

FASE ESPECÍFICA



MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA SALUD

MÓDULO

EJERCICIOS

SOLUCIONARIO

PRUEBA

SOLUCIONARIO

PROGRAMACIÓN Y
RECURSOS



Módulo

MATEMÁTICAS PARA LAS CIENCIAS SOCIALES Y DE LA SALUD

Prueba de acceso a la universidad: mayores de 25 años

Duración orientativa: 90 horas



ÍNDICE

1. PRESENTACIÓN Y OBJETIVOS

2. CONTENIDOS

BLOQUE 1: ARITMÉTICA Y ALGEBRA (22 horas)

Indicadores de conocimiento

BLOQUE 2: ANÁLISIS MATEMÁTICO (33 horas)

Indicadores de conocimiento

BLOQUE 3: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (35 horas)

Indicadores de conocimiento



1. PRESENTACIÓN Y OBJETIVOS

La sociedad actual se desenvuelve bajo el paradigma del conocimiento. Vivimos en un mundo cada vez más tecnificado, que utiliza mayoritariamente el lenguaje y la lógica de las Matemáticas para mejorar la objetividad en las interpretaciones de la realidad. Por tanto, parece necesario formar individuos capaces de comprender y usar lo fundamental de las leyes, principios, lenguaje y estructura de esta ciencia, es decir, que posean una cultura matemática que les permita acceder a los contenidos de todos los campos del conocimiento científico y profesional.

Además, hay que tener en cuenta que los temas de las Matemáticas en los que se basan muchas de las tecnologías han de ser funcionales y dinámicos. Deben dirigirse a la formación de individuos con espíritu de creatividad, de comunicación, de producción, de resolución de problemas y de progreso y, en este sentido, las Matemáticas es el campo más adecuado, ya que ayuda a estructurar y agilizar de manera positiva las más altas operaciones del pensamiento: análisis, síntesis, interpretación, juicio crítico, etc.

Las Matemáticas constituyen un conjunto de conocimientos, agrupados en varios bloques pero ampliamente interrelacionados. Los bloques de Matemáticas más directamente relacionados con la madurez propia para la capacitación profesional son:

Aritmética y álgebra.

Análisis matemático.

Estadística y Probabilidad.

Las Matemáticas deberán desarrollarse mediante una metodología que combine de forma adecuada los contenidos teóricos y prácticos, sin olvidar la finalidad que se persigue y el perfil de los destinatarios a los que se dirige la formación. El planteamiento del módulo deberá ser eminentemente práctico y funcional. La finalidad fundamental de la materia es la instrumental, esto significa que las matemáticas han de servir como una herramienta básica y fundamental en sus estudios posteriores.

- Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan adquirir una formación científica general.
- Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolas en la interpretación de su ámbito laboral así como en sus actividades cotidianas.
- Analizar y valorar la información proveniente de diferentes fuentes, utilizando herramientas matemáticas para formarse una opinión que les permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.
- Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos.
- Aprovechar los cauces de información facilitados por las nuevas tecnologías, seleccionando aquello que pueda ser más útil para resolver los problemas planteados.
- Establecer relaciones entre las matemáticas y el medio social, cultural y económico reconociendo su valor como parte de nuestra cultura.

Para cualquier proceso formativo que contemple la oferta de esta materia, su necesaria programación debe basarse en la impartición de los "*contenidos*" que posteriormente se relacionan, con el nivel y extensión que describen los "*Indicadores de conocimiento*". Estos últimos no dejan de ser criterios de evaluación que expresados como las cuestiones y



ejercicios-tipo más representativos de cada bloque de contenidos, aspiran a transmitir lo más sustancial y crítico que las personas deben saber o saber hacer.

2. CONTENIDOS

BLOQUE 1: ARITMÉTICA Y ALGEBRA (22 horas)

Los números racionales e irracionales. La Recta real.

Notación científica.

Lenguaje algebraico:

- Ecuación de primer y segundo grado. Solución..
- Resolución de problemas mediante planteamiento algebraico.

Estudio de matrices y determinantes:

- Concepto de matriz. Tipos de matrices.
- Operaciones con matrices.
- Concepto de determinante.
- Cálculo del determinante por la regla de Sarrus.

Sistemas de ecuaciones (hasta de 3x3).

- Sistema de ecuaciones lineales. Sistemas equivalentes.
- Sistemas compatibles e incompatibles.
- Solución de un sistema: determinado e indeterminado.
- Resolución de sistemas por el método de Gauss.
- Resolución de problemas mediante planteamiento de sistemas.

La calculadora científica y su manejo.

INDICADORES DE CONOCIMIENTO:

- 1.1. *Identificar y representar los distintos tipos de números sobre la recta Real.*
- 1.2. *Realizar cálculos con números racionales e irracionales, tanto con lápiz y papel como con calculadora.*
- 1.3. *Operar con expresiones algebraicas, polinómicas y racionales.*
- 1.4. *Plantear y resolver problemas mediante sistemas lineales.*
- 1.5. *Plantear y resolver problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.*
- 1.6. *Interpretar y operar con matrices en el contexto de problemas profesionales.*
- 1.7. *Calcular determinantes de matrices (hasta 3x3)*
- 1.8. *Resolver sistemas de ecuaciones (hasta 3x3) mediante el método de Gauss.*

BLOQUE 2: ANÁLISIS MATEMÁTICO (33 horas)

Funciones y gráficas:

- Concepto de función. Dominio y recorrido.
- Estudio intuitivo de las gráficas de funciones de diversos fenómenos.

Modelos funcionales:

- Funciones lineales.



- Funciones cuadráticas.
- Funciones polinómicas y racionales (sencillas).
- Funciones exponenciales y logarítmicas.

Límite de una función en un punto (a nivel intuitivo). Cálculo de algunos límites de funciones en un punto.

Ideas intuitivas sobre la continuidad.

Derivada de una función en un punto. Recta tangente a una curva en un punto.

La función derivada.

Reglas básicas de derivación. Derivadas de algunas funciones.

Crecimiento y decrecimiento de una función. Extremos relativos. Dibujo de curvas.

Primitiva de una función. Cálculo de primitivas sencillas.

Aproximación a la integral definida. Cálculo de área bajo una curva.

Cálculo de la integral definida mediante la regla de Barrow.

