak kalkulatzea.
2.13. Oinarrizko funtzioen integral definituak kalkulatzea, Barrow-ren erregela erabiliz.

3. MULTZOA: ESTATISTIKA ETA PROBABILITATEA (35 ordu)

Dimentsio bakarreko banaketa estatistikoak:
- Maiztasun-taulak.
- Grafiko estatistikoak.
- Parametro estatistikoak: batez bestekoa eta desbideratze tipikoa.
- Parametro estatistikoak kalkulagailu zientifiko baten laguntzarekin kalkulatzea.

Bi dimentsiotako banaketa estatistikoak:
- Puntu-hodeia.
- Korrelazioa. Korrelazioaren neurria. (intuiziozko azterlana)
- Erregresioa. Erregresio-zuzena. (intuiziozko azterlana)

Banaketa diskretuak. Banaketa binomiala.

- Ausazko aldagaiaren kontzeptua.
- Ausazko aldagai diskretua.
- Probabilitate-funtzioa eta banaketa-funtzioa.
- Aldagai estatistiko diskretu baten batez bestekoa eta bariantza.
- Banaketa binomialaren ideia intuitiboa.
- Banaketa binomialaren probabilitate-funtzioa.

Banaketa jarraituak. Banaketa normala

- Ausazko aldagai jarraitua.
- Dentsitate-funtzioa eta banaketa-funtzioa.
- Ausazko aldagai jarrai baten batez bestekoa eta bariantza.
- Banaketa normalaren ideia intuitiboa.
- Banaketa normalaren batez bestekoa eta bariantza.
- Banaketa normal estandarra.
- Aldagaiaren tipifikazioa.
- Taulen erabilera banaketa normalean.
- Banaketa binomialerako hurbilketa banaketa normaletik abiatuta.

Probabilitatea

- Ausazko esperimentuak.
- Gertaerak eta lagin-espazioa.
- Probabilitatearen kontzeptua.
- Oinarrizko kontaketa-teknikak
- Gertaeren probabilitatea lortzea. Laplaceren legea.
- Baldintzatutako probabilitatea
- Gertaera konposatuak.

EZAGUTZA ADIERAZLEAK:

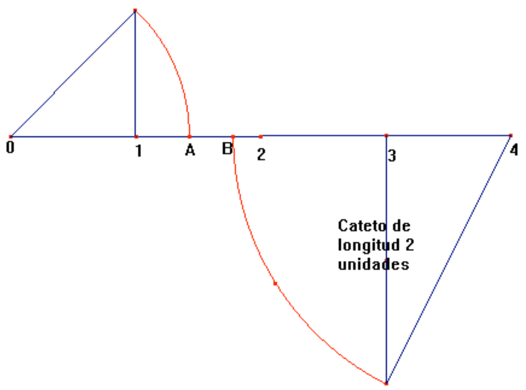
3.1. Datuetatik abiatuta taula eta grafiko estatistikoak eraikitzea.
3.2. Parametro estatistikoak kalkulatzea: moda, batezbestekoa, mediana eta desbideratze tipikoa.
3.3. Puntu-hodeiak adieraztea.
3.4. Korrelazioaren eta erregresio-zuzenaren kontzeptua ulertzea, horretarako korrelazioaren eta erregresio-zuzenaren hurbilketazko kalkuluak eginez.
3.5. Banaketa normaleko estatistika-populazioei dagozkien ariketak ebaztea taulak erabiliz.
3.6. Banaketa binomialei dagozkien ariketak ebaztea, hala balegokio, banaketa normalerako hurbilketa erabiliz.
3.7. Gertaera mota ezberdinak identifikatzea: oinarrizkoak, konposatuak etab.
3.8. Laplaceren legea erabiliz gertaera errazen probabilitatea kalkulatzea.
3.9. Baldintzatutako probabilitateari dagozkion ariketak ebaztea.

EDUKIEN BLOKEETAKO EZAGUPENEN ADIERAZLEEI DAGOZKIEN ARIKETEN ADIBIDEAK

BLOKEA		EZAGUPENEN ADIERAZLEAK	ADIBIDEAK
1	1.1.	Zuzen errealean zenbaki-motak identifikatu eta irudikatzea.	1
	1.2.	Zenbaki arrazionalekin eta irrazionalekin kalkuluak egitea, arkatz eta paperarekin zein kalkulagailuarekin.	2
	1.3.	Adierazpen aljebraikoekin, polinomikoekin eta arrazionalekin lan egitea.	3 eta 4
	1.4.	Problemak sistema linealen bidez planteatzea eta ebaztea.	5, 10, 11 eta 12
	1.5.	Problemak lehen eta bigarren mailako ekuazioen bidez planteatzea eta ebaztea.	6
	1.6.	Lanbide-problemen testuinguruan, problemak interpretatzea eta matrizeekin lan egitea.	7
	1.7.	Matrizeen determinanteak kalkulatzea (3x3 arte).	8
	1.8.	Ekuazioen sistemak ebaztea (3x3 arte) Gauss-en metodoaren bidez.	9
2	2.1.	Egoera baten adierazpena edo adierazpen aljebraikoa abiapuntu izanik taulak egitea, unitateak, eskalak eta ardatz egokiak aukeratuz.	13
	2.2.	Funtzio sinpleen eremua kalkulatzea.	14
	2.3.	Oinarrizko funtzio sinpleak (linealak, koadratikoak, polinomikoak eta arrazionalak) grafiko bidez irudikatzea.	15, 32, 33, 34 eta 35
	2.4.	Funtsezko funtzioak ezagutzea: esponentzialak, logaritmikoak eta trigonometrikoak.	16
	2.5.	Funtzio baten puntu bateko jarraitutasuna edo desjarraitutasuna kontzeptuak ezagutzea (maila intuitiboan).	17
	2.6.	Puntu batean oinarrizko funtzioen mugak kalkulatzea (kasu infinitua barne).	18 eta 19
	2.7.	Puntu batean funtzio baten deribatuaren ideiara modu intuitiboan hurbiltzeko hainbat estrategia eta egoera problematiko erabiltzea.	20, 21 eta 27
	2.8.	Puntu batean kurba batekiko zuzen tangentea lortzea. Funtzio deribatuaren kontzeptua ulertzea.	22, 23 eta 24
	2.9.	Funtzio baten maximoak eta minimoak lortzea.	25 eta 26
	2.10.	Optimizazioarekin lotutako ariketa soilak ebaztea.	25 eta 26
	2.11.	Oinarrizko funtzioen deribatuak kalkulatzea, eta horretarako deribazio-erregelak aplikatzea.	28
	2.12.	Oinarrizko funtzioen jatorrizkoak kalkulatzea.	29
	2.13.	Oinarrizko funtzioen integral definituak kalkulatzea, Barrow-ren erregela erabiliz.	30 eta 31
	3.1.	Datuetatik abiatuta taula eta grafiko estatistikoak eraikitzea.	36
	3.2.	Parametro estatistikoak kalkulatzea: moda, batezbestekoa, mediana eta desbideratze tipikoa.	37, 38, 39, 40 eta 41
	3.3.	Puntu-hodeiak adieraztea.	42
	3.4.	Korrelazioaren eta erregresio-zuzenaren kontzeptua ulertzea, horretarako korrelazioaren eta erregresio-zuzenaren hurbilketazko kalkuluak eginez.	43, 44 eta 45

3	3.5.	Banaketa normaleko estatistika-populazioei dagozkien ariketak ebaztea taulak erabiliz.	46
	3.6.	Banaketa binomialei dagozkien ariketak ebaztea, hala balegokio, banaketa normalerako hurbilketa erabiliz.	47 eta 48
	3.7.	Gertaera mota ezberdinak identifikatzea: oinarrizkoak, konposatuak etab.	49, 50,51,52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59 eta 60
	3.8.	Laplaceren legea erabiliz gertaera errazen probabilitatea kalkulatzea.	51, 52, 55 eta 57
	3.9.	Baldintzatutako probabilitateari dagozkion ariketak ebaztea.	49, 50, 54, 56, 58, 59 eta 60

1. **Zuzen errealeko $[0,4]$ segmentuan adierazi puntuen zenbakizko balioa: A eta B. Irudikatu diren arkuen zentroak 0 eta 4 puntuak dira hurrenez hurren. Gainera, triangelu angeluzuzen txikia isoszelea da.**



2 luzera-unitateko katetoa

2. **Ondorengo zenbakizko adierazpenen balioa kalkulatu:**

A) $$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

B) $$\left(\sqrt{16}\right)^3-\frac{1}{4}.\left(\sqrt[3]{10}\right)^6+\sqrt{25.\sqrt{4}}$$

3. **Ondorengo polinomioak ditugula:**

$$P(x)=3x-2$$

$$Q(x)=x-\frac{1}{2}$$

Kalkulatu hurrengo adierazpen algebraikoak:

$a)P^2(x)$

$b)Q^2(x)$

$c)[P(x)+Q(x)]^2$

4. **Hurrengo polinomioak faktoreetan deskonposatu eta bakoitzaren erroa adierazi:**

a) $y=x^3-2.x^2-x+2$

b) $y=2.x^3-3.x^2-9.x+10$

5. A, B eta C euro 1eko txanponak dituzten hiru kutxa ditugu. Guztira 36 euro daude. Beste bi kutxetan dauden txanponen batura baino 2 txanpon gehiago ditu A kutxak. B kutxatik A kutxara txanpon 1 pasatzen badugu, B-k duen txanpon-kopuruaren bikoitza izango du A-k. Bilatu kutxa bakoitzak zuen txanpon kopurua.

6. Ebatzi ondorengo ekuazioak:

a) $\frac{8-x}{2-x} - \frac{8+x}{2+x} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{3}{2}.\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$

7. Kalkulatu x, y, z, t ondorengo baldintza bete dadin:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Ondorengo determinantea 0 izateko A-ren balioa kalkulatu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & A \\ 5 & 9 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

9. Ebatzi ondorengo sistema Gauss-en metodoa aplikatuz:
***x* – *y* + 3*z* = –4**
***x* + *y* + *z* = 2**
***x* + 2*y* – *z* = 6**

10. Fabrikatzaile batek 42 etxetresna elektriko fabrikatzen du. Fabrikatik 3 denda hornitzen dira, ekoizpen osoa eskaintzarekin betez. Aste jakin batean, lehenengo dendak eskatutakoa gainerako biek batera eskatutakoa adina izan zen; eta bigarrenak eskatu zuena, lehenengoak eskatutakoaren erdiaren eta hirugarrenak eskatutakoaren herenaren arteko batura baino % 20 gehiago izan zen. Zenbat eskatu zuen bakoitzak?

11. Kutxazain automatiko batean 95 billete daude 10, 20 eta 50 €-koak, guztira 2 000 €. Hala, 10 €-ko billeteen kopurua 20 €-ko billeteen kopuruaren bikoitza dela jakinik, kalkulatu zenbat billete dauden mota bakoitzekoak.

12. Aita baten adina bere bi semeen adinen baturaren bikoitza da, baina duela urte batzuk (zehazki bi semeen adinaren arteko diferentzia hainbat urte), aitaren adina garai hartan semeen adinaren baturaren hirukoitza zen. Gaur egun semeek duten adinaren batura hainbeste urte igarotzean hiru adinen arteko batura 150 urte izango da. Zein zen aitak zuen adina semeak jaio ziren unean?

13. Ondorengo funtzioak ditugu:

a) $y = senx + \cos x$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

Bete itzazu taulak, emandako balioen arabera

a) kasuarentzako taula

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y				

b) kasuarentzako taula

x	-2	-1	0	2
y				

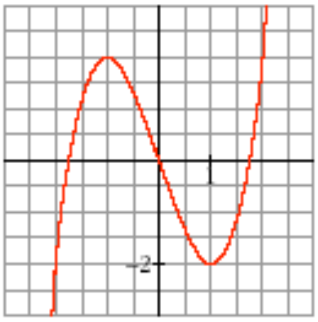
14. Bilatu ondorengo funtzioen izate-eremua:

a) $y = x^3 - 5.x^2 + 7x + 3$

b) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 4}$

15. Adierazi ondorengo funtzioen artean zeini dagokion grafiko hau:



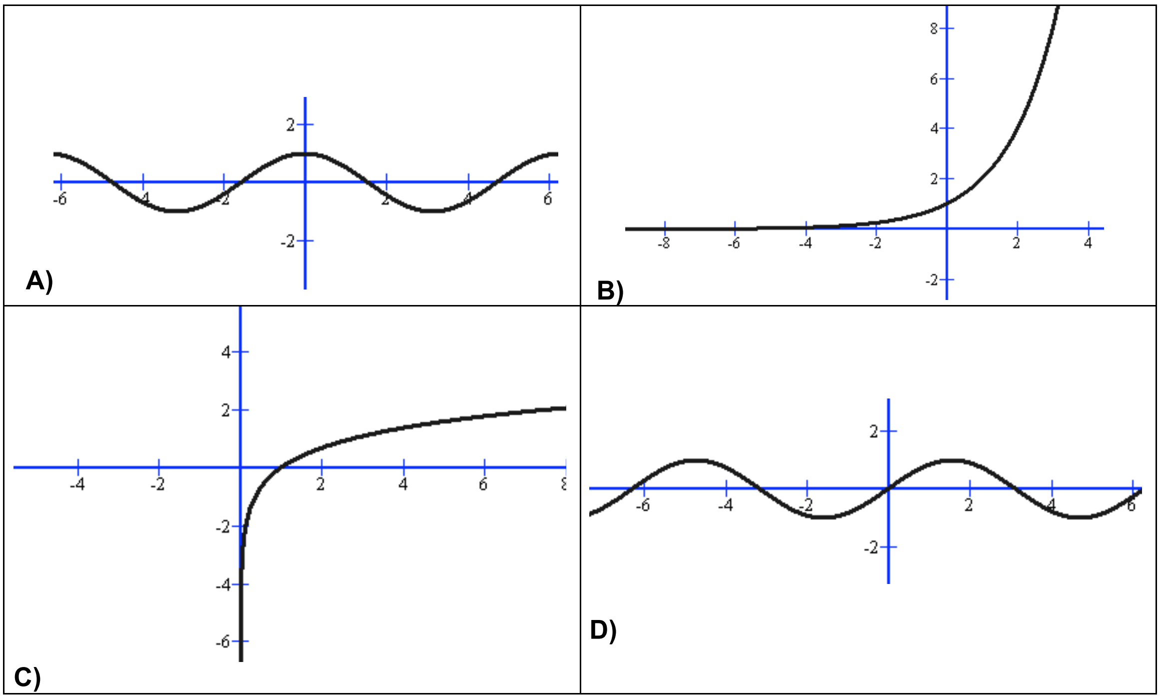
$y = x^3 \quad 3x$

$y = x^4 \quad 4x^3 \quad 16$

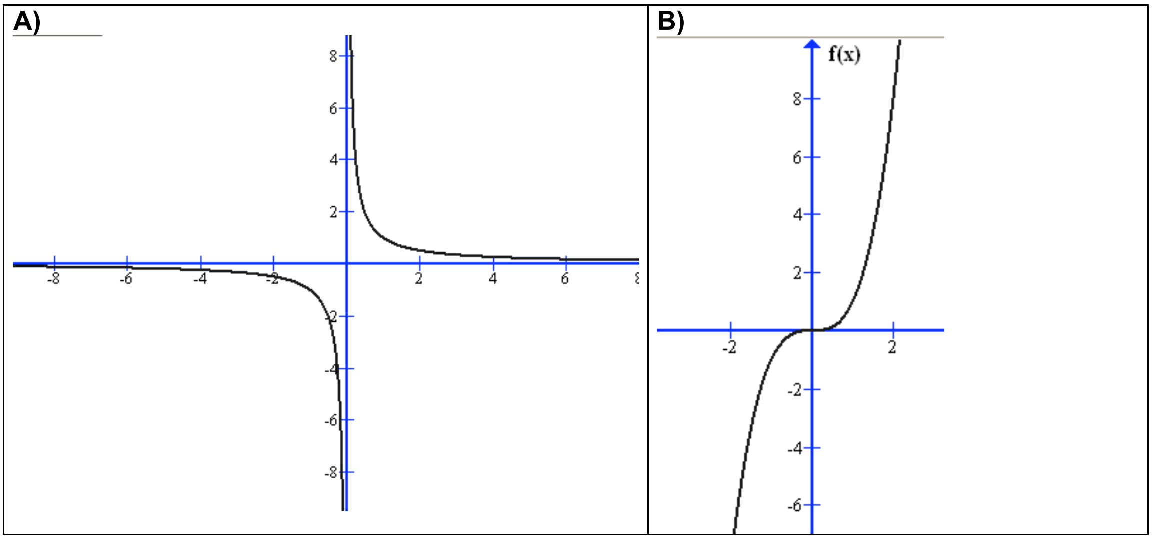
$y = x^3 + 2$

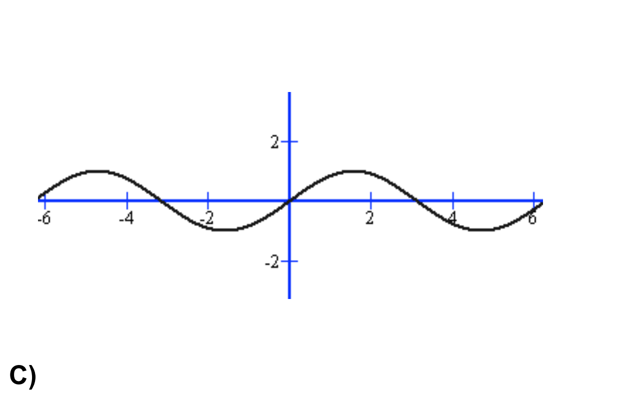
Arrazoitu zure hautaketa

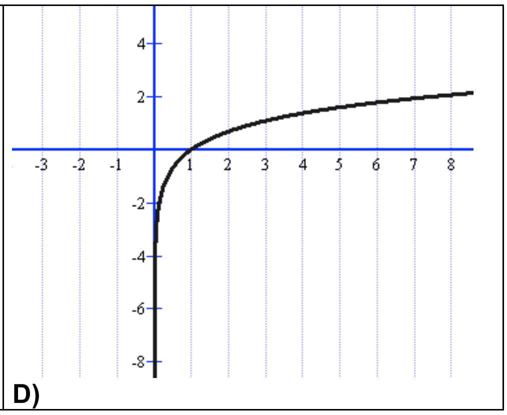
16. Ondorengo funtzioak logaritmikoak, esponentzialak edo trigonometrikoak dira. Adierazi bakoitza zer den.