INDICADORES DE CONOCIMIENTO:

- 2.1. *Elaborar tablas a partir de la descripción de una situación o de su expresión algebraica, eligiendo las unidades, escalas y ejes adecuados.*
- 2.2. *Calcular el dominio de funciones sencillas.*
- 2.3. *Representar gráficamente las funciones elementales: lineales, cuadráticas, polinómicas y racionales (sencillas).*
- 2.4. Reconocer las funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas.
- 2.5. Reconocer la continuidad o discontinuidad de una función en un punto (a nivel intuitivo).
- 2.6. Calcular límites de funciones elementales en un punto. (incluyendo el caso infinito)
- 2.7. *Utilizar diversas estrategias y situaciones problemáticas para aproximarse intuitivamente a la idea de derivada de una función en un punto.*
- 2.8. *Obtención de la recta tangente a una curva en un punto. Entender el concepto de función derivada.*
- 2.9. *Obtención de los máximos y mínimos de una función.*
- 2.10. *Resolver problemas sencillos relacionados con la optimización.*
- 2.11. *Calcular derivadas de funciones elementales, aplicando las reglas de derivación.*
- 2.12. *Calcular primitivas de funciones elementales.*
- 2.13. *Calcular integrales definidas de funciones elementales, utilizando la regla de Barrow.*

BLOQUE 3: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD (35 horas)

Distribuciones estadísticas unidimensionales:

- Tablas de frecuencia.
- Gráficos estadísticos.
- Parámetros estadísticos: media y desviación típica.
- Cálculo de los parámetros estadísticos mediante una calculadora científica.

Distribuciones estadísticas bidimensionales:

- Nubes de puntos.
- Correlación. Medida de la correlación (estudio intuitivo)



- Regresión. Recta de regresión. (estudio intuitivo)

Distribuciones discretas. Distribución binomial.

- Concepto de variable aleatoria.
- Variable aleatoria discreta.
- Función de probabilidad y función de distribución.
- Media y varianza de una variable aleatoria discreta.
- Idea intuitiva de distribución binomial.
- Función de probabilidad de la distribución binomial.

Distribuciones continuas. Distribución normal

- Variable aleatoria continua.
- Función de densidad y función de distribución.
- Media y varianza de una variable aleatoria continua.
- Idea intuitiva de distribución normal.
- Media y varianza de la distribución normal.
- Distribución normal estándar.
- Tipificación de la variable.
- Manejo de tablas en la distribución normal.
- Aproximación de la distribución binomial por la distribución normal.

Probabilidad

- Experimentos aleatorios.
- Sucesos y espacio muestral.
- Concepto de probabilidad.
- Técnicas elementales de conteo
- Obtención de la probabilidad de sucesos. Ley de Laplace.
- Probabilidad condicionada
- Sucesos compuestos.

INDICADORES DE CONOCIMIENTO:

- 3.1. *Construir tablas y gráficas estadísticas a partir de unos datos.*
- 3.2. *Calcular los parámetros estadísticos: moda, media, mediana y desviación típica.*
- 3.3. *Representar nubes de puntos.*
- 3.4. *Entender el concepto de correlación y de la recta de regresión, realizando cálculos aproximativos de la correlación y de la recta de regresión.*
- 3.5. *Resolver problemas, utilizando las tablas, relativos a poblaciones estadísticas que se distribuyen normalmente*
- 3.6. *Resolución de problemas relativos a distribuciones binomiales utilizando, si viene al caso, la aproximación a la distribución normal.*
- 3.7. *Identificar distintos tipos de sucesos: elementales, compuestos, etc.*
- 3.8. *Calcular la probabilidad de sucesos sencillos, mediante la ley de Laplace.*
- 3.9. *Resolver problemas relativos a la probabilidad condicionada y sucesos compuestos.*



EJEMPLOS DE EJERCICIOS CORRESPONDIENTES A LOS INDICADORES DE CONOCIMIENTO DE LOS BLOQUES DE CONTENIDOS

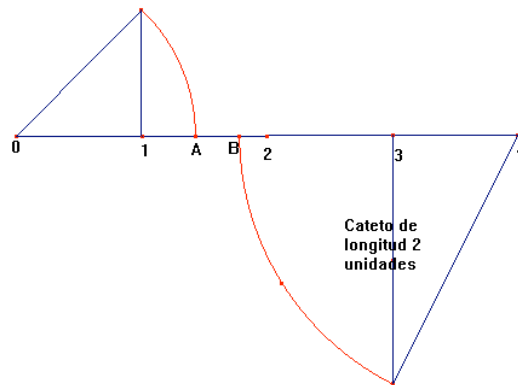
BLOQUE	INDICADORES DE CONOCIMIENTO	EJEMPLOS
1	1.1. Identificar y representar los distintos tipos de números sobre la recta Real.	1
	1.2. Realizar cálculos con números racionales e irracionales, tanto con lápiz y papel como con calculadora.	2
	1.3. Operar con expresiones algebraicas, polinómicas y racionales.	3 y 4
	1.4. Plantear y resolver problemas mediante sistemas lineales.	5, 10, 11 y 12
	1.5. Plantear y resolver problemas mediante ecuaciones de primer y segundo grado.	6
	1.6. Interpretar y operar con matrices en el contexto de problemas profesionales.	7
	1.7. Calcular determinantes de matrices (hasta 3x3).	8
	1.8. Resolver sistemas de ecuaciones (hasta 3x3) mediante el método de Gauss.	9
2	2.1. Elaborar tablas a partir de la descripción de una situación o de su expresión algebraica, eligiendo las unidades, escalas y ejes adecuados.	13
	2.2. Calcular el dominio de funciones sencillas.	14
	2.3. Representar gráficamente las funciones elementales: lineales, cuadráticas, polinómicas y racionales (sencillas).	15, 32, 33, 34 y 35
	2.4. Reconocer las funciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.	16
	2.5. Reconocer la continuidad o discontinuidad de una función en un punto (a nivel intuitivo).	17
	2.6. Calcular límites de funciones elementales en un punto. (incluyendo el caso infinito)	18 y 19
	2.7. Utilizar diversas estrategias y situaciones problemáticas para aproximarse intuitivamente a la idea de derivada de una función en un punto.	20, 21 y 27
	2.8. Obtención de la recta tangente a una curva en un punto. Entender el concepto de función derivada.	22, 23 y 24
	2.9. Obtención de los máximos y mínimos de una función.	25 y 26
	2.10. Resolver problemas sencillos relacionados con la optimización	25 y 26
	2.11. Calcular derivadas de funciones elementales, aplicando las reglas de derivación.	28
	2.12. Calcular primitivas de funciones elementales.	29
	2.13. Calcular integrales definidas de funciones elementales, utilizando la regla de Barrow.	30 y 31
	3.1. Construir tablas y gráficas estadísticas a partir de unos datos.	36
	3.2. Calcular los parámetros estadísticos: moda, media, mediana y desviación típica	37, 38, 39, 40 y 41



3	3.3. Representar nubes de puntos.	42
	3.4. Entender el concepto de correlación y de la recta de regresión, realizando cálculos aproximativos de la correlación y de la recta de regresión.	43, 44 y 45
	3.5. Resolver problemas, utilizando las tablas, relativos a poblaciones estadísticas que se distribuyen normalmente	46
	3.6. Resolución de problemas relativos a distribuciones binomiales utilizando, si viene al caso, la aproximación a la distribución normal.	47 y 48
	3.7. Identificar distintos tipos de sucesos: elementales, compuestos, etc.	49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59 y 60
	3.8. Calcular la probabilidad de sucesos sencillos, mediante la ley de Laplace.	51, 52, 55 y 57
	3.9. Resolver problemas relativos a la probabilidad condicionada y sucesos compuestos.	49, 50, 54, 56, 58, 59 y 60



1. Sobre el segmento $[0, 4]$ de la recta real señala el valor numérico de los puntos: A y B. Se sabe que los arcos dibujados tienen por centro los puntos 0 y 4 respectivamente. Además, el pequeño triángulo rectángulo es isósceles.



2. Calcular el valor de las dos expresiones numéricas siguientes:

A) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

B) $(\sqrt{16})^3 - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt[3]{10})^6 + \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$

3. Dados los siguientes polinomios

$$P(x) = 3x^2 - 2$$

$$Q(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

Calcular las siguientes expresiones algebraicas:

a) $P^2(x)$

b) $Q^2(x)$

c) $[P(x) + Q(x)]^2$

4. Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$



5. Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{8-x}{2-x} - \frac{8+x}{2+x} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{3}{2} \left(\frac{x}{2} - 2 \right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$

7. Calcula x, y, z, t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Calcular el valor de A para que el siguiente determinante sea igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & A \\ 5 & 9 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

9. Resuelve el siguiente sistema aplicando el método de Gauss

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= -4 \\ x + y + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 6 \end{aligned}$$

10. Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?
11. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.
12. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años. ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos?



13. Dadas las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}x + \cos x$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

Rellenar sus tablas, para los valores indicados de la variable independiente.

Tabla correspondiente al caso a)

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y				

Tabla correspondiente al caso b)