17. Ondorengo grafikoen artean adierazi zeintzuk diren jarraituak eta zeintzuk ez. Jarraituak ez direnean adierazi zein puntutan gertatzen den etena.







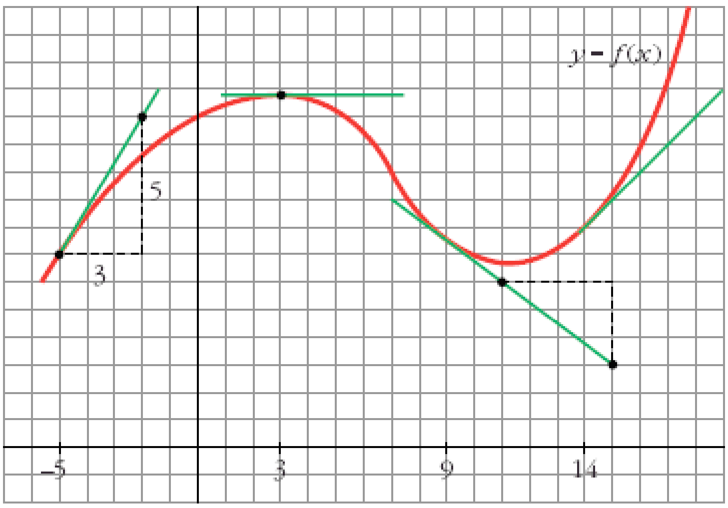
18. $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$ **jakinda,**
Ondorengo adierazpenen limiteak adierazi $x \to +\infty$ **kasuan:**

- **a)** f (x) – h(x)
- **b)** f (x). f (x)
- **c)** f (x) + h(x)
- **d)** g (x).h(x)
- **e)** h (x) / u (x)

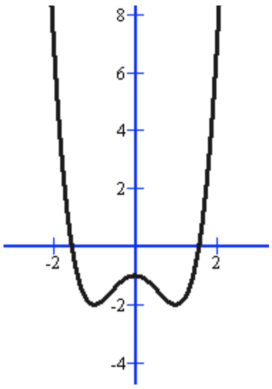
19. $x \to +\infty$ **delarik adierazi ondorengo adierazpenen artean zein den infinitua (±∞):**

- **a)** $0{,}5^x$
- **b)** $-1{,}5^x$
- **c)** 4^x
- **d)** 4^{-x}

20. Beheko grafikoa dugula, kalkulatu balio hauek: $f'(3)$, $f'(9)$



21. Funtzio honetarako:



(Funtzioa: $y = x^4 - 2x^2 - 1$**)**

Azaldu, gainetik, x-en zein balioetarako den zero funtzio honen deribatua, zeinetarako den positiboa eta zeinetarako negatiboa. Funtzioaren ezaugarri nagusienak adierazi.

22. Kalkula ezazu ondorengo funtzioen deribatuen balioa x =3 puntuan:

a) $y = 3.x^3 - 4.x^2 - 5.x + 34$

b) $y = \dfrac{2x-1}{4x+2}$

Gainera, topa ezazu funtzio bakoitzak puntu horretan duen zuzen ukitzailea.

23. Bilatu ondorengo funtzioentzat deribatua zero egiten duten puntuak:

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ b) $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

24. Bilatu ondorengo kurbaren zuzen ukitzaileak:

$$y = \frac{5x^3 + 7.x^2 - 16x}{x-2}$$

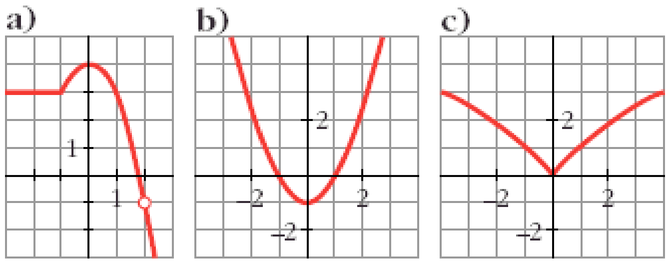
abzisako 0 eta 1 puntuetan

25. Topatu ondorengo funtzioaren balio maximo eta minimoak:

$$y = x^3 - 6.x^2 + 9x + 5$$

26. Kalkulatu *k* balioa, ondorengo funtzioak zuzen ukitzaile horizontaleko puntu bakarra izan dezan: ***f*** **(*x*) =** $\dfrac{e^x}{x^2 + k}$

27 Esan beheko grafikoetako funtzioetan zein puntutan ez diren deribagarriak. Horietakoren bat deribagarria al da zuzen errealeko puntu guztietan?



28. Lortu ondorengo funtzioen deribatuak:

a) $y = sen(3x) + \cos(2x)$

b) $y = 5x^2 - \dfrac{2}{x}$

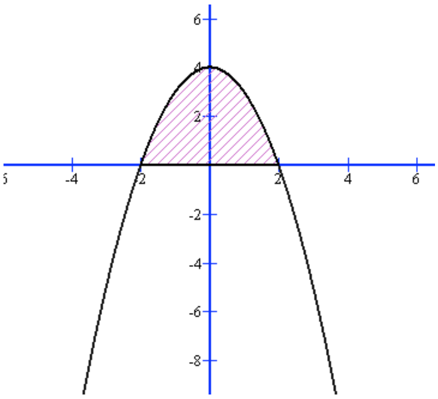
c) $y = \ln(3x)$

29. Ebatzi ondorengo integralak

a) $\int \dfrac{x^4 - 5.x^2 + 3.x - 4}{x} dx$

b) $\int sen2x.dx$

30. $y = \quad x^2 + 4$ **funtzioaren irudia:**



Kalkula ezazu marratutako azalera Barrow-en formula erabiliz

31. Kalkulatu behean adierazitako kurben artean dagoen azalera:

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

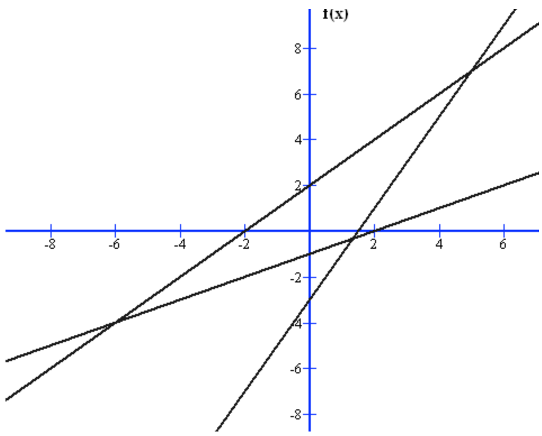
b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

32. Kalkulatu A(-1, 1) eta B(4,3) puntuen arteko distantzia

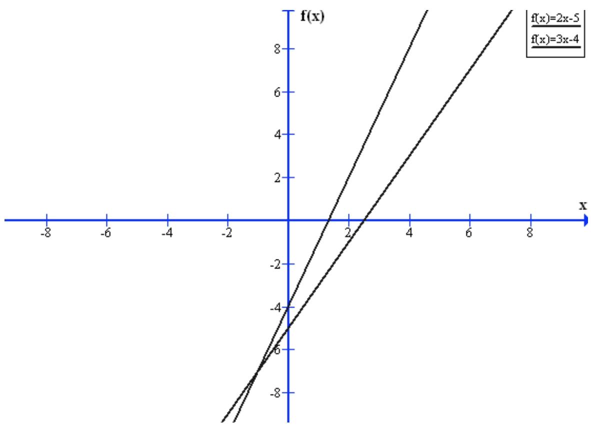
Erantzuna:

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$$

33. Hiru zuzenki daude ondorengo grafikoan. Kalkula itzazu malda txikiena duten bi zuzenkien ekuazioak.

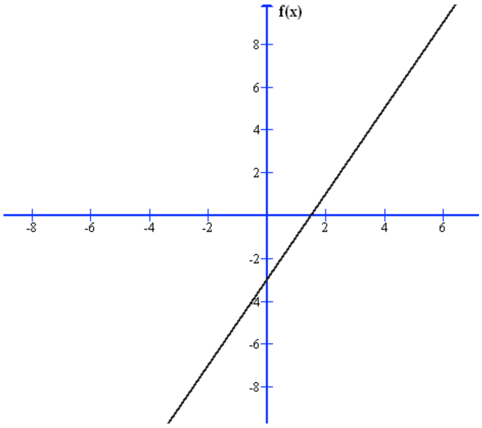


34. y = 2x - 5 eta y = 3x - 4 funtzioak zuzenak dira, beheko grafikoan ikus daitekeen moduan:



a) **Zein puntutan ebakitzen dute elkar?**
b) **Bi zuzenen artean zeinek dauka malda handiagoa? Zeintzuk dira bien maldak?**
c) **Bi zuzenetako bat (1.000, 2996) puntutik pasatzen al da?**

35. y = 2x – 3 funtzioarena da ondorengo grafikoa:



Kalkulatu:
A) Ardatzekiko ebakidura-puntuak
B) Zuzenaren malda
C) P(5,6) puntutik pasatzen al da?

36. Institutu bateko 120 ikasleek ondorengo kirolak praktikatzen dituzte:

Kirolak	**Ikasle kopurua**
Saskibaloia	20
Eskubaloia	14
Futbola	48
Atletismoa	16
Igeriketa	22
	Guztira: 120

Datu hauei dagokien sektore-diagrama marraztu.

37. Bonbilla kopuru jakin bat fabrikatzean, batzuk akastunak direla ohartu gara. 100 bonbillako 200 kutxa aztertu dira, eta ondorengo taula estatistikoa burutu da:

Bonbilla akastunak	**Kutxa kopurua**
	5
2	15
3	38
4	42
5	49
6	32
7	17
8	2

Kalkula ezazu bonbilla akastunen batez bestekoa.

38. Ikasgela batean berrogei ikasle daude, eta beheko taula honetako banaketari jarraiki antolatzen dira: Aldagaia altuera da.

Altuera-tartea (cm)	Maiztasuna
148,5 - 153,5	2
153,5 - 158,5	4
158,5 - 163,5	11
163,5 - 168,5	14
168,5 - 173,5	5
173,5 - 178,5	4

Kalkulatu: a) Batez besteko aritmetikoa
b) Desbideratze tipikoa.

39. Bete ezazu ondorengo taula estatistikoa:

Aldagaia (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Maiztasuna (f)	4	4		7	5		7	
Maiztasun absolutua (F)			16		28	38	45	
Maiztasun erlatiboa	0,08		0,16	0,14				

40. Ondorengo datu-taulak nerabe-multzo batek inteligentzia neurtzeko test batean lortutako emaitzak biltzen ditu, tarteetan oinarrituta:

Inteligentzia	Ikasle kopurua
85-90	5
91-95	10
96-100	20
101-105	35
106-110	15
111-115	10

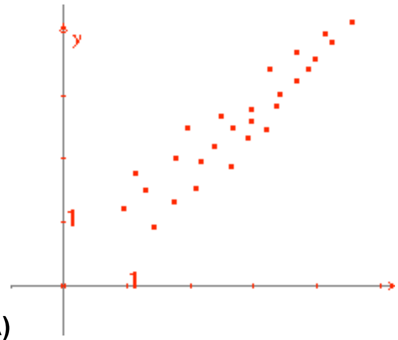
a) Kalkulatu: Batez bestekoa, mediana, moda eta desbideratze tipikoa
b) Marraztu dagokion histograma.

41. Beheko taulak ibiltzen hasteko unean haurrek duten adina azaltzen du.

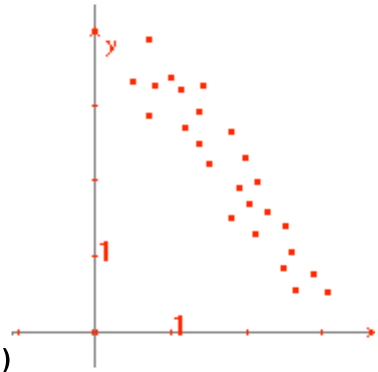
Adina (hilabeteak)	9	10	11	12	13	14	15
Haur kopurua	1	4	9	16	11	8	1

a) Marraztu dagokion grafikoa.
b) Kalkulatu batez bestekoa eta desbideratze tipikoa.
c) Zein da medianadun tartea?

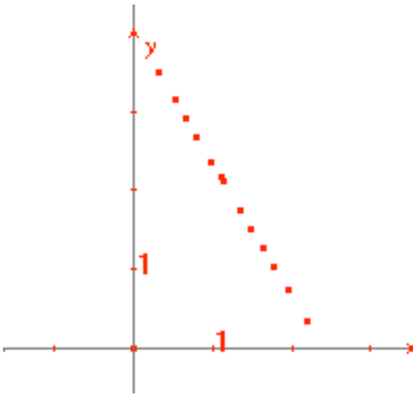
42. Marraz ezazu gutxi gorabehera ondorengo banaketa bidimentsionalen erregresio-zuzena:



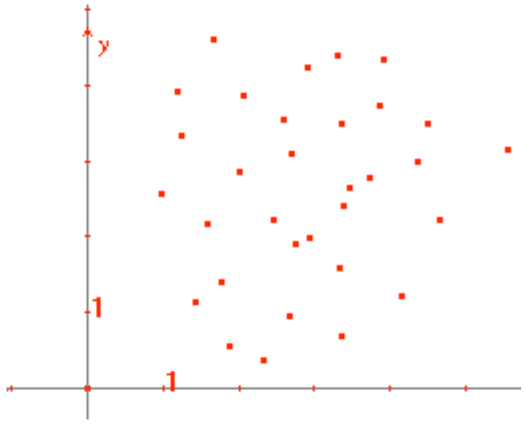
A)



B)



C)

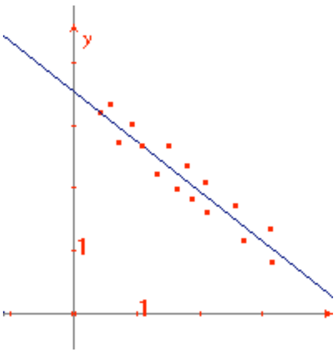


D)

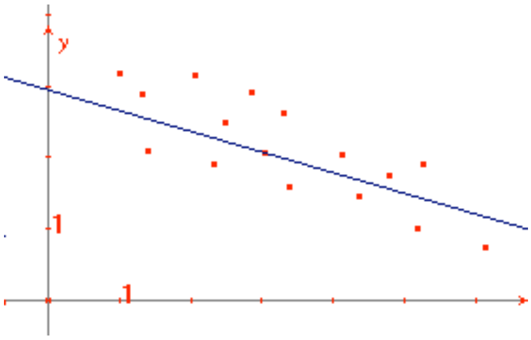
b) Bietatik zeinek du korrelazio positiboa eta zeinek negatiboa?

c) Kasu bakoitzeko korrelazio-koefizientearen gutxi gorabeherako balio bat ematen saiatu.

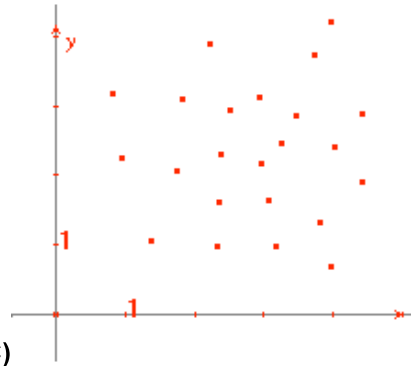
43. Ondorengo kasu bakoitzean puntu-hodei bat eta horri dagokion erregresio-zuzena ageri dira. Korrelazio-koefizienteak
1.9. **r=0 ; b) r= - 0,96 ; r= -0,6 ; r= 0,8 ; r= 0,95 direla jakinik,**
Lotu bakoitzari dagokion puntu-hodeiarekin.



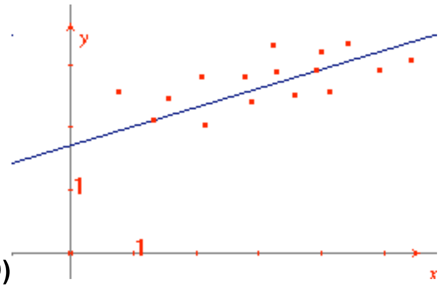
A)



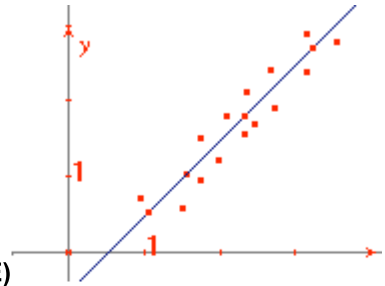
B)



C)



D)



E)

44. Lehen mailako lehenengo hamabost taldeek beheko emaitzak lortu zituzten liga amaieran.

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G	20	22	20	17	17	14	12	13	11	10	10	12	11	11	11
E	9	5	8	8	4	9	11	8	11	13	12	8	8	7	6
P	5	7	6	9	13	11	11	13	12	11	12	14	15	15	17

C: Sailkapenean lortutako postua.
G: Irabazitako partida kopurua.
E: Berdindutako partida kopurua.
P: Galdutako partida kopurua.

a) Marraztu puntu-hodeiak, eta adierazi erlazio hauexek:
I. kasua: C eta P
II. kasua: C eta E
III. kasua: C eta G

b) Adierazi, horrelakorik baldin badago, hiru kasuetako bakoitzean dagoen korrelazio mota.

45. 10 ikasleren notak, azterketa prestatzen emandako orduak, azterketaren aurreko egunetan Interneten konektatuta pasa zituzten orduak eta bakoitzaren neurria agertzen ditu beheko taulak.
Adierazi kasu bakoitza puntu-hodeia erabiliz, aldagaietako bat beti lortu den nota izanik eta beste aldagaia txandatuz.

Nota	3	4	5	6	6	7	8	8	8	9
Ikasketa-orduak	3	4	7	11	5	7	10	11	12	14
Internet orduak	19	18	15	10	8	6	5	5	8	3
Altuera (cm)	156	167	170	170	172	166	179	167	158	167

46. Populazio bateko pertsonen pisuari dagokion banaketa normalean batezbestekoa 70 kg da eta desbideratze tipikoa 6 kg. 6.000 pertsonako populazio baterako, kalkulatu zenbat pertsonak izango duen 64 eta 76 Kg. arteko pisua.

**47. Bidezko dado bat badugu eta 50 aldiz jaurtitzen badugu:
Zenbateko probabilitatea dago “1” zenbakia 10 aldiz baino gehiagotan ateratzeko?**

48. Inteligentzia proba batek 10 galdera ditu, horietako bakoitzak 4 erantzun ditu, baina bakarra da zuzena. Pertsona batek ausaz erantzun ditu hamar galderak. Kalkulatu:

a) Lau galdera asmatzeko duen probabilitatea.
b) Gutxienez zortzi galdera asmatzeko probabilitatea.

49. Bi dado kubiko jaurti eta bakoitzean irten den zenbakia behatuko dugu. Kalkulatu:
a) Bi dadoetan zenbaki bera ateratzeko probabilitatea.
b) Atera diren bi zenbakien batura 7 izateko probabilitatea.
c) Atera diren bi zenbakien biderkadura 12 izateko probabilitatea.

**50. 12 bola gorri, 3 bola urdin eta 2 zuri ditu kutxa batek.
Edozein bola aterako dugu. Zein da bola hori gorria izateko probabilitatea?**

51. Bi dado aldi berean jaurtitzeko ausazko esperientzian, zein dira esperientzia horretako oinarrizko gertakariak?

52. Bi txanpon aldi berean jaurtiko ditugu. Zein dira esperientzia horren oinarrizko gertakariak?

53. Hiru txanpon aldi berean jaurtiko ditugu. Zein dira esperientzia horren oinarrizko gertakariak?

**50. Kutxa batean bola gorri 1 eta 2 bola zuri ditugu.
Ausaz bi bola aterako ditugu. Zein da bi bolak zuriak izateko probabilitatea?**

55. Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.

56. Kutxa batean 8 bola zuri eta 4 gorri daude. Lehenik bola bat atera eta, kutxara berriro sartu gabe, bigarren bola bat hartu dugu.

Kalkulatu honako probabilitate hauek:

a) Bi bolak zuriak izatekoa.
b) Bi bolak gorriak izatekoa.

57. Bidezko bi dado jaurtitzean, zein da ateratako zenbakien arteko kendura 3 izateko probabilitatea?

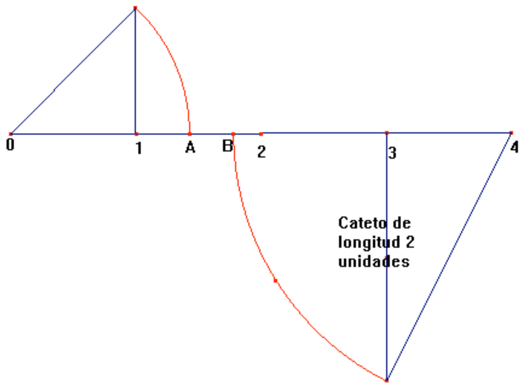
58. Bost txanpon jaurtiz gero, kalkulatu ondoko probabilitateak:
a) 5 binper lortzekoa.
b) Aurkiren bat lortzekoa.

59. Ikasgela batean dauden ikasleetatik hogei mutilak dira eta hamar neskak. Mutilen erdiak eta nesken erdiak gainditu dute matematikako irakasgaia. Kalkulatu ausaz hautatutako pertsona batek ondorengoak betetzeko dagoen probabilitatea:
a) Neska izatea edo matematika gainditutakoa izatea.
b) Matematika gainditu ez duen mutila izatea.
c) Mutila dela jakinik, zenbateko probabilitatea dago matematika gainditu duenetakoa izateko?

60. Kutxa batean zenbakiz markatutako sei bola daude, horietako hiru zenbaki positiboekin markatuak eta beste hiruak zenbaki negatiboekin. Bola bat ateratzen da, eta gero beste bat, aurrekoa itzuli gabe.
a) Kalkulatu eskuratutako zenbakien biderkadura positiboa izateko probabilitatea.
b) Kalkulatu eskuratutako zenbakien biderkadura negatiboa izateko probabilitatea.

EDUKIEN BLOKEETAKO EZAGUTZA ADIERAZLEEI DAGOZKIEN ARIKETEN ADIBIDEEN ERANTZUNAK

1. Zuzen errealeko $[0,4]$ segmentuan adierazi puntuen zenbakizko balioa:
A eta B. Irudikatu diren arkuen zentroak 0 eta 4 puntuak dira hurrenez hurren. Gainera, triangelu angeluzuzen txikia isoszelea da.



2 luzera-unitateko katetoa

Erantzuna:

Soluzioa. A puntuaren balioa $\sqrt{2}$ da, eta B puntuarena $4-\sqrt{5}$. Ikus daitekeenez, zenbaki irrazionalak dira bi balioak.

2. Ondorengo zenbakizko adierazpenen balioa kalkulatu:

A) $$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

B) $$\left(\sqrt{16}\right)^3 - \frac{1}{4}.\left(\sqrt[3]{10}\right)^6 + \sqrt{25.\sqrt{4}}$$

Erantzuna:

a) $$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3}).(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}).(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{5+3+2\sqrt{15}}{2} = 4+\sqrt{15}$$

b)
$$\left(\sqrt{16}\right)^3 - \frac{1}{4}.\left(\sqrt[3]{10}\right)^6 + \sqrt{25.\sqrt{4}} = 4^3 - \frac{1}{4}.10^2 + \sqrt{50} = 64-25-5\sqrt{2} = 39-5\sqrt{2}$$

3. Ondorengo polinomioak ditugula:

$$P(x) = 3x - 2$$

$$Q(x) = x - \frac{1}{2}$$

Kalkulatu hurrengo adierazpen algebraikoak:

$$a) P^2(x)$$

$$b) Q^2(x)$$

$$c) \left[P(x) + Q(x)\right]^2$$

Erantzuna:

$$a) P^2(x) = (3x-2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$$

$$b) Q^2(x) = (x - \frac{1}{2})^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$$

$$c) \left[P(x) + Q(x)\right]^2 = \left(4x - \frac{5}{2}\right)^2 = 16x^2 + \frac{25}{4} - 20x$$

4. Hurrengo polinomioak faktoreetan deskonposatu eta bakoitzaren erroa adierazi:

a) $y = x^3 - 2.x^2 - x + 2$

b) $y = 2.x^3 - 3.x^2 - 9.x + 10$

Erantzuna:
Hirugarren mailak polinomioak direnez, erro osoak bilatuko ditugu lehenik, baldin badute, eta gero bigarren mailako ekuazioa aplikatuko dugu. Ariketaren emaitza, beraz:

a) $y = x^3 - 2.x^2 - x + 2 = (x-1).(x+1).(x-2)$

b) $y = 2.x^3 - 3.x^2 - 9.x + 10 = 2.(x-1).(x+2).(x - \frac{5}{2})$

5. A, B eta C euro 1eko txanponak dituzten hiru kutxa ditugu. Guztira 36 euro daude. Beste bi kutxetan dauden txanponen batura baino 2 txanpon gehiago ditu A kutxak. B kutxatik A kutxara txanpon 1 pasatzen badugu, B-k duen txanpon-kopuruaren bikoitza izango du A-k. Bilatu kutxa bakoitzak zuen txanpon kopurua.

Erantzuna:
A, B eta C kutxetako txanpon kopuruak x, y eta z izendatzen baditugu hurrenez hurren, hiru ekuazio eta hiru ezezagun izango ditugu:

$$x + y + z = 36$$

$$x - 2 = y + z$$

$$2(y-1) = x + 1$$

Sistemaren soluzioa:
x =19 txanpon, y = 11 txanpon, z = 6 txanpon

6. Ebatzi ondorengo ekuazioak:

a) $\frac{8-x}{2-x} - \frac{8+x}{2+x} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$

Erantzuna:
a) Izendatzaileak kentzen baditugu, ekuazioa honela gelditzen zaigu:

$$(8-x)(2+x)-(8+x)(2-x) = \frac{9}{4}(4-x^2)$$

Garatu eta sinplifikatu ondoren, bigarren mailako ekuazio bat izango dugu:

$$9x^2 + 48x - 36 = 0$$

Eta soluzioak: -6 eta 2/3
b) Eman diguten ekuazioa garatzean, bigarren mailak ekuazio bat lortuko dugu:

$3x^2 - 23x + 44 = 0$ eta bi soluzio ditu: $x = 4; x = \frac{11}{3}$

7. Kalkulatu x, y, z, t ondorengo baldintza bete dadin:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eranztuna:

$$\begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eta beraz,: z = 0, t = 2, x = 5/2 , y = 3/2

8. Ondorengo determinantea 0 izateko A-ren balioa kalkulatu.

$\begin{vmatrix} 1 & 6 & A \\ 5 & 9 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ **= 0**

Erantzuna:
Sarrus-en modura garatzen badugu:
36+ 40A+ 84-63A-16-120 = 0
Hau da, 23 A = -16
Eta hortik: A = -16/23

9. Ebatzi ondorengo sistema Gauss-en metodoa aplikatuz:
***x* – *y* + 3*z* = –4**
***x* + *y* + *z* = 2**
***x* + 2*y* – *z* = 6**

Erantzuna:
Sistemaren azken ekuazioetatik x ezabatuko dugu:

$$\begin{array}{l} x-y+3z=-4 \\ -2y+2z=-6 \\ -3y+4z=-10 \end{array} \quad \text{orain y ezabatzen badugu:} \quad \begin{array}{l} x-y+3z=-4 \\ -2y+2z=-6 \\ -2z=2 \end{array}$$

Eta azkeneko sistema ebatziz lortuko dugu emaitza.
x = 1, y = 2 , z = -1

10. Fabrikatzaile batek 42 etxetresna elektriko fabrikatzen du. Fabrikatik 3 denda hornitzen dira, ekoizpen osoa eskaintzarekin betez. Aste jakin batean, lehenengo dendak eskatutakoa gainerako biek batera eskatutakoa adina izan zen; eta bigarrenak eskatu zuena, lehenengoak eskatutakoaren erdiaren eta hirugarrenak eskatutakoaren herenaren arteko batura baino % 20 gehiago izan zen. Zenbat eskatu zuen bakoitzak?

Erantzuna:

x izendatuko dugu 1. dendak eskatutako kopurua eta *y* 2. dendak eskatutakoa. Hala, 3. dendak eskatutakoa *z* izendatuta, hauxe genuke:

x + *y* + *z* = 42
x = y+z
y = 1,2(x/2+z/3)

Sistema ebatziz gero:
1. dendak 21 etxetresna elektriko eskatu zituen; 2. dendak15; eta 3. dendak 6.

11. Kutxazain automatiko batean 95 billete daude 10, 20 eta 50 €-koak, guztira 2 000 €. Hala, 10 €-ko billeteen kopurua 20 €-ko billeteen kopuruaren bikoitza dela jakinik, kalkulatu zenbat billete dauden mota bakoitzekoak.

Erantzuna

x izendatuko dugu 10 €-ko billeteen kopurua; *y* 20 €-ko billeteena; eta *z* 50 €-ko billeteena. Ekuazio-sistema bat plantea daiteke:

$$\left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 95 \\ 10x+20y+50z &= 2000 \\ x &= 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} x+y+z &= 95 \\ x+2y+5z &= 200 \\ x &= 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 3x+z &= 95 \\ 4y+5z &= 200 \\ x &= 2y \end{array}\right\}$$

Sistema hori ebatzita: 10 €-ko 50 billete ditugu, 20 €-ko 25 billete ditugu eta 50 €-ko 20 billete.

12. Aita baten adina bere bi semeen adinen baturaren bikoitza da, baina duela urte batzuk (zehazki bi semeen adinaren arteko diferentzia hainbat urte), aitaren adina garai hartan semeen adinaren baturaren hirukoitza zen. Gaur egun semeek duten adinaren batura hainbeste urte igarotzean hiru adinen arteko batura 150 urte izango da. Zein zen aitak zuen adina semeak jaio ziren unean?

Erantzuna:

Taula bat eginez:

	EDAD ACTUAL	HACE $y - z$ AÑOS	DENTRO DE $y + z$ AÑOS
PADRE	x	$x - y + z$	$x + y + z$
1er HIJO	y	$y - y + z = z$	$2y + x$
2º HIJO	z	$z - y + z = -y + 2z$	$y + 2z$

Lehenengo semea jaio zenean aitak 35 urte zuen; 2. semea jaiotzean 40 urte zuen.

13. Ondorengo funtzioak ditugu:

a) $y = senx + \cos x$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

Bete itzazu taulak, emandako balioen arabera

a) kasuarentzako taula

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y				

b) kasuarentzako taula

x	-2	-1	0	2
y				

Erantzuna:

a) $y = senx + \cos x$

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	1	1

b) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

x	-2	-1	0	2
y	-15	-1	1	-7

14. Bilatu ondorengo funtzioen izate-eremua:

a) $y = x^3 - 5.x^2 + 7x + 3$

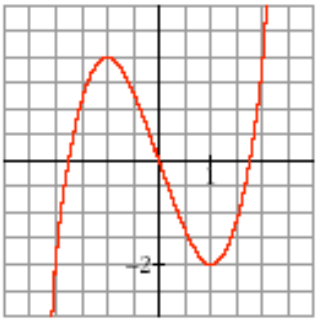
b) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \dfrac{x^3 - 3x}{x^2 + 4}$

Erantzuna:

a) Zuzen erreal osoa.
b) Zatitzailea zero egiten duten balioentzako ez da existitzen, eta beraz, zuzen erreal osoa da izate-eremua, 1 eta 4 balioak salbu.
c) Zatitzailea beti zero baino handiagoa izango denez, funtzioaren izate-eremua zuzen erreal osoa da.