x	-2	-1	0	2
y				

14. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 5x + 4}$

c) $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 4}$

15. La siguiente gráfica corresponde a una de las siguientes funciones:



$y = x^3 - 3x$

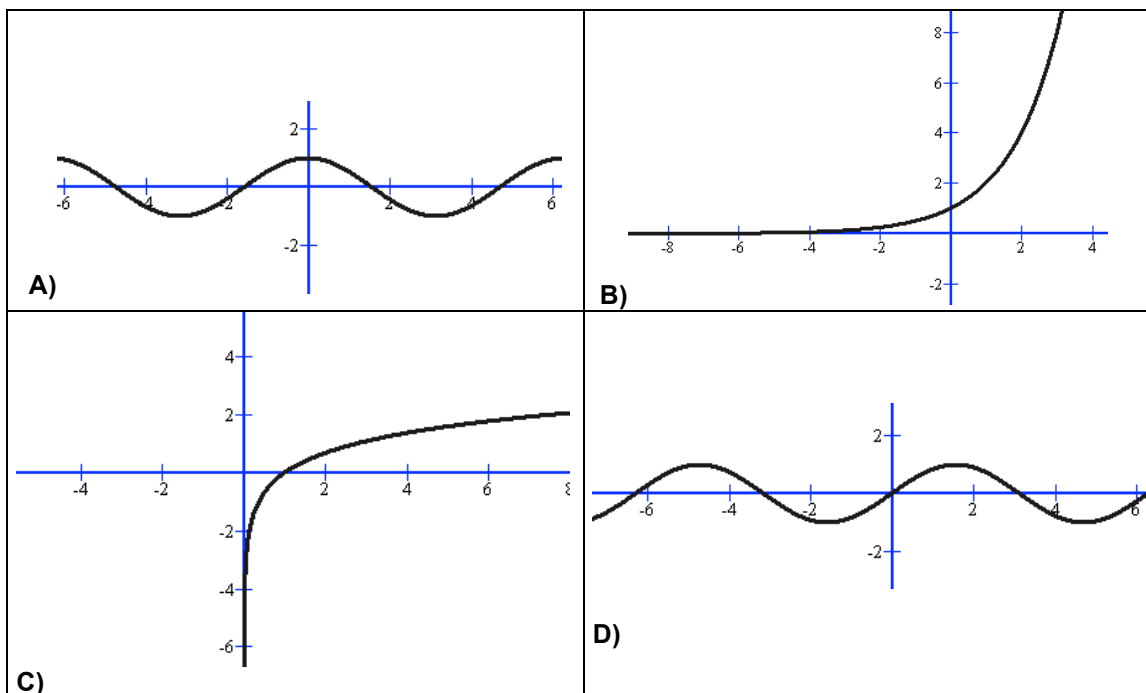
$y = x^4 - 4x^3 + 16$

$y = x^3 + 2$

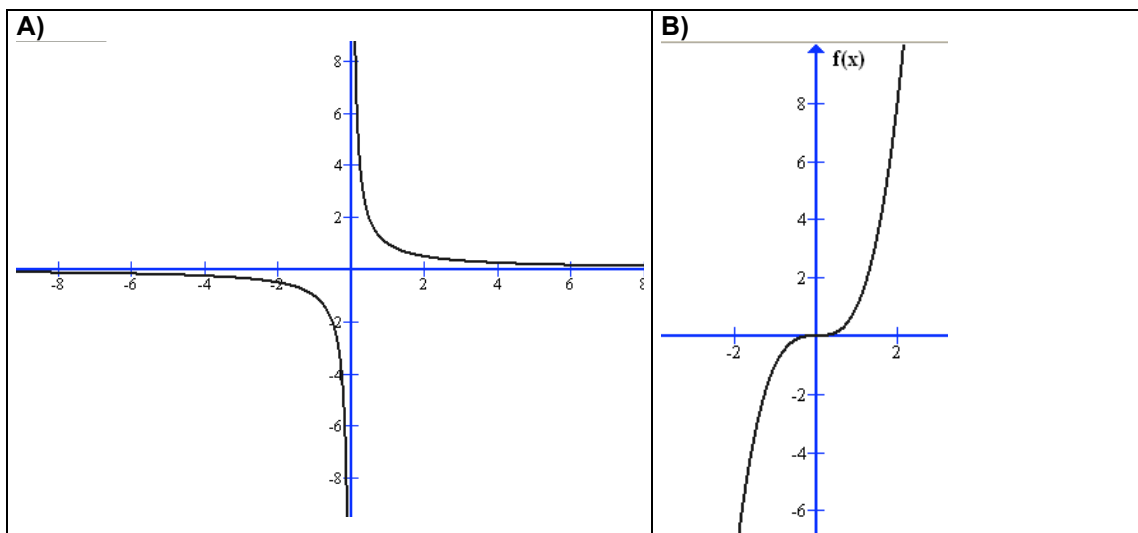
Explica razonadamente tu elección

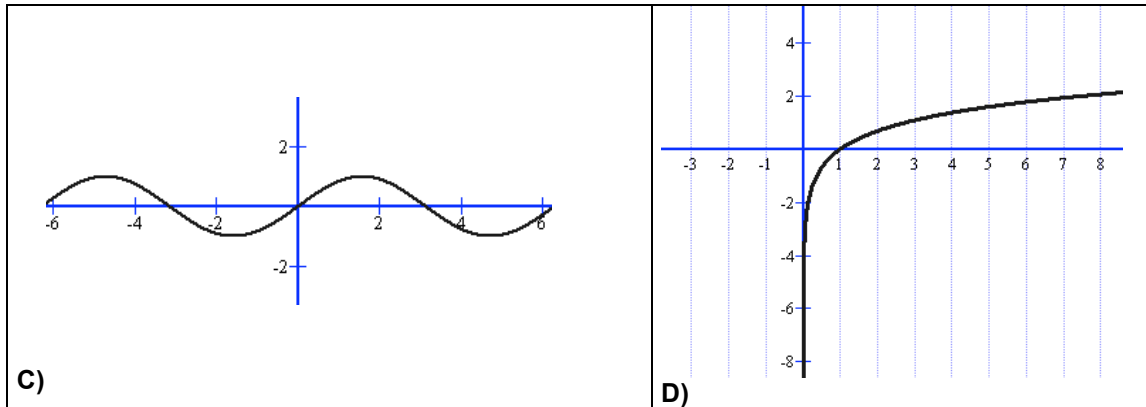


16. Las siguientes funciones son logarítmicas, exponenciales o trigonométricas. Indica cómo es cada una de ellas.



17. Dadas las siguientes gráficas, indicar cuáles son continuas y cuáles no. En caso de discontinuidad señalar los puntos de discontinuidad.





18. Sabiendo que, cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow 4$, $h(x) \rightarrow -\infty$, $u(x) \rightarrow 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \rightarrow +\infty$ a las expresiones siguientes:

- a) $f(x) - h(x)$
- b) $f(x) \cdot f(x)$
- c) $f(x) + h(x)$
- d) $g(x) \cdot h(x)$
- e) $h(x) / u(x)$

19. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos ($\pm\infty$) cuando $x \rightarrow +\infty$:

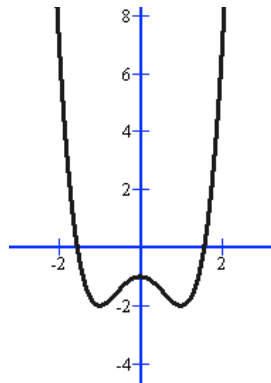
- a) $0,5^x$
- b) $-1,5^x$
- c) 4^x
- d) 4^{-x}

20. Si observamos la siguiente gráfica. Calcula los siguientes valores: $f'(3)$, $f'(9)$





21. Dada la siguiente función:



(Corresponde a la función $y = x^4 - 2x^2 - 1$)

Indica de manera muy somera para qué valores de x la función tiene derivada cero, para cuales derivada positiva y para cuales derivada negativa. Señala las características más relevantes de la función.

22. Calcula el valor de la derivada, en el punto $x=3$, de las siguientes funciones:

a) $y = 3.x^3 - 4.x^2 - 5.x + 34$

b) $y = \frac{2x-1}{4x+2}$

Además, obtener en las dos funciones la recta tangente en dicho punto.

23. Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{(x+3)^2}$

b) $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$

24. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x-2}$$

en los puntos de abscisas 0 y 1

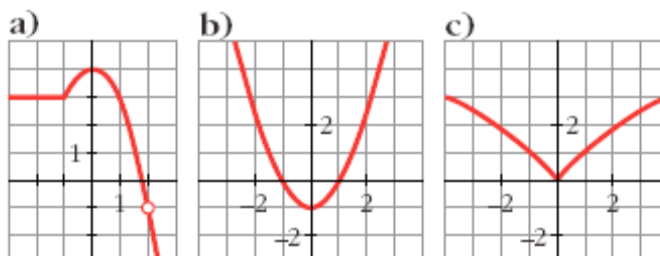
25. Halla los valores máximos y mínimos de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

26. Determina el valor de k que hace que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.



27. Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables. ¿Alguna de ellas es derivable en toda la recta real?