15. Adierazi ondorengo funtzioen artean zeini dagokion grafiko hau:



$y = x^3 - 3x$

$y = x^4 + 4x^3 - 16$

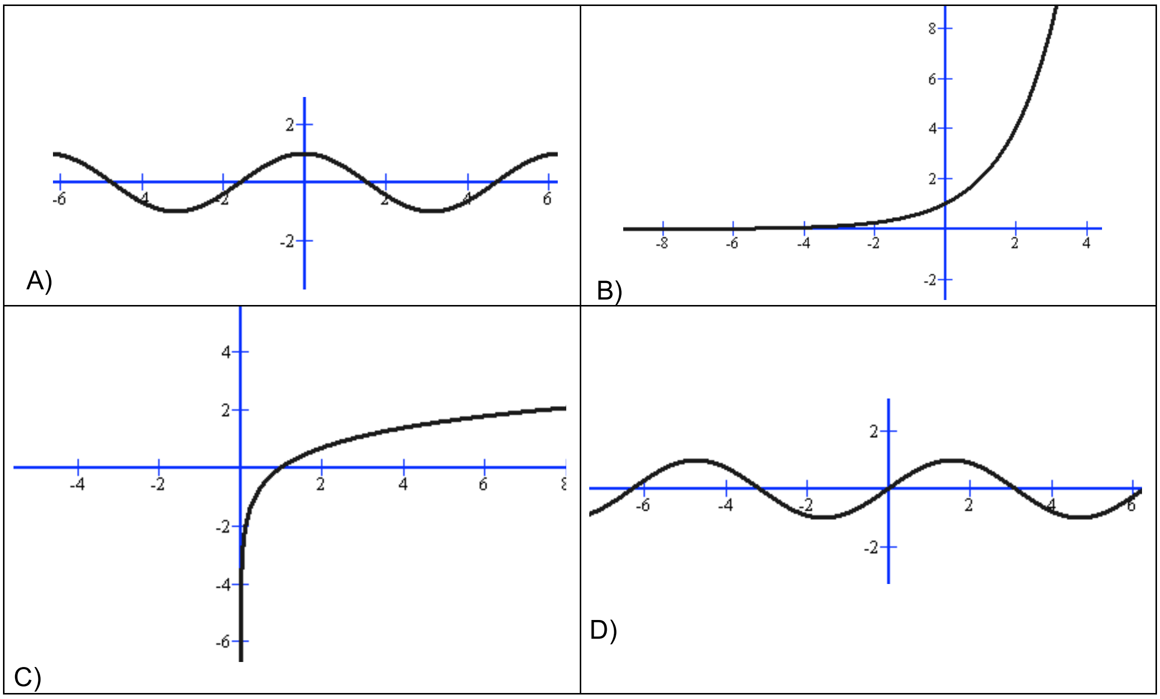
$y = x^3 + 2$

Arrazoitu zure hautaketa

Erantzuna:

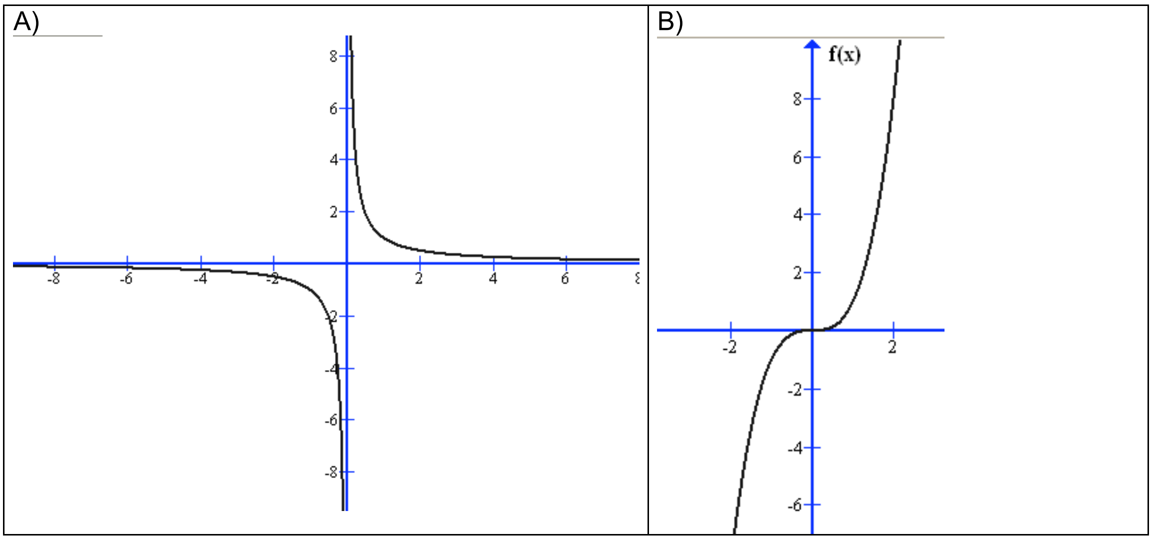
Ohartuko gara (0, 0) puntutik pasatzen dela, beraz, $y = x^3 - 3x$ funtzioa bakarrik izango da.

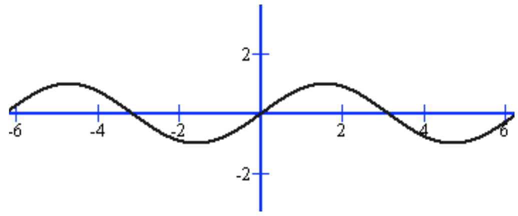
16. Ondorengo funtzioak logaritmikoak, esponentzialak edo trigonometrikoak dira. Adierazi bakoitza zer den.



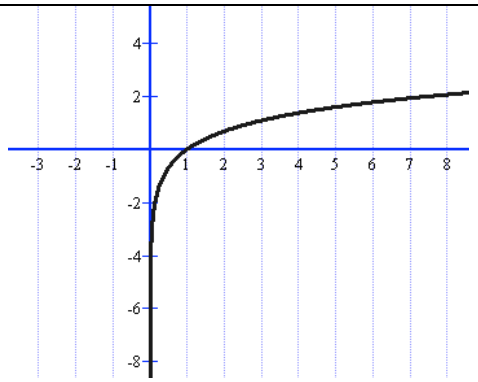
Erantzuna:
A) Trigonometrikoa
B) Esponentziala
C) Logaritmikoa
D) Trigonometrikoa

17. Ondorengo grafikoen artean adierazi zeintzuk diren jarraituak eta zeintzuk ez. Jarraituak ez direnean adierazi zein puntutan gertatzen den etena.





C)



D)

Erantzuna:
A) x = 0 puntuan
B) Jarraitua da zuzen erreal osoan
C) Jarraitua da zuzen erreal osoan
D) Jarraitua da bere izate-eremu osoan

18. $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$ **jakinda,**
Ondorengo adierazpenen limiteak adierazi $x \to +\infty$ kasuan:
a) f (x) – h(x)
b) f (x). f (x)
c) f (x) + h(x)
d) g (x).h(x)
e) h (x) / u (x)

Erantzuna:
a) f (x) – h(x) infiniturantz
b) f (x) .f (x) infiniturantz
c) f (x) + h(x) indeterminatua
d) g (x).h(x) minus infiniturantz
e) h (x) / u (x) infiniturantz

19. $x \to +\infty$ **delarik adierazi ondorengo adierazpenen artean zein den infinitua (±∞):**

a) $0{,}5^x$

b) $-1{,}5^x$

c) 4^x

d) 4^{-x}

Erantzuna:

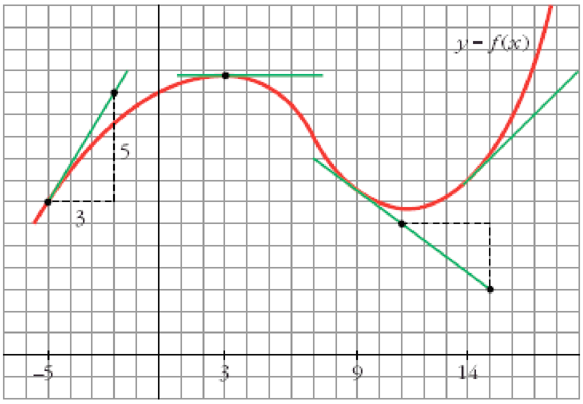
a) $0{,}5^x \to 0$

b) $-1{,}5^x \to -\infty$

c) $4^x \to \infty$

d) $4^{-x} \to 0$

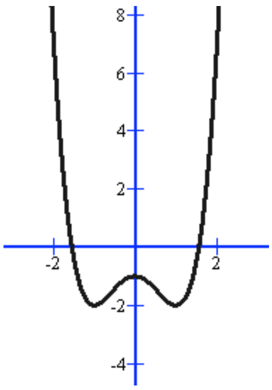
20. Beheko grafikoa dugula, kalkulatu balio hauek: *f′*(3), *f′*(9)



Erantzuna:

***f′*(3) = 0 , eta *f′*(9) =-3/4**

21. Funtzio honetarako:



(funtzioa: $y = x^4 - 2x^2 - 1$)

Azaldu, gainetik, x-en zein balioetarako den zero funtzio honen deribatua, zeinetarako den positiboa eta zeinetarako negatiboa. Funtzioaren ezaugarri nagusienak adierazi.

Erantzuna:

Funtzioa deribatzen badugu: $y' = 4x^3 - 4x$; eta zerorekin berdintzen badugu, puntu kritikoak lortuko ditugu: x = 0, x =1, x =-1.

Hiru puntu hauek erraz koka ditzakegu irudian, x =0 puntuan funtzioak maximo erlatibo bat baitu eta x = 1 eta –1 balioetan minimo erlatiboak baititu (absolutuak ere badira).
Funtzio parea da (OY ardatzarekiko simetrikoa).

Deribatuaren balioa aztertu nahi badugu, honela egin dezakegu:
$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ denez, deribatuaren zeinua aztertuko dugu.

- – 1 baino balio handiagoetarako deribatuaren balioa negatiboa da
- 1 baino balio handiagoetarako deribatuaren balioa positiboa da
- –1 eta 0 arteko balioetarako lehenengo deribatua positiboa da
- 0 eta 1 balioetarako lehenengo deribatua negatiboa da

22. Kalkula ezazu ondorengo funtzioen deribatuaren balioa x =3 puntuan:

a) $y = 3.x^3 - 4.x^2 - 5.x + 34$

b) $y = \dfrac{2x-1}{4x+2}$

Gainera, topa ezazu funtzio bakoitzak puntu horretan duen zuzen ukitzailea.

Erantzuna:

a) $y' = 9x^2 - 8x - 5$, eta beraz, x =3 puntuko zuzen ukitzailea:

$y - 64 = 52(x-3)$

Zuzena (3, 64) puntutik pasatzen baita, eta x=3 puntuan deribatuaren balioa 52 baita.

b) $y' = \dfrac{1.(2x-3) - 2.(x-1)}{(2x-3)^2} = \dfrac{-1}{(2x-3)^2}$, eta beraz, x =3 puntuko zuzen ukitzailea:

$y - \dfrac{5}{14} = \dfrac{-1}{9}(x-3)$

Zuzena (3, $\dfrac{5}{14}$) puntutik pasatzen baita, eta x=3 puntuan deribatuaren balioa $\dfrac{-1}{9}$ baita

23. Bilatu ondorengo funtzioentzat deribatua zero egiten duten puntuak:

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$ **b)** $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

Erantzuna:

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x+3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3-x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x-8) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = \dfrac{8}{3} \rightarrow y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

24. Bilatu ondorengo kurbaren zuzen ukitzaileak abzisako 0 eta 1 puntuetan:

$$y = \frac{5x^3 + 7.x^2 - 16x}{x-2}$$

Erantzuna:

$$y' = \frac{15x^2.(x-2) - 1.(5x^3)}{(x-2)^2} = \frac{10x^3 - 30x^2}{(x-2)^4}$$, eta

$$y'(0) = 0$$
$$y'(1) = -20$$

Beraz x= 0 eta x = 1 puntuetako zuzen ukitzaileak:

$$y = 0$$
$$y + 4 = -20(x-1)$$

25. Topatu ondorengo funtzioaren balio maximo eta minimoak:

$$y = x^3 - 6.x^2 + 9x + 5$$

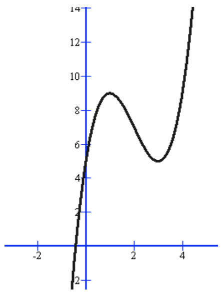
Erantzuna:
Funtzioa deribatu eta zerorekin berdintzen badugu:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

Eta ekuazioa ebatziz:
x= 1, x= 3
Bigarren deribatuak esango digu maximoa ala minimoa den

$$y'' = 6x - 12$$

Beraz, $y''(1) = -6$ denez, x= 1 puntuan funtzioak maximo bat du eta $y''(3) = 6$ denez, x= 3 puntuan du minimoa. Funtzioaren irudikapen grafikoan argi ikusten da.



26. Kalkulatu *k* balioa, ondorengo funtzioak zuzen ukitzaile horizontaleko puntu bakarra izan dezan: *f* (*x*) = $\frac{e^x}{x^2 + k}$

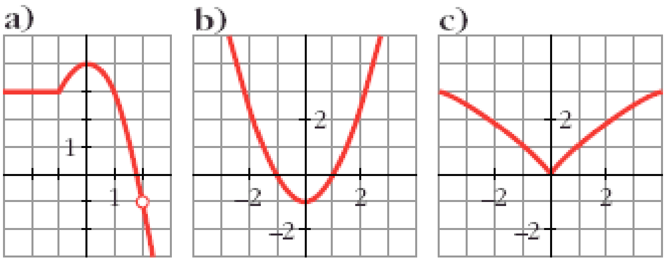
Erantzuna:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+k) - 2xe^x}{(x^2+k)^2} = \frac{(x^2-2x+k)e^x}{(x^2+k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + k = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser $4 - 4k = 0$; es decir, $k = 1$.

27. Esan beheko grafikoetako funtzioetan zein puntutan ez diren deribagarriak. Horietakoren bat deribagarria al da zuzen errealeko puntu guztietan?



Erantzuna:

a) Ez da deribagarria x = –1 puntuan (puntu horretan ertz bat du) ezta x = 2 puntuan ere (funtzioa ez dago definitua puntu horretan).
b) Zuzen errealeko puntu guztietan deribagarria da.
c) Ez da deribagarria x = 0 puntuan (puntu horretan ertz bat du).

28. Lortu ondorengo funtzioen deribatuak:

a) $y = sen(3x) + \cos(2x)$

b) $y = 5x^2 - \dfrac{2}{x}$

c) $y = \ln(3x)$

Erantzuna:

a) $y' = 3.\cos(3x) - 2sen(2x)$

b) $y' = 10x + \dfrac{2}{x^2}$

c) $y' = \frac{1}{x}$

29. Ebatzi ondorengo integralak

a) $\int \dfrac{x^4 - 5.x^2 + 3.x - 4}{x} dx$

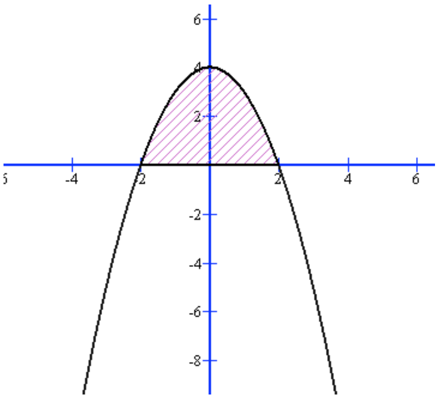
. b) $\int sen2x.dx$

Erantzuna:

$$a)\int \frac{x^4 - 5.x^2 + 3.x - 4}{x}dx = \int x^3 dx - \int 5xdx + \int 3dx - \int \frac{4dx}{x} = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4\ln x + C$$

$$b)\int sen2x.dx = \frac{-\cos(2x)}{2} + C$$

30. $y = -x^2 + 4$ **funtzioaren irudia:**



Kalkula ezazu marratutako azalera Barrow-en formula erabiliz.

Erantzuna:

$$\int_{-2}^{2}(-x^2 + 4x)dx = \frac{32}{3}$$

31. Kalkulatu behean adierazitako kurben artean dagoen azalera:

a) $y = 4 - x^2;\ y = 8 - 2x^2$ **b)** $y = x^2;\ y = 4 - x^2$

Erantzuna:

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son -2 y 2.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

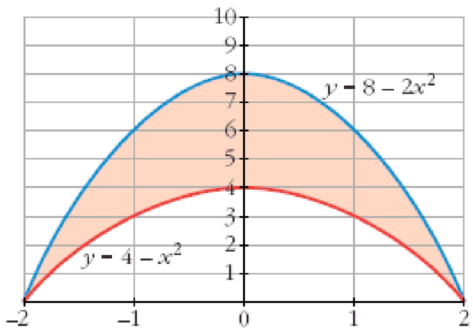
$$G(x) = \int (4 - x^2)dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \dfrac{8}{3} = -\dfrac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \dfrac{16}{3} - \left(-\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$.

Son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$

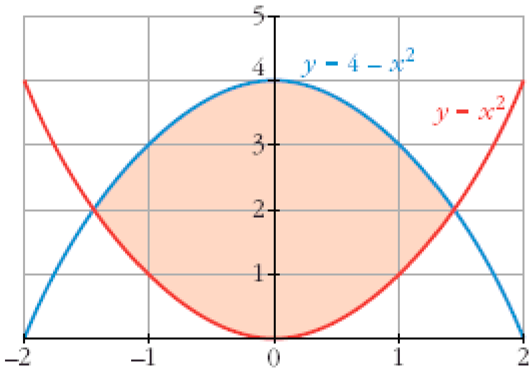
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\,dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.