28. Obtener las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}(3x) + \cos(2x)$

b) $y = 5x^2 - \frac{2}{x}$

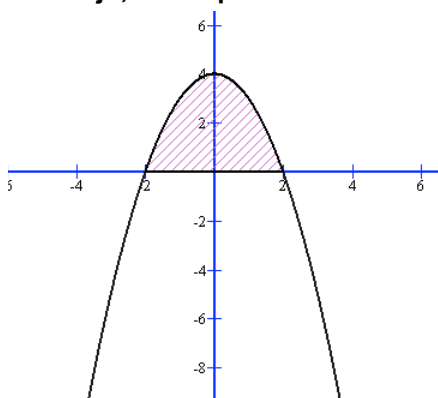
c) $y = \ln(3x)$

29. Resolver las siguientes integrales

a) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx$

b) $\int \text{sen}2x dx$

30. El dibujo, corresponde a la función: $y = x^2 + 4$



Calcula el área rayada, empleando la fórmula de Barrow

31. Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

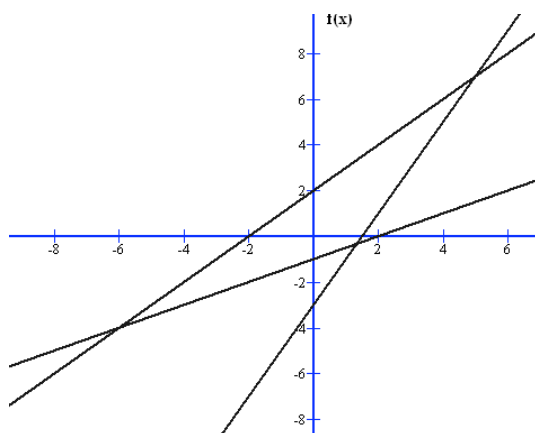


32. Calcula la distancia entre los puntos A(-1, 1) y B(4,3)

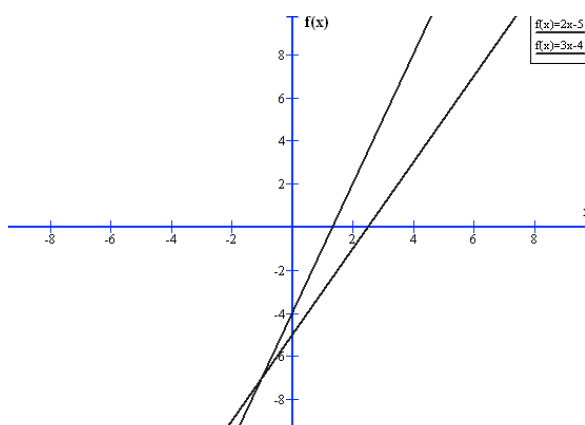
Respuesta:

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$$

33. En el siguiente gráfico hay dibujadas tres rectas. Calcula las ecuaciones de las dos rectas de menor pendiente.



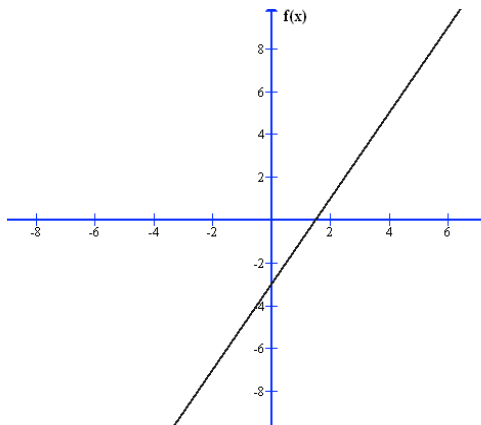
34. Las dos funciones $y = 2x - 5$ e $y = 3x - 4$ son rectas, su dibujo se puede ver en el siguiente gráfico:



- a) ¿Cuál es su punto exacto de corte?
- b) ¿Cuál de las dos rectas tiene mayor pendiente? ¿Cuáles son sus pendientes?
- c) ¿Alguna de las dos rectas pasa por el punto (1.000, 2996)?



35. La siguiente gráfica corresponde a la función $y = 2x - 3$



Calcula:

- A) Los puntos de corte con los ejes
- B) Pendiente de la recta
- C) ¿Pasa dicha recta por el punto P(5,6)?

36. Los 120 alumnos de un instituto practican los siguientes deportes:

Deportes	Número de estudiantes
Baloncesto	20
Balonmano	14
Fútbol	48
Atletismo	16
Natación	22
	Total: 120

En base a los siguientes datos construir el diagrama de sectores correspondiente.

37. En la fabricación de cierto número de bombillas, se ha detectado que algunas son defectuosas. Se han estudiado 200 cajas de 100 bombillas cada una, obteniéndose la siguiente tabla estadística.

Bombillas defectuosas	Número de cajas
	5
2	15
3	38
4	42
5	49
6	32
7	17
8	2

Calcula la media de bombillas defectuosas.



38. Los cuarenta alumnos de un aula se distribuyen según aparecen en la siguiente tabla. La variable anotada es la estatura.

Intervalos (cm)	Frecuencia
148,5 a 153,5	2
153,5 a 158,5	4
158,5 a 163,5	11
163,5 a 168,5	14
168,5 a 173,5	5
173,5 a 178,5	4

- Calcula: a) La media aritmética
b) La desviación típica.

39. Rellena la siguiente tabla estadística:

Variable (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia (f)	4	4		7	5		7	
Frecuencia Absoluta (F)			16		28	38	45	
Frecuencia relativa	0,08		0,16	0,14				

40. La siguiente tabla de datos, agrupados en intervalos, nos presenta las puntuaciones obtenidas por un grupo de adolescentes en un test de inteligencia.

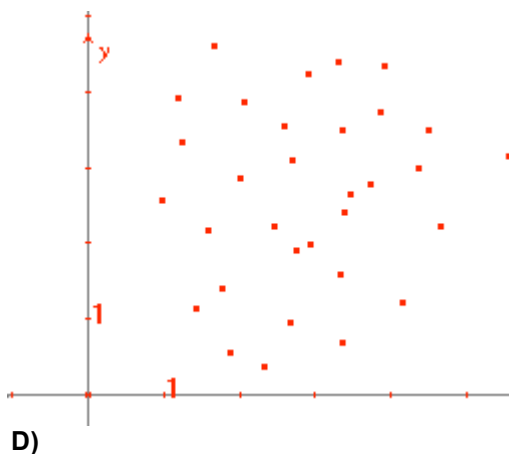
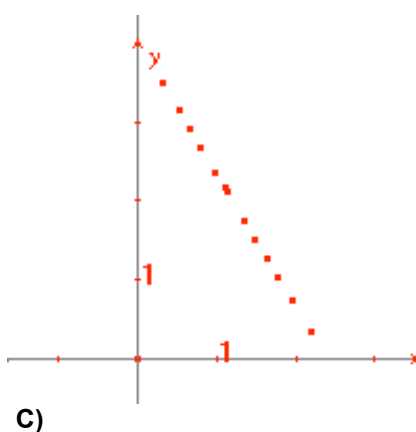
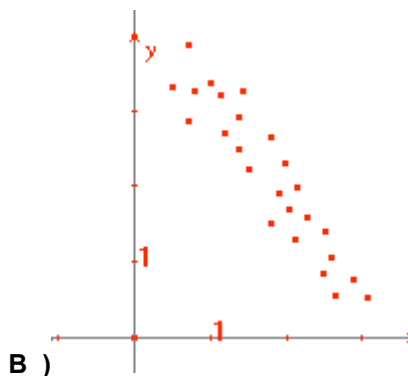
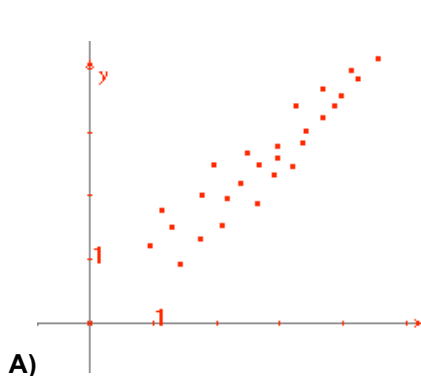
Inteligencia	Número de estudiantes
85-90	5
91-95	10
96-100	20
101-105	35
106-110	15
111-115	10