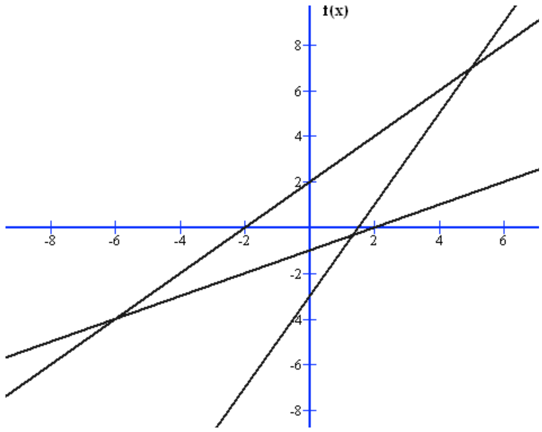


32. Kalkulatu A(-1, 1) eta B(4,3) puntuen arteko distantzia:

Erantzuna:

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$$

33. Hiru zuzenki daude ondorengo grafikoan. Kalkula itzazu malda txikiena duten bi zuzenkien ekuazioak.

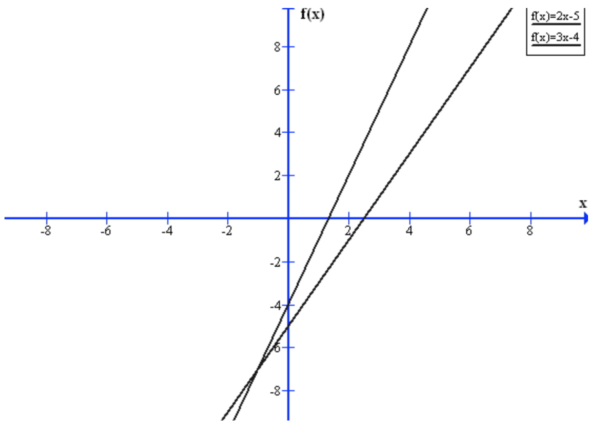


Erantzuna:

Eskatu den zuzenkietako bat (0, -1) eta (2,0) puntuetatik pasatzen denez: $y = \frac{x}{2} - 1$

Bestea (-2,0) eta (2,0) puntuetatik pasatzen denez, ekuazioa: $y = x + 2$

34. y = 2x - 5 eta y = 3x - 4 funtzioak zuzenak dira, beheko grafikoan ikus daitekeen moduan:



a) Zein puntutan ebakitzen dute elkar?
b) Bi zuzenen artean zeinek dauka malda handiagoa? Zeintzuk dira bien maldak?
c) Bi zuzenetako bat (1.000, 2996) puntutik pasatzen al da?

Erantzuna:

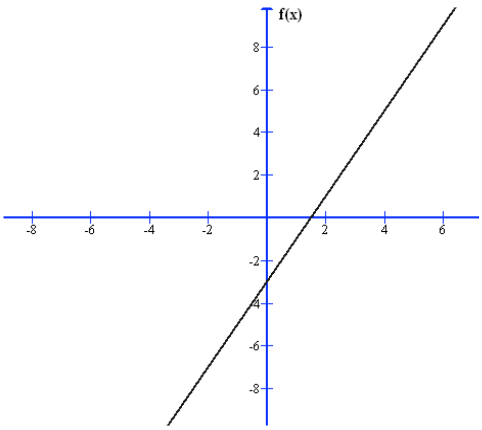
a) Ondorengo sistema ebaztean lortuko dugu bi zuzenen arteko ebakidura-puntua:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$$ eta soluzioak: x = -1 , y=-7, hau da, P(-1, -7)

b) y = 3x – 4 zuzenak du malda handiagoa, eta zuzenen maldak 2 eta 3 dira, hurrenez hurren.

c) y= 3x-4 zuzena pasatzen da (1.000, 2996) puntutik

35. y = 2x – 3 funtzioarena da ondorengo grafikoa:



Kalkulatu:
A) Ardatzekiko ebakidura-puntuak
B) Zuzenaren malda
C) P(5,6) puntutik pasatzen al da?

Erantzuna:
a) Ardatzetako ebakidurak bilatzeko, honela egingo dugu:
x = 0 denean OY ardatza non ebakitzen duen kalkulatuko dugu. Gure kasuan (0, -3)
y = 0 denean OX ardatza non ebakitzen duen kalkulatuko dugu. Gure kasuan (3/2,0)

b) Zuzenaren malda 2 balioak ematen digu

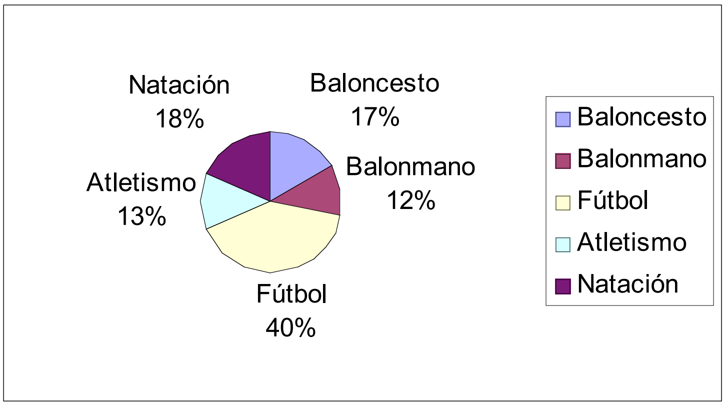
c) Zuzena ez da P(5, 6) puntutik pasatzen

36. Institutu bateko 120 ikasleek ondorengo kirolak praktikatzen dituzte:

Kirolak	**Ikasle kopurua**
Saskibaloia	20
Eskubaloia	14
Futbola	48
Atletismoa	16
Igeriketa	22
	Guztira: 120

Datu hauei dagokien sektore-diagrama marraztu.

Erantzuna:



37. Bonbilla kopuru jakin bat fabrikatzean, batzuk akastunak direla ohartu gara. 100 bonbillako 200 kutxa aztertu dira, eta ondorengo taula estatistikoa burutu da:

Bonbilla akastunak	Kutxa kopurua
	5
2	15
3	38
4	42
5	49
6	32
7	17
8	2

Kalkula ezazu bonbilla akastunen batez bestekoa.

Erantzuna:

Bonbilla akastunak x	Kutxa kopurua f	x. f
1	5	5
2	15	30
3	38	114
4	42	168
5	49	245
6	32	192
7	17	119
8	2	16
Guztira	200	Guztira 889

Batez bestekoa = $\frac{889}{200}$ = 4, 4 bonbilla akastun kutxa bakoitzeko

38. Ikasgela batean berrogei ikasle daude, eta beheko taula honetako banaketari jarraiki antolatzen dira: Aldagaia altuera da.

Altuera-tartea (cm)	Maiztasuna
148,5 - 153,5	2
153,5 - 158,5	4
158,5 - 163,5	11
163,5 - 168,5	14
168,5 - 173,5	5
173,5 - 178,5	4

Kalkulatu: a) Batez besteko aritmetikoa
b) Desbiderapen tipikoa.

Erantzuna:

Altuera-tartea (cm)	x_i	f_i	$f_i.x_i$	$f_i.x_i^2$
148,5 - 153,5	151	2	302	45.602
153,5 - 158,5	156	4	624	97.344
158,5 - 163,5	161	11	1771	285.131
163,5 - 168,5	166	14	2334	385.784
168,5 - 173,5	171	5	855	146.205
173,5 - 178,5	176	4	704	123.904
Guztira		40	6.580	1.083.970

Batez bestekoa = $\bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \dfrac{6580}{40} = 164{,}5cm$

S= Desbideratze tipikoa=

$$\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2 = \sqrt{1.083.970 - (164{,}5)^2} = 39cm$$

39. Bete ezazu ondorengo taula estatistikoa:

Aldagaia (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Maiztasuna (f)	4	4		7	5		7	
Maiztasun absolutua (F)			16		28	38	45	
Maiztasun erlatiboa	0,08		0,16	0,14				

Erantzuna:

Aldagaia (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Maiztasuna (f)	4	4	**8**	7	5	**10**	7	**5**
Maiztasun absolutua (F)	**4**	**8**	16	**23**	28	38	45	**50**
Maiztasun erlatiboa	0,08	**0,08**	0,16	0,14	**0,1**	**0,2**	**0,14**	**0,1**

Taula betetzeko maiztasunaren, maiztasun absolutuaren eta maiztasun erlatiboaren kontzeptuak ezagutu behar dira.

40. Ondorengo datu-taulak nerabe-multzo batek inteligentzia neurtzeko test batean lortutako emaitzak biltzen ditu, tarteetan oinarrituta:

Inteligentzia	Ikasle kopurua
85-90	5
91-95	10
96-100	20
101-105	35
106-110	15
111-115	10

a) Kalkulatu: Batez bestekoa, mediana, moda eta desbideratze tipikoa
b) Marraztu dagokion histograma.

Erantzuna:
a)

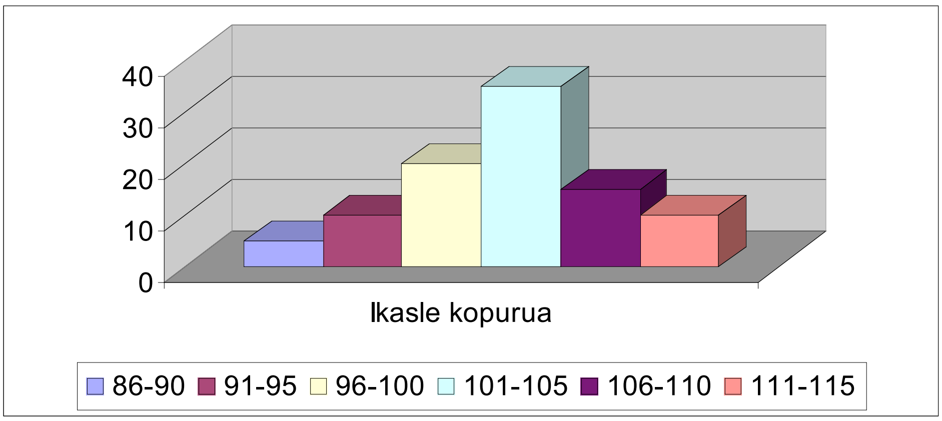
Inteligentzia X_i	Ikasle kopurua F_i	$X_i.F_i$	$(X_i - \overline{X})^2.F_i$
88	5	440	972,594045
93	10	930	800,48809
98	20	1960	311,57618
103	35	3605	38,808315
108	15	1620	549,582135
113	10	1130	1221,68809
	Guztira: 95	Guztira:9685	Guztira:3894,73686

Batez besteko aritmetikoa: $\overline{X} = \dfrac{9685}{95} = 101{,}947$

Moda = 103 (gehien errepikatzen den balioa)

Mediana = 103 (modu sinplifikatuan)

b) Histograma:



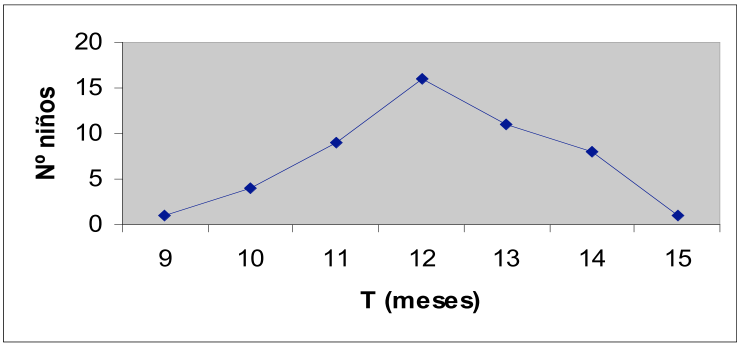
41. Beheko taulak ibiltzen hasteko unean haurrek duten adina azaltzen du.

Adina (hilabeteak)	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Haur kopurua	**1**	**4**	**9**	**16**	**11**	**8**	**1**

a) Marraztu dagokion grafikoa.
b) Kalkulatu batez bestekoa eta desbiderapen tipikoa.
c) Zein da medianadun tartea?

Erantzuna

a)



Respuesta:

b) batez bestekoa = $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{9.1+10.4+11.9+....+14.8+15.1}{50} = 12{,}2 hilabete$

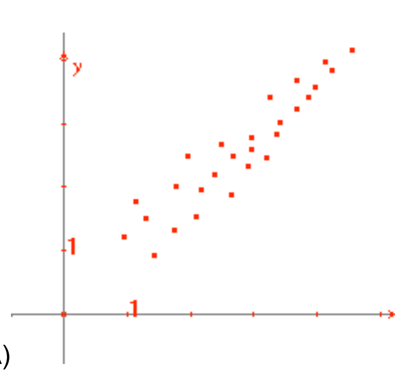
S = Desbideratze tipikoa = $\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = 1{,}29$

c) Medianadun tartea pilatutako maiztasunaren bitartez aurkitzen da.

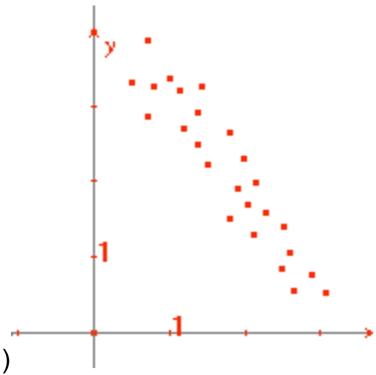
x_i	9	10	11	12	13	14	15
f_i	1	4	9	16	11	8	1
F_i	1	5	14	30	41	49	50

Mediana 12 – 13 hilabeteen tartean dago

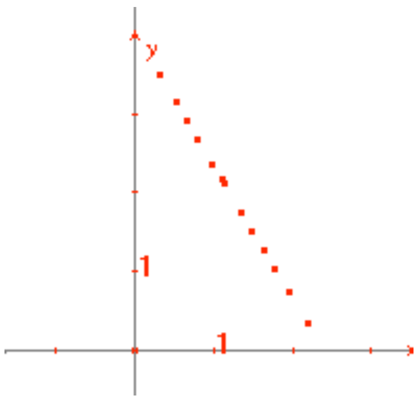
42. Marraz ezazu gutxi gorabehera ondorengo banaketa bidimentsionalen erregresio-zuzena:



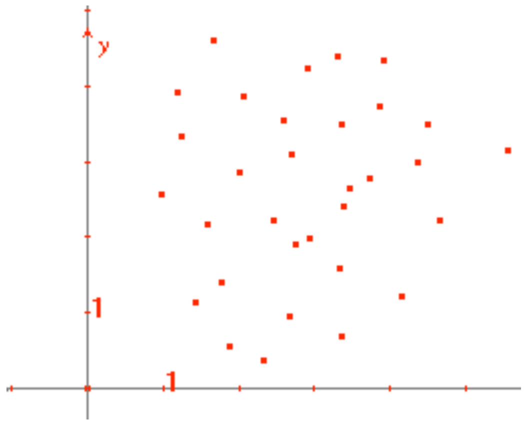
A)



B)



C)

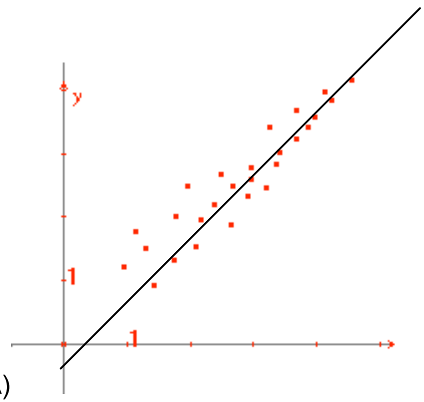


D)

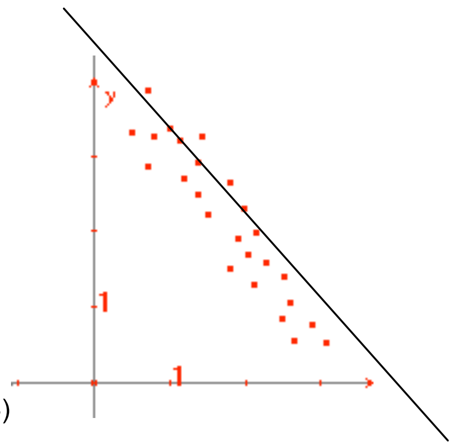
b) Bietatik zeinek du korrelazio positiboa eta zeinek negatiboa?

c) Kasu bakoitzeko korrelazio-koefizientearen gutxi gorabeherako balio bat ematen saiatu.

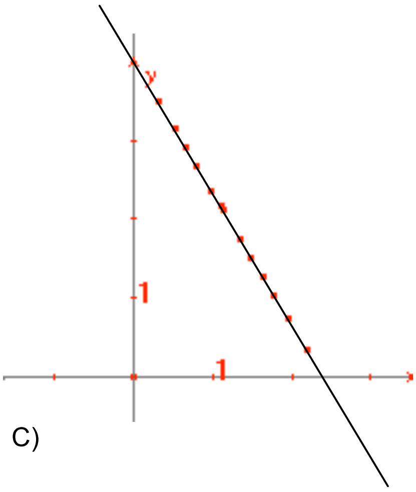
Erantzuna:



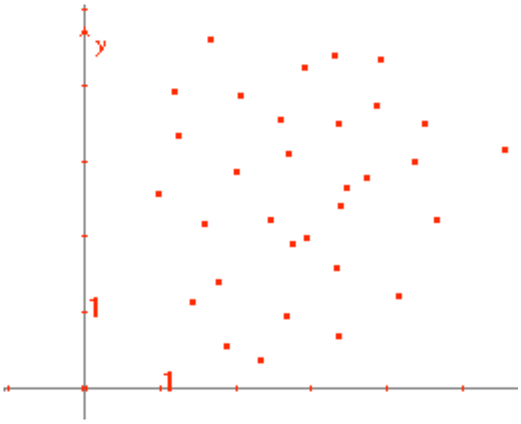
A)



B)



C)

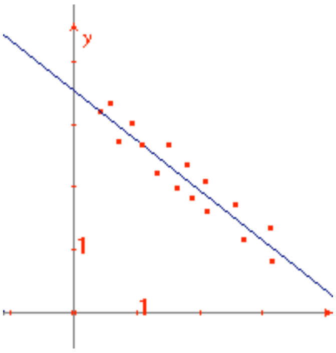


D)

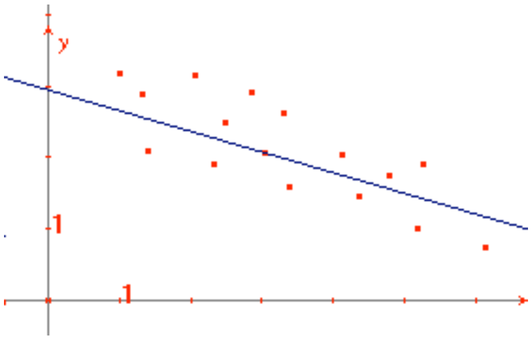
b. B) eta C) atalek korrelazio negatiboa dute eta A) atalak positiboa. D) atalean ez dago inolako korrelaziorik.

c. A) korrelazioa 0,85 ingurukoa da
B) korrelazioa -0,85 ingurukoa da
C) korrelazioa -1 da (funtzio-dependentzia bat badago)
D) korrelazioa zero da.