41. Observa esta tabla sobre la edad de algunos niños y niñas en el momento de andar.

Tiempo (meses)	9	10	11	12	13	14	15
Nº niños	1	4	9	16	11	8	1

- a) Dibuja el gráfico correspondiente.
b) Calcula la media y la desviación típica.
c) ¿Cuál es el intervalo mediano?

42. Traza a ojo la recta de regresión en cada una de estas distribuciones bidimensionales:

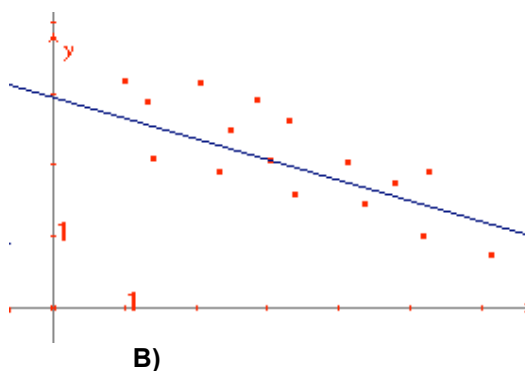
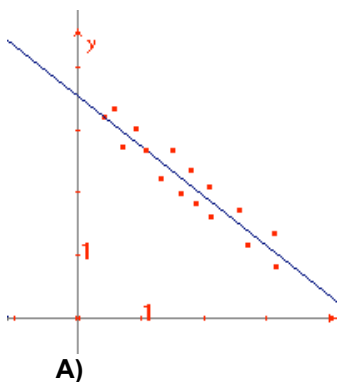


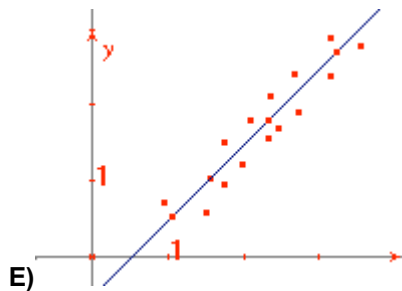
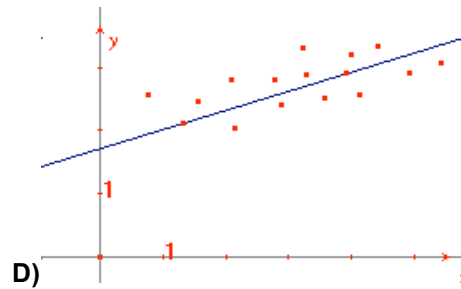
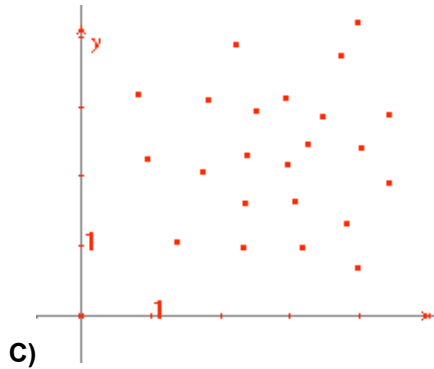
- b) ¿Cuáles de ellas tienen una correlación positiva y cuáles tienen una correlación negativa?
c) Trata de dar un valor aproximado del coeficiente de correlación en cada uno de los casos.

43. En cada uno de los siguientes casos se muestra una nube de puntos y su correspondiente recta de regresión. Sabiendo que sus coeficientes de correlación son:

a) $r=0$; b) $r= - 0,96$; $r= -0,6$; $r= 0,8$; $r= 0,95$

Asocia cada uno de ellos con la nube de puntos correspondiente.





44. Los quince primeros equipos de fútbol de primera división, al final de la liga obtuvieron los siguientes resultados.

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G	20	22	20	17	17	14	12	13	11	10	10	12	11	11	11
E	9	5	8	8	4	9	11	8	11	13	12	8	8	7	6
P	5	7	6	9	13	11	11	13	12	11	12	14	15	15	17

C: Clasificación obtenida.

G: Número de partidos ganados.

E: Número de partidos empatados.

P: Número de partidos perdidos.

a) Dibujar la nube de puntos correspondientes, relacionando

Caso I: C y P

Caso II: C y E

Caso III: C y G

b) Indicar, en caso de que existiese, el tipo de correlación en cada uno de los tres casos.

45. las horas dedicadas la preparación del examen, las horas que estuvieron conectados a Internet los días previos al examen y la estatura de cada uno de ellos.

Representa en sendas nubes de puntos cada uno de los casos, suponiendo que una de las variables es siempre la nota obtenida y la otra cada una de las otras tres variables.



Nota	3	4	5	6	6	7	8	8	8	9
Horas de estudio	3	4	7	11	5	7	10	11	12	14
Horas Internet	19	18	15	10	8	6	5	5	8	3
Altura (cm)	156	167	170	170	172	166	179	167	158	167

46. Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media de 70 Kg y desviación típica de 6 Kg. De una población de 6.000 personas, calcular cuantas personas tendrán un peso entre 64 y 76 Kg.
47. Si tenemos un dado correcto y lo lanzamos 50 veces:
¿Cuál es la probabilidad de que “el 1” salga más de 10 veces?
48. Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas, cada una de ellas tiene cuatro respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Una persona contesta al azar las diez cuestiones. Calcular:
- a) La probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas.
b) Probabilidad de acertar al menos ocho.
49. Se lanzan dos dados cúbicos al aire y se observa en cada uno de ellos el número que ha salido. Calcular:
- a) La probabilidad de que en los dos dados salga el mismo número.
b) La probabilidad de que la suma de los dos números obtenidos sea igual a 7.
c) La probabilidad de que el producto de los dos números sea igual a 12.
50. Una urna contiene 12 bolas rojas, 3 bolas azules y 2 blancas.
Extraemos al azar una bola. ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?
51. En la experiencia aleatoria de lanzar dos dados al mismo tiempo.
¿cuáles son los sucesos elementales de dicha experiencia?
52. Lanzamos dos monedas al mismo tiempo
¿cuáles son los sucesos elementales de dicha experiencia?
53. Lanzamos tres monedas al mismo tiempo
¿cuáles son los sucesos elementales de dicha experiencia?
54. Una urna contiene 1 bolas rojas y 2 bolas blancas
Extraemos al azar dos bolas ¿cuál es la probabilidad de que las dos bolas sean blancas?
55. Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.



56. Una urna contiene 8 bolas blancas y 4 rojas, sacamos primero una bola y sin devolverla sacamos una segunda bola.

Calcular la probabilidad de que:

- a) Las dos bolas sean blancas.
- b) Las dos bolas sean rojas.

57. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus resultados sea 3?

58. Si lanzamos 5 monedas. Halla la probabilidad de:

- a) Obtener 5 cruces.
- b) Obtener alguna cara.

59. Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

- a) Alumna o que aprueba las matemáticas.
- b) Alumno que suspenda las matemáticas.
- c) Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

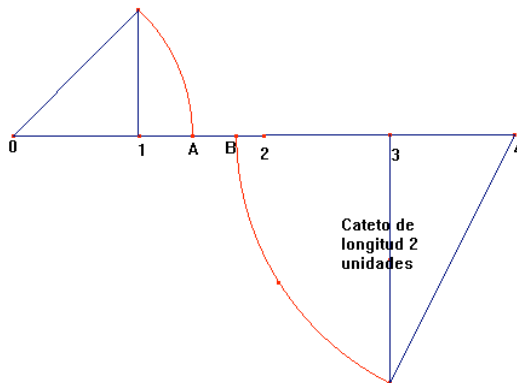
60. En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.

- a) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.
- b) Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.



SOLUCIONARIO DE LOS EJEMPLOS DE EJERCICIOS CORRESPONDIENTES A LOS INDICADORES DE CONOCIMIENTO DE LOS BLOQUES DE CONTENIDOS

1. Sobre el segmento $[0, 4]$ de la recta real señala el valor numérico de los puntos: A y B. Se sabe que los arcos dibujados tienen por centro los puntos 0 y 4 respectivamente. Además, el pequeño triángulo rectángulo es isósceles.



Respuesta:

Solución. El punto A corresponde al valor $\sqrt{2}$, mientras que el valor numérico del punto B es igual a $4 - \sqrt{5}$, como puede verse los dos valores corresponden a números irracionales.

2. Calcular el valor de las dos expresiones numéricas siguientes:

A)
$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$$

B)
$$(\sqrt{16}) - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt[3]{10}) + \sqrt{25 \cdot \sqrt{4}}$$

Respuesta:

A)
$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{5 + 3 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15}$$

B)
$$(\sqrt{16}) - \frac{1}{4} \cdot (\sqrt[3]{10}) + \sqrt{25 \cdot \sqrt{4}} = 4^3 - \frac{1}{4} \cdot 10^2 + \sqrt{50} = 64 - 25 - 5\sqrt{2} = 39 - 5\sqrt{2}$$



3. Dados los siguientes polinomios

$$P(x) = 3x - 2$$

$$Q(x) = x - \frac{1}{2}$$

Calcular las siguientes expresiones algebraicas:

a) $P^2(x)$

b) $Q^2(x)$

c) $[P(x) + Q(x)]^2$

Respuesta:

a) $P^2(x) = (3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$

b) $Q^2(x) = (x - \frac{1}{2})^2 = x^2 + \frac{1}{4} - x$

c) $[P(x) + Q(x)]^2 = \left(4x - \frac{5}{2}\right)^2 = 16x^2 + \frac{25}{4} - 20x$

4. Descompón en factores los siguientes polinomios y di cuáles son sus raíces:

a) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

Respuesta:

Al ser los dos polinomios de grado tres, lo primero que haremos es buscar una raíz entera, si la tiene, y luego aplicar la ecuación de segundo grado. La solución del problema es por tanto igual a:

a) $y = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - \frac{5}{2})$

5. Se dispone de tres cajas A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros. El número de monedas de A excede en 2 a la suma de las monedas de las otras dos cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B. Averigua cuántas monedas había en cada caja.

Respuesta:

Llamando x, y, z el número de monedas de las tres cajas A, B y C respectivamente, podemos plantear el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$x + y + z = 36$$

$$x - 2 = y + z$$

$$2(y - 1) = x + 1$$

La solución del sistema es:

x = 19 monedas, y = 11 monedas, z = 6 monedas



6. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{8-x}{2-x} - \frac{8+x}{2+x} = \frac{9}{4}$

b) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$

Respuesta:

a) Hay que quitar denominadores, tenemos por tanto la siguiente ecuación:

$$(8-x)(2+x) - (8+x)(2-x) = \frac{9}{4}(4-x^2)$$

Desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación de segundo grado:

$$9x^2 + 48x - 36 = 0$$

Las soluciones de la misma son: -6 y 2/3

b) Desarrollando la ecuación que nos dan tenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$3x^2 - 23x + 44 = 0 \quad \text{que tiene por soluciones} \quad x = 4; x = \frac{11}{3}$$

7. Calcula x, y, z, t para que se cumpla:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$\begin{pmatrix} 2x-z & 2y-t \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde tenemos: $z = 0, t = 2, x = 5/2, y = 3/2$

8. Calcular el valor de A para que el siguiente determinante sea igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & A \\ 5 & 9 & 2 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Respuesta:

Desarrollando por Sarrus, tenemos.

$$36 + 40A + 84 - 63A - 16 - 120 = 0$$

Por tanto $23A = -16$

De donde $A = -16/23$



9. Resuelve el siguiente sistema aplicando el método de Gauss

$$\begin{aligned}x - y + 3z &= -4 \\x + y + z &= 2 \\x + 2y - z &= 6\end{aligned}$$

Respuesta:

En primer lugar eliminamos la x de las últimas ecuaciones del sistema:

$$\begin{aligned}x - y + 3z &= -4 & x - y + 3z &= -4 \\-2y + 2z &= -6 & \text{ahora eliminamos la } y, \text{ tenemos} & -2y + 2z = -6 \\-3y + 4z &= -10 & & -2z = 2\end{aligned}$$

Resolviendo el último sistema, hallamos la solución.

$$x = 1, y = 2, z = -1$$

10. Un fabricante produce 42 electrodomésticos. La fábrica abastece a 3 tiendas, que demandan toda la producción. En una cierta semana, la primera tienda solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por la primera más la tercera parte de lo pedido por la tercera. ¿Qué cantidad solicitó cada una?