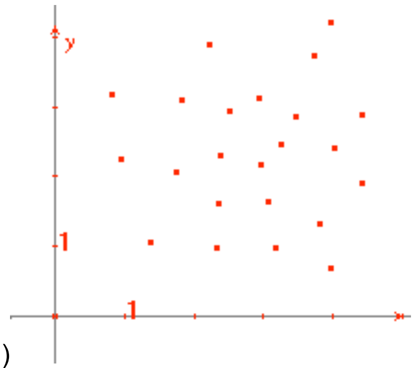
43. Ondorengo kasu bakoitzean puntu-hodei bat eta horri dagokion erregresio-zuzena ageri dira. Korrelazio-koefizienteak
a) r=0 ; b) r= - 0,96 ; r= -0,6 ; r= 0,8 ; r= 0,95 direla jakinik,
Lotu bakoitzari dagokion puntu-hodeiarekin.



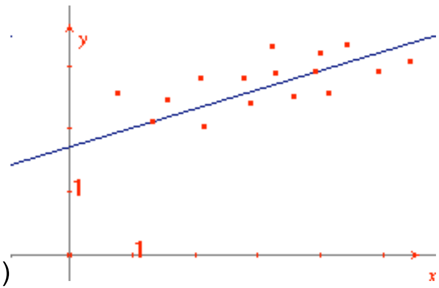
A)



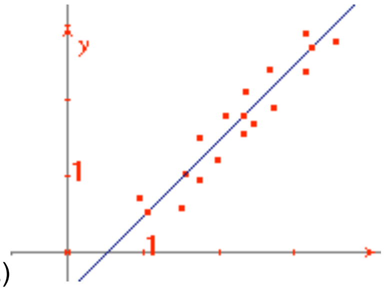
B)



C)

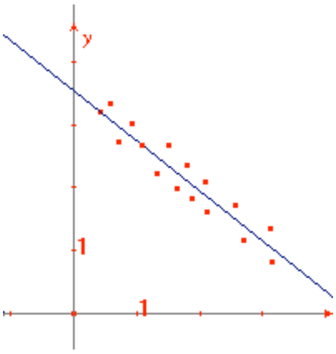


D)

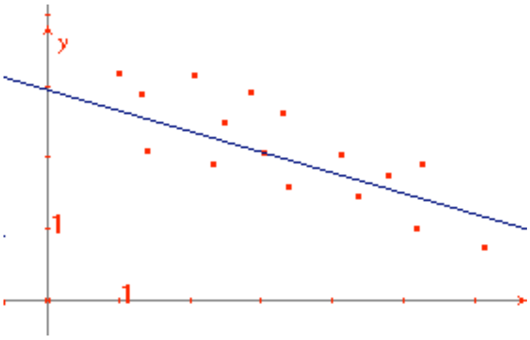


E)

Erantzuna:

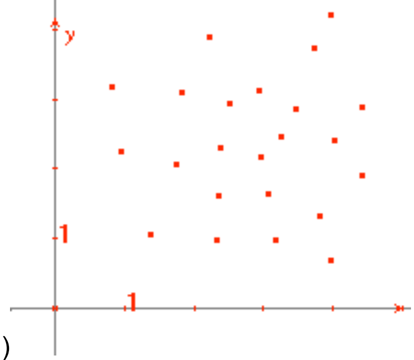


B)

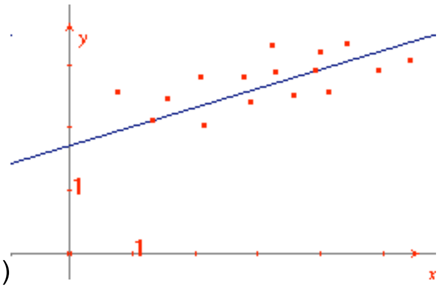


B)

R = -0,96 (korrelazioa indartsua da) r = -0,6 (ez dago korrelazio handirik, baina negatiboa da)

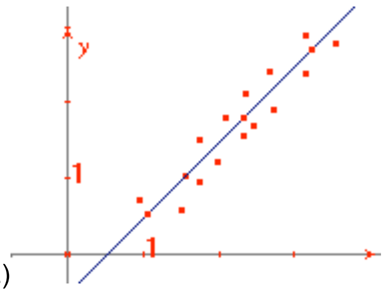


C)



D)

R = 0 (ez dago korrelaziorik) r = 0,8



E)

r = 0,95 (aurreko kasuan baino hurbilago dago puntu-hodeia erregresio-zuzenetik)

44. Lehen mailako lehenengo hamabost taldeek beheko emaitzak lortu zituzten liga amaieran.

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G	20	22	20	17	17	14	12	13	11	10	10	12	11	11	11
E	9	5	8	8	4	9	11	8	11	13	12	8	8	7	6
P	5	7	6	9	13	11	11	13	12	11	12	14	15	15	17

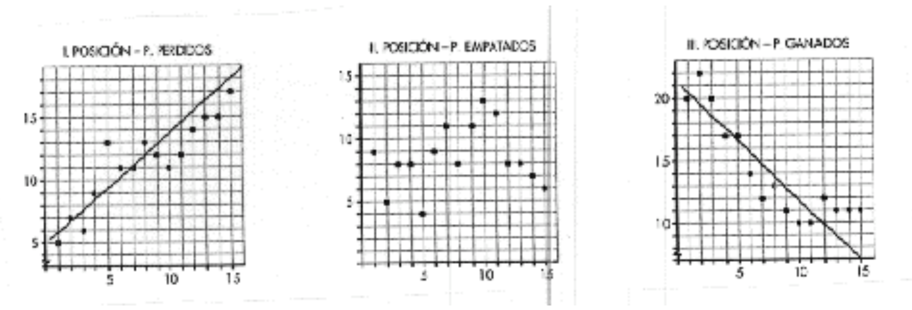
C: Sailkapenean lortutako postua.
G: Irabazitako partida kopurua.
E: Berdindutako partida kopurua.
P: Galdutako partida kopurua.

a) Marraztu puntu-hodeiak, eta adierazi erlazio hauexek:
I. kasua: C eta P
II. kasua: C eta E
III. kasua: C eta G

b) Adierazi, horrelakorik baldin badago, hiru kasuetako bakoitzean dagoen korrelazio mota.

Erantzuna:

a) Hauek dira kasu bakoitzerako puntu-hodeiak:



b) Ikuste hutsarekin jakin daiteke I eta III. kasuetan dagoela bakarrik korrelazioa.

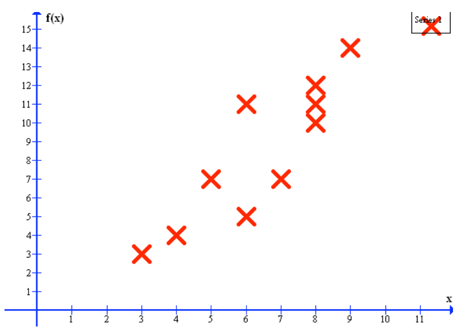
I. kasuan korrelazioa positiboa da, III. kasuan berriz korrelazioa negatiboa da.

45. 10 ikasleren notak, azterketa prestatzen emandako orduak, azterketaren aurreko egunetan Interneten konektatuta pasa zituzten orduak eta bakoitzaren neurria agertzen ditu beheko taulak.
Adierazi kasu bakoitza puntu-hodeia erabiliz, aldagaietako bat beti lortu den nota izanik eta beste aldagaia txandatuz.

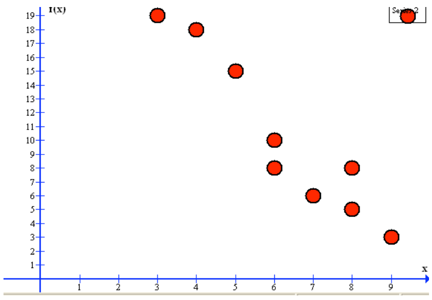
Nota	3	4	5	6	6	7	8	8	8	9
Ikasketa-orduak	3	4	7	11	5	7	10	11	12	14
Internet orduak	19	18	15	10	8	6	5	5	8	3
Altuera (cm)	156	167	170	170	172	166	179	167	158	167

Erantzuna:

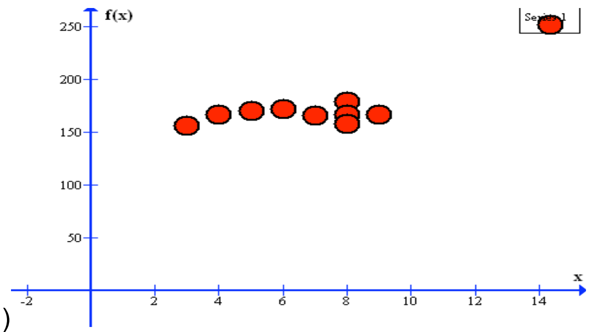
Nota / ikasketa-orduak



Nota/ Internet orduak



Orduak / altuera (cm)



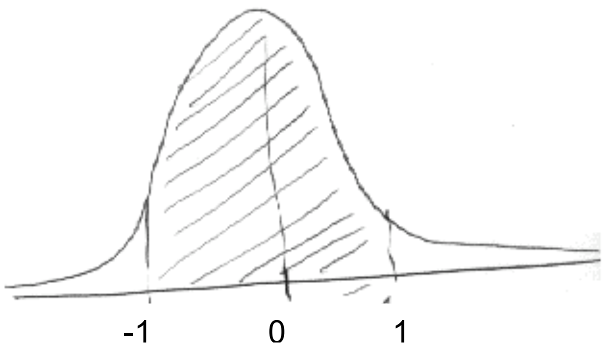
46. Populazio bateko pertsonen pisuari dagokion banaketa normalean batez bestekoa 70 Kg da eta desbiderapen tipikoa 6 Kg. 6.000 pertsonako populazio baterako, kalkulatu zenbat pertsonak izango duen 64 eta 76 Kg. arteko pisua.

Erantzuna:

Datuak tipifikatu eta honakoa lortu dugu:

$$x_1 = \frac{64-70}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{76-70}{6} = 1$$



Taulak ikusita badakigu -1 eta 1 artean dagoen pertsonen portzentajea 2 (0'8413 - 0'5) = 0,6826 dela.

6.000 pertsona direnez, emaitza honakoa izango da: 6.000 x 0,6826 ≠ 4.096 pertsona.

47. Bidezko dado bat badugu eta 50 aldiz jaurtitzen badugu:
Zenbateko probabilitatea dago "1" zenbakia 10 aldiz baino gehiagotan ateratzeko?

Erantzuna:

Banaketa binomialari dagokio

a) Llamamos x = "nº de veces que sale el 1"; así, x es $B\left(50;\ \frac{1}{6}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = 50 \cdot \frac{1}{6} = 8{,}33$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 2{,}64$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50;\ \frac{1}{6}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(8{,}33;\ 2{,}64) \rightarrow z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$P[x > 10] = P[x' \geq 10{,}5] = P\left[z \geq \frac{10{,}5 - 8{,}33}{2{,}64}\right] = P[z \geq 0{,}82] = 1 - P[z < 0{,}82] =$$

$$= 1 - 0{,}7939 = 0{,}2061$$

48. Inteligentzia proba batek 10 galdera ditu, horietako bakoitzak 4 erantzun ditu, baina bakarra da zuzena. Pertsona batek ausaz erantzun ditu hamar galderak. Kalkulatu:

a) Lau galdera asmatzeko duen probabilitatea.
b) Gutxienez zortzi galdera asmatzeko probabilitatea.

Erantzuna:

Asmatzeko probabilitatea honakoa da: 1/4 = 0'25. Beraz, p = 0'25 eta q = 1 – p = 0'75

Banaketa binomiala da: B (10; 0,25):

a) p (4 asmatzea) = $\binom{10}{4}.0{,}25^4.0{,}75^6 = 0{,}1460$

b) p (gutxienez 8 asmatzea) = p(x=8) + p(x=9)+p(x=10)

$$= \binom{10}{8}.0{,}25^8.0{,}75^2 + \binom{10}{9}.0{,}25^9.0{,}75 + \binom{10}{10}.0{,}25^{10} = 0{,}005$$

49. Bi dado kubiko jaurti eta bakoitzean irten den zenbakia behatuko dugu. Kalkulatu:
a) Bi dadoetan zenbaki bera ateratzeko probabilitatea.
b) Atera diren bi zenbakien batura 7 izateko probabilitatea.
c) Atera diren bi zenbakien biderkadura 12 izateko probabilitatea.

Erantzuna:

a) Erraz ikus daitekeenez, 36 kasu posible daude: (1,1),(1,2)...(6,5) eta (6,6)
Bi zenbakiak berdinak izatearen probabilitatea: 6/36 = 1/6; izan ere, sei dira kasu posibleak: (1,1); (2,2);... (6,6)

b) Batura 7 izango da soilik kasu hauetan: (1,6); (6, 1); (2, 5); (5,2);(3, 4) eta (4,3). Aldeko kasuak, beraz, guztira 6 dira. Hortaz, eskatutako probabilitatea: 6/36= 1/6

c) Biderkadura 12 izango da soilik kasu hauetan: (2, 6); (6,2); (3,4) eta (4,3).
Hortaz, 4 aukera daude. Eskatutako probabilitatea: 4/36 = 1/9

50. 12 bola gorri, 3 bola urdin eta 2 zuri ditu kutxa batek.
Edozein bola aterako dugu. Zein da bola hori gorria izateko probabilitatea?

Erantzuna:
Guztira 17 bola ditugu, eta horietatik 12 direnez gorriak, eskatutako probabilitatea P=12/17 da.

51. Bi dado aldi berean jaurtitzeko ausazko esperientzian, zein dira esperientzia horretako oinarrizko gertakariak?

Erantzuna:

36 kasu posible ditugu, (1,1),(1,2)...(6,5) eta (6,6), oinarrizko gertakari direnak, hain zuzen ere.

52. Bi txanpon aldi berean jaurtiko ditugu. Zein dira esperientzia horren oinarrizko gertakariak?

Erantzuna:
Lau kasu posible ditugu: (b,+),(+,b),(b,b) eta (+,+)

53. Hiru txanpon aldi berean jaurtiko ditugu. Zein dira esperientzia horren oinarrizko gertakariak?

Erantzuna:
Zortzi kasu posible ditugu: (b,b,b),(b,b,+),.......eta (+,+,+)

54. Kutxa batean bola gorri 1 eta 2 bola zuri ditugu.
Ausaz bi bola aterako ditugu. Zein da bi bolak zuriak izateko probabilitatea?

Erantzuna:
Kasu posible guztiak kalkulatzen baditugu, hauxe izango dugu:
(g,z1), (g,z2),(z1,z2) (hiru kasu ditugu)
Aldeko kasuen kopurua 1 denez, P = 1/3 izango da.

55. Hiru txanpon bota eta zein da gutxienez binper bat lortzeko probabilitatea?

Erantzuna:

Gertaera posibleak = {(+,+,+); (+,c,c); (c,+,c); (c,c,+); (c,+,+); (+,+,c); (+,c,+); (c,c,c,)}

Ikus daitekeen moduan, kasu guztietan ateratzen da binper bat, kasu batean izan ezik, beraz:

$$P = \frac{7}{8}$$

56. Kutxa batean 8 bola zuri eta 4 gorri daude. Lehenik bola bat atera eta, kutxara berriro sartu gabe, bigarren bola bat hartu dugu.

Kalkulatu honako probabilitate hauek:

a) Bi bolak zuriak izatekoa.
b) Bi bolak gorriak izatekoa.

Erantzuna:

a) $p(B_1 \text{ y } B_2) = p(B_1).p(B_2/B_1) = \frac{8}{12}.\frac{7}{11}$

b) $p(R_1 \text{ y } R_2) = p(R_1).p(R_2/R_1) = \frac{4}{12}.\frac{3}{11}$

57. Bidezko bi dado jaurtitzean, zein da ateratako zenbakien arteko kendura 3 izateko probabilitatea?

Erantzuna:

Hacemos una tabla para la diferencia de resultados:

1^er^ DADO / 2º DADO

–	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P[\text{DIFERENCIA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

58. Bost txanpon jaurtiz gero, kalkulatu ondoko probabilitateak:
a) 5 binper lortzekoa.
b) Aurkiren bat lortzekoa.

Erantzuna:

a) $P[5 \text{ CRUCES}] = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125 \approx 0{,}031$

b) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA}] = 1 - P[5 \text{ CRUCES}] = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875 \approx 0{,}969$

59. Ikasgela batean dauden ikasleetatik hogei mutilak dira eta hamar neskak. Mutilen erdiak eta nesken erdiak gainditu dute matematikako irakasgaia. Kalkulatu ausaz hautatutako pertsona batek ondorengoak betetzeko dagoen probabilitatea:
a) Neska izatea edo matematika gainditutakoa izatea.
b) Matematika gainditu ez duen mutila izatea.
c) Mutila dela jakinik, zenbateko probabilitatea dago matematika gainditu duenetakoa izateko?

Erantzuna:

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

a) $P[\text{alumna} \cup \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumna}] + P[\text{aprueba mat.}] -$

$- P[\text{alumna} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) $P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $P[\text{aprueba mat./alumno}] = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

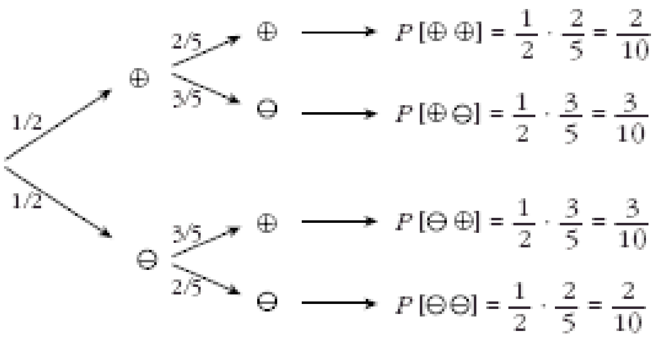
60. Kutxa batean zenbakiz markatutako sei bola daude, horietako hiru zenbaki positiboekin markatuak eta beste hiruak zenbaki negatiboekin. Bola bat ateratzen da, eta gero beste bat, aurrekoa itzuli gabe.

a) Kalkulatu eskuratutako zenbakien biderkadura positiboa izateko probabilitatea.

b) Kalkulatu eskuratutako zenbakien biderkadura negatiboa izateko probabilitatea.

Erantzuna:
Kontuan izan behar dugu zeinu bereko bi zenbakiren arteko biderkadura beti positiboa dela, eta kontrako zeinuko bi zenbakiren artekoa, berriz, negatiboa.

Hacemos un diagrama en árbol:



a) $P[\oplus\,\oplus] + P[-\,-] = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

b) $P[\oplus\,-] + P[-\,\oplus] = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

PROBARAKO ADIBIDEA

Proposatu diren sei ariketetatik bost erantzun

(ariketa bakoitzak: 2 pt.)

1. 75 pilako lagin batetik beheko datu hauek lortu dira iraupenari dagokionez

Denbora (ordutan)	Pila kopurua
[25, 30)	3
[30,35)	5
[35, 40)	20
[40,45)	30
[45,50)	12
[50,55)	5

a) Adierazi datuak histograma batean
b) Kalkulatu batez bestekoa eta desbideratze tipikoa.

2. Makina batek fabrikatutako torlojuen % 2ak akatsak ditu. 2.000 torlojuko multzo batean, zein da 50 akasdun baino gutxiago egoteko probabilitatea?
(Oharra: Banaketa normalaren taula erabili)

3. Gasolina edo gasolioa erretzen dituzten bi autoren artean bat hautatu nahi du erosle batek. Lehenengoak 9 litro kontsumitzen ditu 100 km-tan. Bigarrenak 6 litro 100 km-tan. Gasolioa erretzen duen autoa gasolinakoa baino 4.000 euro garestiagoa da. Gasolinaren litroko prezioa 0,71 euro eta gasolioarena 0,42 euro direla jakinik:
Kalkulatu zein den errentagarriagoa, egindako kilometroen arabera. Azaldu arrazoiak.

4. Funtzio hau dugularik: $y = 3x^2 - 2x - 2$

a) Kalkulatu kurba horrek x = 3 puntuan duen zuzen ukitzailea.
b) Zein da funtzioaren balio minimoa?
c) Funtzioa marrazten saiatu.

5. Bederatzi bola gorri eta bost bola beltz dituen kutxa batetik bi bola ateratzen dira bata bestearen atzetik (lehenik bat ateratzen da, eta kutxara itzuli baino lehen, bigarren ateratzen da). Kalkulatu kasu hauetarako probabilitatea:

a) Bi bolak beltzak izatekoa.
b) Bi bolak gorriak izatekoa.
c) Lehena gorria eta bigarrena beltza izatekoa.

6. Kalkulatu $y = x^2$ **kurbak, OX ardatzak eta x= 2 eta x= 6 ordenatuek mugatzen duten azalera.** Irudika ezazu egindakoa.

PROBARAKO ADIBIDEEN ERANTZUNAK

Proposatu diren sei ariketetatik bost erantzun

(ariketa bakoitzak: 2 pt.)

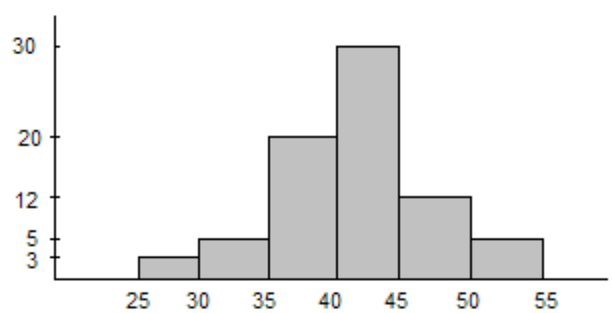
1. 75 pilako lagin batetik beheko datu hauek lortu dira iraupenari dagokionez

Denbora (ordutan)	Pila kopurua
[25, 30)	3
[30,35)	5
[35, 40)	20
[40,45)	30
[45,50)	12
[50,55)	5

a) Adierazi datuak histograma batean
b) Kalkulatu batez bestekoa eta desbideratze tipikoa.

Erantzuna:

A)



B)

X_i	f_i
27´5	3
32´5	5
37´5	20
42´5	30
47´5	12
52´5	5

$$\overline{X} = \frac{(27'5)\cdot 3 + (32'5)\cdot 5 + ... + (52'5)\cdot 5}{3+5+20+....+5} = \frac{3102'5}{75} = 41'36 \; ordu$$

S (desbideratze tipikoa) = $\sqrt{\dfrac{(27'5-41'36)^2\cdot 3+......+(52'5-41'36)^2\cdot 5}{75}}=5'63$

Oharra: Kalkulu hauek egiteko kalkulagailua erabili da modu estatistikoan.

2. Makina batek fabrikatutako torlojuen % 2ak akatsak ditu. 2.000 torlojuko multzo batean, zein da 50 akasdun baino gutxiago egoteko probabilitatea?

(Oharra: Banaketa normalaren taula erabili)

Erantzuna:

Banaketa binomiala da B (2000;0'02)

Batez bestekoa = n · p = 40
Desbideratze tipikoa = $\sqrt{n\cdot p\cdot q}$ = 6´26

n · p = 40 > 5 eta n · p > 5
Beraz, banaketa normalera gerturatzen dela esan dezakegu N (40 ; 6´26)

$$P(x<50)=P\left(z\leq\frac{50-40}{6'26}\right)=P(z\leq 1'59)$$

Horrenbestez, taulan begiratuz gero,

$$P(z\leq 1'59)=0'9441$$

Ondorioa: torloju akasdunak 50 baino gutxiago izateko probabilitatea 0´9441 da.

3. Gasolina edo gasolioa erretzen dituzten bi autoren artean bat hautatu nahi du erosle batek. Lehenengoak 9 litro kontsumitzen ditu 100 km-tan. Bigarrenak 6 litro 100 km-tan. Gasolioa erretzen duen autoa gasolinakoa baino 4.000 euro garestiagoa da. Gasolinaren litroko prezioa 0,71 euro eta gasolioarena 0,42 euro direla jakinik:

Kalkulatu zein den errentagarriagoa, egindako kilometroen arabera. Azaldu arrazoiak.

Erantzuna:

Gasolioa erretzen duenak 0,06 l/km gastatzen du
Gasolina erretzen duenak 0,09 l/km gastatzen du

C_1 = X (km) egin ondoren gasolioko autoaren gastua = 4.000 + (0´06) · 0´42 · X

C_2 = X (km) egin ondoren gasolinako autoaren gastua = (0´09) · 0´71 · X

Beraz:
C_1 = = 4.000 + 0´0252X

$C_2 = 0{,}0639X$

Ekuazio-sistema hau ebazteko, $C_1 = C_2$ noiz izango den kalkulatuko dugu, eta hortik baten eta bestearen arteko errentagarritasunaren muga:

$$X \oplus 103.359{,}17 \text{ km}$$

4. Funtzio hau dugularik: $y = 3x^2 - 2x - 2$

a) Kalkulatu kurba horrek x = 3 puntuan duen zuzen ukitzailea.
b) Zein da funtzioaren balio minimoa?
c) Funtzioa marrazten saiatu.

Erantzuna:

a) Kalkulatu kurba horrek x = 3 puntuan duen zuzen ukitzailea.

$Y' = 6x-2$ $\quad$ $Y(3) = 27-6-2 = 19$
$Y'(3) = 16$

Zuzen ukitzailea: $\boxed{y - 19 = 16\,(x - 3)}$

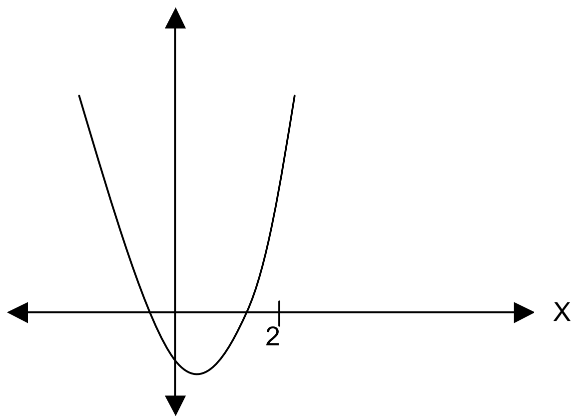
b) Zein da funtzioaren balio minimoa?

$Y' = 6x-2=0$

$$X = 1/3 \longrightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Minimoa } \left(\frac{1}{3}\,,\, -\frac{7}{3}\right)$$

c) Funtzioa marrazten saiatu.



5. Bederatzi bola gorri eta bost bola beltz dituen kutxa batetik bi bola ateratzen dira bata bestearen atzetik (lehenik bat ateratzen da, eta kutxara itzuli baino lehen, bigarren ateratzen da). Kalkulatu kasu hauetarako probabilitatea:

a) Bi bolak beltzak izatekoa.
b) Bi bolak gorriak izatekoa.
c) Lehena gorria eta bigarrena beltza izatekoa.

Erantzuna:

A) $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 / N_1) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{10}{91}$

B) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{36}{91}$

C) $P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2 / R_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$

6. Kalkulatu $y = x^2$ kurbak, OX ardatzak eta x= 2 eta x= 6 ordenatuek mugatzen duten azalera. Irudika ezazu egindakoa.

Erantzuna:

Barrow-en teorema aplikatuta kalkula daiteke azalera:

$$A = \int_2^6 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$

PROBAKO GALDEREN ETA EZAGUTZA ADIERAZLEEN ARTEKO ELKARREKIKOTASUNAK

Galdera	Ezagutza-adierazlea
1	3.1 eta 3.2
2	3.5 eta 3.6
3	1.4
4	2.2, 2.3, 2.8 eta 2.9
5	3.7, 3.8 eta 3.9
6	2.12 eta 2.13

PROGRAMAZIOA ETA IKASKETARAKO BALIABIDEAK

• PROGRAMAZIOA

Hamahiru ikasketa-unitatetan antolatu da modulu hau. Hiru eduki-blokeetan agertzen diren eduki guztiak jorratzen dira ikasketa-unitateotan. Lehenengo lau unitateak oinarrizkoak eta funtsezkoak dira gainontzekoak ulertzeko, funtzio-esparruko alderdiak sakontzen baitira gero. Hurrengo hiru unitateak funtzioen ariketen ingurukoak dira, eta esparru horretan funtsezkoak diren alderdiak ikasiko dira: funtzioen kontzeptua, limiteak, kurben marrazketa, deribatua eta integrala kontzeptuak, eta euren aplikazioak. Azken bost unitateetan estatistikaren eta zoriaren inguruko edukiak landuko dira, matematikan nahiz gure inguruan garrantzia hartzen ari diren esparruak baitira.

Moduluaren zentzua guztiz praktikoa da, eta funtzio anitzekoa. Ariketen ebazpenean oinarritutakoa da. Modulu honetako jarduerak azaltzerakoan kontuan izan behar dugu matematika dela beste hainbat esparrutan sakontzeko oinarrizko tresna.

Jarraian laburki azaltzen dira ikasketa-unitateak. Moduluaren jarraipen logikoa egiteko ikasketa-unitateak iradokitako ordenan jorratzea gomendatzen da, baina estatistika eta probabilitateko blokeko unitateekin has daiteke inolako arazorik gabe. Unitateetan murgildu aurretik, komeni da irakasle bakoitzak beharrezkotzat jotzen dituen kontzeptuak eta prozedurak errepasatzeko astia hartzea.

Eduki-blokeak	Ikasketa Unitateak	Izendapena	Ordu kopurua
1. Aritmetika eta Aljebra	IU 1	Zenbakiak eta eragiketak	6 ordu
	IU 2	Lengoaia aljebraikoa eta aplikazioak	7 ordu
	IU 3	Matrizeak eta Determinanteak	4 ordu
	IU 4	Ekuazio-sistemak eta euren ebazpena	5 ordu
2. Analisi matematikoa	IU 5	Funtzioen mundua	4 ordu
	IU 6	Zenbait funtzioren ikasketa	5 ordu
	IU 7	Deribatuen mundua eta aplikazioak	14 ordu
	IU 8	Integralen mundua eta aplikazioak	10 ordu
3. Estatistika eta probabilitatea	IU 9	Dimentsio bateko estatistikarako sarrera: parametro estatistikoak eta horien esanahia	6 ordu
	IU 10	Bi dimentsioko estatistikarako sarrera: korrelazioa eta erregresio zuzena	6 ordu
	IU 11	Probabilitate banaketa diskretuak. Banaketa binomiala	5 ordu
	IU 12	Banaketa normala. Banaketa normalaren bidez binomialaren hurbilketa	8 ordu
	IU 13	Probabilitaterako sarrera. Baldintzatutako probabilitatea eta konposatua	10 ordu

1. Ikasketa Unitatea: ZENBAKIAK ETA ERAGIKETAK (6 ordu)

Geroko garapenerako funtsezkoa da unitate hau. Bertan lantzen diren zenbakiak eta euren arteko erlazioak trebetasunez erabiltzea da helburuetako bat. Testuinguru ezberdinetan zenbaki osoen, arrazionalen eta irrazionalen erabilera iaioa ezinbestekoa da. Gainera, garrantzitsua izango da oso zenbaki handiekin edo oso txikiekin lan egiteko ikasleek notazio zientifikoari buruzko gaitasuna garatzea.

Zenbaki-mota bakoitza ongi erabiltzen eta zuzen errealean egoki kokatzen jakin behar dute ikasleek. Zenbaki horiekin burututako ohiko eragiketak segurtasunez eta konfiantzaz burutu behar dira. Unitate honetan eragiketa berri bat sartu dute: logaritmoa. Kontzeptu hau ongi ulertu eta egoki aurkezteko, funtzio esponentzialarekin eta notazio zientifikoa duten zenbakien irudikapenarekin duen lotura azaltzea komenigarria da.

Unitate osoan kalkulagailua zentzuz erabiliz gero kalkulu asko aurreztuko dizkigu, eta bestelako prozesuetan buru-belarri jardun ahal izango dugu. Unitate honen amaieran progresio aritmetikoak eta geometrikoak jorratuko dira, eta eduki hauetan asko sakonduko ez badugu ere, bien artean dauden ezberdintasunak ikasiko ditugu, hori baita gehien interesatzen zaiguna. Progresio bakoitzeko gai orokorra kalkulatzea izan daiteke zenbakizko segiden kontzeptua ulertarazteko abiapuntua.

Zenbakiak jorratzen dituzten ariketa-mota anitz ebazteko balio behar du unitate honek. Matematikan aurrera egiteko beharrezkoak diren oinarrizko tresnez hornitzea da unitate honen helburua.

2. Ikasketa Unitatea: LENGOAIA ALJEBRAIKOA ETA APLIKAZIOAK (7 ordu)

Aljebran eta bere metodoetan sakontzen da unitate honetan. Unitatea hasteko, gure lengoaiaren eta aljebrako lengoaiaren arteko loturak aztertuko dira. Gero adierazpen aljebraikoak eta adierazpen aljebraiko mota zehatz bat (polinomioak) ikasiko dira. Hortik aurrera ekuazioa eta ekuazioen ebazpenak jorratuko dira. Ekuazioa ebazteak zer esan nahi duen eta ebazteko teknikak zeintzuk diren jakitea oso garrantzitsua da. Unitatearen azken atala bigarren mailako ekuazioen ebazpenak burutzeko utzi da. Unitate honetako zentzua oso instrumentala da, hau da, ekuazioak (lehenengo eta bigarren mailakoak) ebazteko tresna ahaltsua da aljebra, baita planteamendu aljebraikoak dituzten ariketen ebazpenerako ere. Ariketak ebazterakoan alferrik galdu behar ez dugun tresna ahaltsua da aljebra.

3. Ikasketa Unitatea: MATRIZEAK ETA DETERMINANTEAK (4 ordu)

Oso zentzu instrumentaleko unitatea da; baina, matrizeen eta determinanteen kontzeptuak ongi ulertzea oso garrantzizkoa da, bestelako edukiak ulertzeko ezinbestekoak baitira, hala nola: sistemen ebazpena (4. IU). Matrizeekin oinarrizko eragiketak (batuketak, kenketak, eta zenbaki eskalar batengatik biderkatzeak) egiten iaioa izan behar du ikasleak, eta gainera, 3x3 determinanteak Sarrus-en erregelaren bidez kalkulatzen ere jakin beharko dute. Eragiketa hauen bidez sistema linealak ebatzi ahal izango ditugu matrizeak erabiliz.

4. Ikasketa Unitatea: EKUAZIO SISTEMAK ETA EUREN EBAZPENA (5 ordu)

Algebraren alorreko unitate garrantzitsua da. Ekuazio-sistemak ebazteak zer adierazten duen ulertu behar dugu lehenik. Sistema bateragarrien eta bateraezinen arteko ezberdintasuna ulertu. Bi sistema baliokide zer diren jakin. Sistema batek soluzio bakarra (mugatua) edo infinitu soluzio (mugagabea) izan ditzakeela ulertu. Izaera instrumentaleko unitatea da: Ekuazio-sistemak prozedura ezberdinen bidez ebaztea da helburua; baina Gauss-en metodoa bereziki azpimarratuz. Ariketak aljebraren kontzeptuak erabiliz planteatu eta ebaztea da unitate honen alderdi nagusienetakoa.

5. Ikasketa Unitatea: FUNTZIOEN MUNDUA (4 ordu)

Funtzioaren kontzeptua ulertzeko ezinbesteko unitatea da. Beste hainbat ikasketa-unitaterekin duen lotura oso argia da, hurrengo hiru ikasketa-unitateekin bereziki. Gaia ongi ikasteko grafikoetako zenbait lengoaia (hitzezkoa, tabularra, grafikoa eta aljebraikoa) eta lengoaia batetik bestera itzultzeko gaitasuna trebatu behar dira.

Funtzioek aldi berean aldatzen diren bi magnituderen arteko lotura ematen dutela argi geratu behar zaigu unitate honetan. Modu berean, grafikoetako ezaugarri orokorrak (hazkundea, beherapena, jarraitasuna, etab.) eta funtzioen eremuak ikastea ere garrantzizkoa da. Ahal dela, funtzioak hainbat testuingurutan agertzen dituzten jarduerak eta ariketak proposatu behar dira.

6. Ikasketa Unitatea: ZENBAIT FUNTZIOREN IKASKETA (5 ordu)

Hainbat funtzio-mota sakonean aztertzen dira ikasketa-unitate honetan, bereziki funtzio linealak, koadratikoak, eta ez hain sakonean funtzio esponentzialak eta logaritmikoak.

Funtzio linealak eta koadratikoak aurreko ikastaldietan ikusitakoak badira ere, unitate honetan sakonago ikasiko ditugu. Unitatean zehar ikasiko ditugun funtzioen alderdi esanguratsuenak ulertzen saiatuko gara: hazkundea, beherapena, joerak, maximoak, minimoak, etab. Funtzioen oinarrizko ezaugarri batzuk ezagutu beharko dira nahitaez: aldizkakotasuna, funtzioaren eremua, heina, etab.

7. Ikasketa Unitatea: DERIBATUEN MUNDUA ETA APLIKAZIOAK (14 ordu)

Unitate guztietarako (ez soilik analisi matematikoaren inguruko unitateetarako) funtsezkoa da ikasketa-unitate hau. Zenbakizko segidak eta funtzioek puntu zehatz batean duten limitea jorratuko dira unitatearen hasieran, baita jarraitutasunaren eta etenen kontzeptua ere (oso maila intuitiboan). Oso izaera praktikoa izan behar dute kontzeptuok, eta oso lan kualitatiboak izango dira, landuko diren edukiak argi gelditzeko.

Funtzio baten deribatua (puntu zehatz batean) aztertuko da unitatearen nukleoan, eta kontzeptu horren esanahi geometrikoa azalduko da. Kurbak puntu zehatz batean duen zuzen ukitzailearekin lotura handia du honek, eta beraz, 6. IUn ikasitako funtzio linealei buruzko hainbat alderdi argi izan beharko ditugu. Puntu zehatz bateko deribatuaren kontzeptua ulertutakoan, emandako funtzioaren funtzio deribatua aztertuko dugu. Unitatearen azken atalean deribaziorako oinarrizko arauak praktikoki landuko ditugu, eta horrela, oinarrizko hainbat funtzio deribatu ahal izango ditugu. Deribatuen hainbat aplikaziorekin amaituko dugu unitatea, eta kurbak funtzioaren puntu kritikoen (maximoak, minimoak, etab.) bidez adierazten ikasiko dugu bereziki.

8. Ikasketa Unitatea: INTEGRALEN MUNDUA ETA APLIKAZIOAK (10 ordu)

Aurreko unitatearekin oso lotutakoa da unitate hau, eta aurrekoa guztiz finkatu arte ezingo da hau landu. Ongi bereizitako bi atal ditu unitate honek. Horrela, lehenengo atalean zenbait funtzioren jatorrizkoa kalkulatuko dugu. Funtzio baten funtzio deribatuaren eta jatorrizko funtzioaren artean dagoen lotura (euren arteko alderantzizko eragiketak dira) ikustea interesgarria da. Unitatearen bigarren zatia integral mugatuaren ingurukoa izango da, eta hainbat aplikazio ikusiko ditugu, kurbaren azpiko azaleraren kalkulua bereziki (Barrow-en erregela). Oso izaera instrumentala du unitate honek, eta honekin, analisi matematikoari dagokion eduki-blokea amaituko dugu.

9. Ikasketa Unitatea: DIMENTSIO BATEKO ESTATISTIKARAKO SARRERA: PARAMETRO ESTATISTIKOAK ETA HORIEN ESANAHIA (6 ordu)

Ondoren datorren guztia garatzeko ezinbestekoa da unitate hau. Helburuetako bat, gero landuko diren kontzeptu estatistikoak eta euren arteko erlazioak menperatzea da. Aldagai baten inguruko estatistika zehatz-mehatz ikasiko da, kasu sinpleetarako nahiz taldeetarako.

Kontzeptuok segurtasunez maneiatzeak garrantzi handia du: lagina, populazioa, aldagaia, maiztasun erlatiboa, portzentajezkoa eta metatua; eta taula estatistikoetan oinarritutako irudikatze-teknikak. Lehenengo jardueretan, datu estatistikoak maiztasun-tauletan biltzea eta ordenatzea izango dira. Gero, estatistikako hainbat grafiko ikasiko dira: histogramak, barra-diagramak, sektore-diagramak…

Estatistikako hainbat ariketa ebatziko dira unitatean zehar. Matematikan (eta bereziki estatistikan) sakontzen lagunduko diguten oinarrizko tresnak ikastea da unitate honetako helburua. Hainbat parametro estatistiko ikasi eta maneiatzen jakitera zuzendutako unitatea da: zentralizaziokoak eta sakabanaketakoak.

Zentralizazio-parametroak argi utzi beharko dira, batez besteko aritmetikoarena bereziki, ikertutako populazio osoa ordezkatuko duen parametroa izango baita. Desbideratze tipikoak ere argi gelditu behar du, ikasitako aldagaiek batez besteko aritmetikotik duten sakabanaketa edo desbideratzea adieraziko baitigu. Goian aipatutako bi parametroek (batez bestekoa eta desbideratze tipikoa) lagunduko digute ikertutako populazioa modu errealistan eta zientifikoan ulertzen. Azken finean, parametro horien alderdi kuantitatiboaz gain, alderdi kualitatiboak ere garrantzi handia du: batez besteko aritmetikoa izango da balio zentrala, eta desbideratze tipikoak adieraziko digu batez besteko horretatik dagoen desbideratzea. Komunikabideetatik ateratako adibideak lantzeko unitate egokia da.

Unitatea guztiz instrumentala bada ere, prestakuntza-alderdi garrantzitsua du. Kalkulagailua modu estatistikoan erabiltzeak, datu estatistikoak modu seguruan eta eraginkorrean kalkulatzen eta aztertzen lagunduko digu.

10. Ikasketa Unitatea: BI DIMENTSIOKO ESTATISTIKARAKO SARRERA: KORRELAZIOA ETA ERREGRESIO ZUZENA (6 ordu)

Ikasketa-unitate honetan bi dimentsiotako estatistikaren esparruan agertzen diren eduki asko jorratuko dira. Unitatearen lehenengo jardueretan puntu-hodeien bidez bi dimentsiotako banaketak eta horien irudikapenak aztertuko dira. Gero, neurriari, bariantzari eta kobariantzari buruzko kalkuluak burutuko dira. Unitate honetako gaiak ulertu ahal izateko, aurreko unitatekoak menperatzea ezinbestekoa izango da.

Unitate osoaren planteamenduak, ahal dela, praktikoa eta funtzionala izan behar du, komunikabideetako adibideez baliatuz.

Kalkulagailua modu estatistikoan erabiltzeak, datu estatistikoak modu seguruan eta eraginkorrean kalkulatzen eta aztertzen lagunduko digu, kalkuluak aspergarriak eta zentzurik gabekoak izango baitira.

Ikertutako bi aldagaien arteko erlazioa ikasiko da unitate honetan, korrelazio kontzeptuaren bidez. Korrelazioa bere koefizientearen bidez aztertzeak argi gelditu behar du, ikertutako bi aldagaien arteko erlazioa adieraziko baitigu. Koefiziente horren kalkulua egin beharko da, puntu-hodeietan oinarrituta.

Unitatearen azken atalean puntu-hodeiak zuzen baten bidez doitzen ikasiko da, aldagaien arteko erlazioak existitzen duenetan. Erregresio-zuzena deituko zaio zuzen horri, eta hurbilketaren bidez kalkulatzen da. Dena den, baliabide informatikoak (kalkulagailua adibidez) erabili beharko dira erregresio-zuzenaren koefizientearen kalkulu eraginkorra egin ahal izateko.

Unitate osoaren planteamenduak, ahal dela, praktikoa eta funtzionala izan behar du, komunikabideetako adibideez baliatuz.

11. Ikasketa Unitatea: PROBABILITATE BANAKETA DISKRETUAK. BANAKETA BINOMIALA (5 ordu)

Unitate hau 13.a ikasi ondoren jorratzea komeni da, unitate horietan aztertuko baitira probabilitateari buruzko kontzeptuak. Unitate honetan banaketa binomialari buruzko oinarrizko elementuak ikasiko dira. Ausazko aldagai diskretuak eta probabilitate-banaketak zer diren argi gelditu behar dute. Eguneroko bizimoduan agertzen diren banaketa diskretuekin burutu behar dira, ahal dela, unitate honetako ariketak: dadoak, txanponak, etab.

Banaketa diskretuaren alorreko banaketa jakin bat ikasiko da, zehatz-mehatz, unitate honetan: banaketa binomiala. Banaketa hori ulertu ahal izateko ezinbestekoa da zenbaki konbinatorioak menperatzea, azaletik bada ere.

Unitate honetan banaketa binomialera hurbilduko gara, eta gure kalkulu-gaitasunaren araberako ariketak ebatzi ahal izango ditugu; ikertu beharreko gertaerak konplexuagoak direnean, ahal den neurrian ikuspegi konplexuago batetik ikasiko dugu banaketa hori: banaketa normala (12. unitatean ikasiko dugu zehatzago).

12. Ikasketa Unitatea: BANAKETA NORMALA. BANAKETA NORMALAREN BIDEZ BINOMIALAREN HURBILKETA (8 ordu)

Unitate hau funtsezkoa da banaketa jarraituen alorrean nahiz matematikaren alorrean. Giza portaera askoren isla da banaketa normalaren eredua. Unitatearen hasieran, banaketa normal unitarioa edo tipifikatua ikasiko da. Funtzio horren hurbilketa informala edo intuitiboarekin hasiko da, eta gero aldagai tipifikatuak zer diren eta banaketa normal orokorragoak zer diren ikasiko da.

Banaketa normalari dagozkion taulak egoki erabiltzea ezinbestekoa izango da. Unitatea praktikoa izango da, eta ahal dela, gure testuingurutik ateratako ariketak egingo dira. Banaketa normalaren bidez binomialaren hurbilketa egitea da ikasi beharreko helburu garrantzitsuenetako bat.

13. Ikasketa Unitatea: PROBABILITATERAKO SARRERA. BALDINTZATUTAKO PROBABILITATEA ETA KONPOSATUA (10 ordu)

Ikasketa-unitate honetan, ikasgaian zehar aztertuko diren zoriaren eta probabilitatearen inguruko eduki gehienak jorratuko dira. Zoriaren lengoaia ulertu eta menperatzea ezinbestekoa da: ausazko saiakuntza, oinarrizko gertaera, gertaera segurua, etab.

Gero, gertaera baten maiztasuna eta probabilitatea kontzeptuak lantzea gomendatzen da. Probabilitatearen kontzeptuak argi gelditu behar du, eta horretarako, ausazko saiakuntza asko planteatu eta probabilitatea kalkulatzea izango da onena, modu intuitiboan eta gertaerak oinarrizkoak izanik edo ez izanik. Unitatearen azken atalean Laplace-n legea aztertuko da, gertaera konplexuagoak ebatzi ahal izateko. Ariketa batzuk ebazteko, zenbaketa konbinatorioaren kontzeptu batzuk ezagutu beharko dira. Unitate honek praktikoa izan behar du, eta ebatziko diren ariketak esanguratsuak eta ongi hautatutakoak izan beharko dute.

IKASKETA UNITATEEN ETA EZAGUTZA ADIERAZLEEN ARTEKO ELKARREKIKOTASUNAK

Ikasketa Unitateak	Izendapena	Ezagutza- -adierazleak
IU 1	Zenbakiak eta eragiketak	1.1 eta 1.2
IU 2	Lengoaia aljebraikoa eta aplikazioak	1.3 eta 1.4
IU 3	Matrizeak eta Determinanteak	1.6 eta 1.7
IU 4	Ekuazio-sistemak eta euren ebazpena	1.6; 1.7 eta 1.8
IU 5	Funtzioen mundua	2.1 ; 2.2 eta 2.3
IU 6	Zenbait funtzioren ikasketa	2.1 ; 2.2 ; 2.3 eta 2.4
IU 7	Deribatuen mundua eta aplikazioak	2.5; 2.6; 2.7; 2.8; 2.9: 2.10 eta 2.11;
IU 8	Integralen mundua eta aplikazioak	2.12 eta 2.13
IU 9	Dimentsio bateko estatistikarako sarrera: parametro estatistikoak eta horien esanahia	3.1 eta 3.2
IU 10	Bi dimentsioko estatistikarako sarrera: korrelazioa eta erregresio zuzena	3.3 eta 3.4
IU 11	Probabilitate banaketa diskretuak. Banaketa binomiala	3.6
IU 12	Banaketa normala. Banaketa normalaren bidez binomialaren hurbilketa	3.5 eta 3.6
IU 13	Probabilitaterako sarrera. Baldintzatutako probabilitatea eta konposatua	3.7; 3.8 eta 3.9

Ikasketa-unitateetan aplikatu beharreko metodologia.

Unitate guztietako metodologia ongi hautatutako ariketen ebazpenean oinarrituko da.

• IKASKETARAKO BALIABIDEAK

Gai hauek prestatzen laguntzeko (prestaketa autodidakta nahiz zuzendua), baliabide eta euskarri didaktikoak erabiltzea ezinbestekoa da, eta liburuak izaten dira horien artean erabilienak.

Modulua prestatu ahal izateko, batxilergoan erabiltzen diren matematikako edozein testu-liburu erabili ahal izango dugu. Horregatik, ikasketarako beheko testuak gomendatzen dira:

- **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (de 1º y 2º de Bachillerato)**
  Egileak: José Colera eta beste hainbat
  Argit.: ANAYA.

- **Matemáticas (serie Bachillerato; Matemáticas Aplicadas a las ciencias Sociales):**
  Egileak: Agustín Estévez eta Juan Enciso.
  Argit. Mc Graw Hill

- **Compendio de Problemas de Matemáticas para el Bachillerato**
  Egileak: D. Torrecilla eta J.D. Molina.
  Argit.: Grupo Editorial Universitario.

- **Apuntes y problemas de Matemáticas para acceso a la univesidad**

  Argit.: Libros de la Jarda

  Webgunea: www. lajarda.com/mat

  Apunteen formatua duten liburuak dira bi horiek, eta metodologia autodidakta dute eduki praktiko askorekin: 4.000 ariketa baino gehiago. Ariketa horiek esparru zientifiko-teknikoan unibertsitateko sarbide-probak prestatzeko diseinatu dira.

  Webgunetik soilik eskuratu ahal izango dira liburuok.

Matematikako baliabideak Interneten:

a) www.matemáticas.net

b) www.divulgamat.net