Respuesta:

Llamamos x a la cantidad que solicitó la 1-ª tienda, y a la que solicitó la 2-ª tienda y z a la que solicitó la 3-ª tienda. Tenemos que:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 42 \\x &= y+z \\y &= 1,2(x/2+z/3)\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tenemos que :

La 1-ª tienda solicitó 21 electrodomésticos; la 2-ª, 15; y la 3-ª, 6.

11. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 € y un total de 2 000 €. Si el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €, averigua cuántos billetes hay de cada tipo.

Respuesta

Llamamos x al n-º de billetes de 10 €; y al n-º de billetes de 20 €; y z al n-º de billetes de 50 €. Podemos plantear un sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned}x + y + z &= 95 \\10x + 20y + 50z &= 2000 \\x &= 2y\end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}x + y + z &= 95 \\x + 2y + 5z &= 200 \\x &= 2y\end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}3x + z &= 95 \\4y + 5z &= 200 \\x &= 2y\end{aligned} \right\}$$

Resolviéndolo tenemos que: Hay 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €.

12. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos.



Quando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años. ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos?

Respuesta:

Haciendo una tabla tenemos:

	EDAD ACTUAL	HACE $y - z$ AÑOS	DENTRO DE $y + z$ AÑOS
PADRE	x	$x - y + z$	$x + y + z$
1 ^{er} HIJO	y	$y - y + z = z$	$2y + x$
2 ^o HIJO	z	$z - y + z = -y + 2z$	$y + 2z$

Quando nació el primer hijo, el padre tenía 35 años; cuando nació el segundo hijo, tenía 40 años.

13. Dadas las siguientes funciones:

a) $y = \text{sen}x + \cos x$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

Rellenar sus tablas, para los valores indicados de la variable independiente.

Tabla correspondiente al caso a)

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y				

Tabla correspondiente al caso b)

x	-2	-1	0	2
y				

Respuesta:

a) $y = \text{sen}x + \cos x$

b) $y = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
y	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	1	1

x	-2	-1	0	2
y	-15	-1	1	-7

14. Halla el dominio de estas funciones:

a) $y = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$

b) $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 5x + 4}$



c) $y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 + 4}$

Respuesta:

- a) Toda la recta Real.
- b) No está definida para los valores que hacen cero el denominador, por tanto el Dominio es toda la recta Real excepto los valores. 1 y 4.
- c) Al ser el denominador siempre mayor que cero, el dominio de definición de la función es toda la recta real.

15. La siguiente gráfica corresponde a una de las siguientes funciones:



$y = x^3 - 3x$

$y = x^4 + 4x^3 - 16$

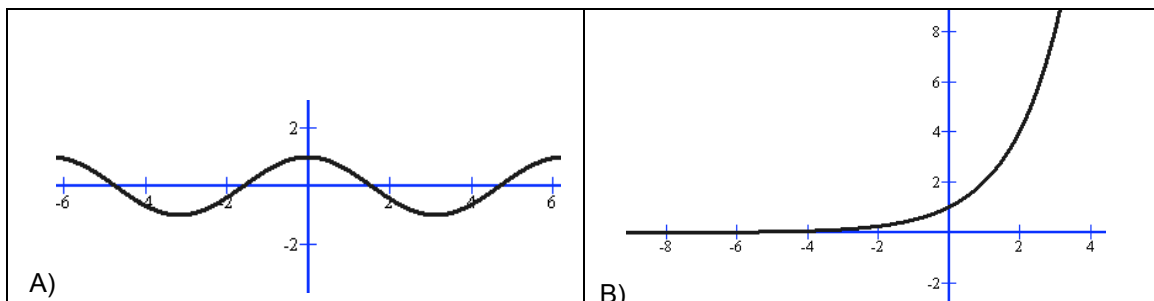
$y = x^3 + 2$

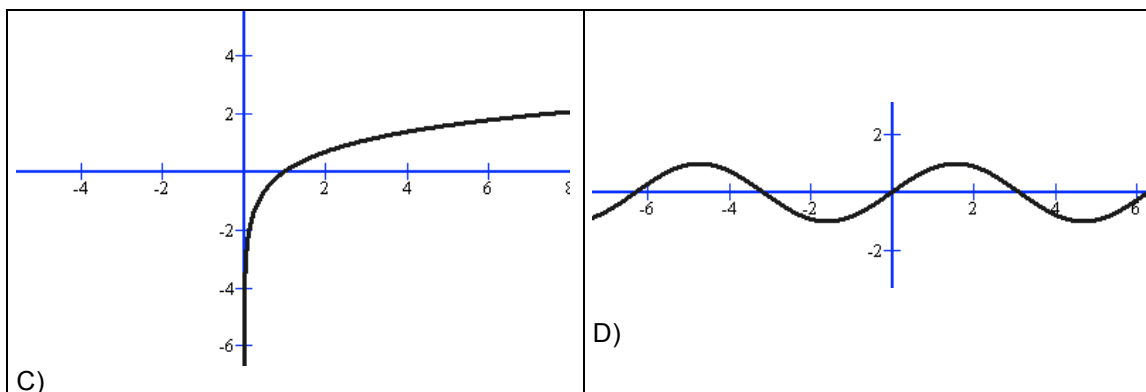
Explica razonadamente tu elección

Respuesta:

Si nos damos cuenta pasa por el (0, 0), por tanto sólo puede ser la función $y = x^3 - 3x$

16. Las siguientes funciones son logarítmicas, exponenciales o trigonométricas. Indica cómo es cada una de ellas.

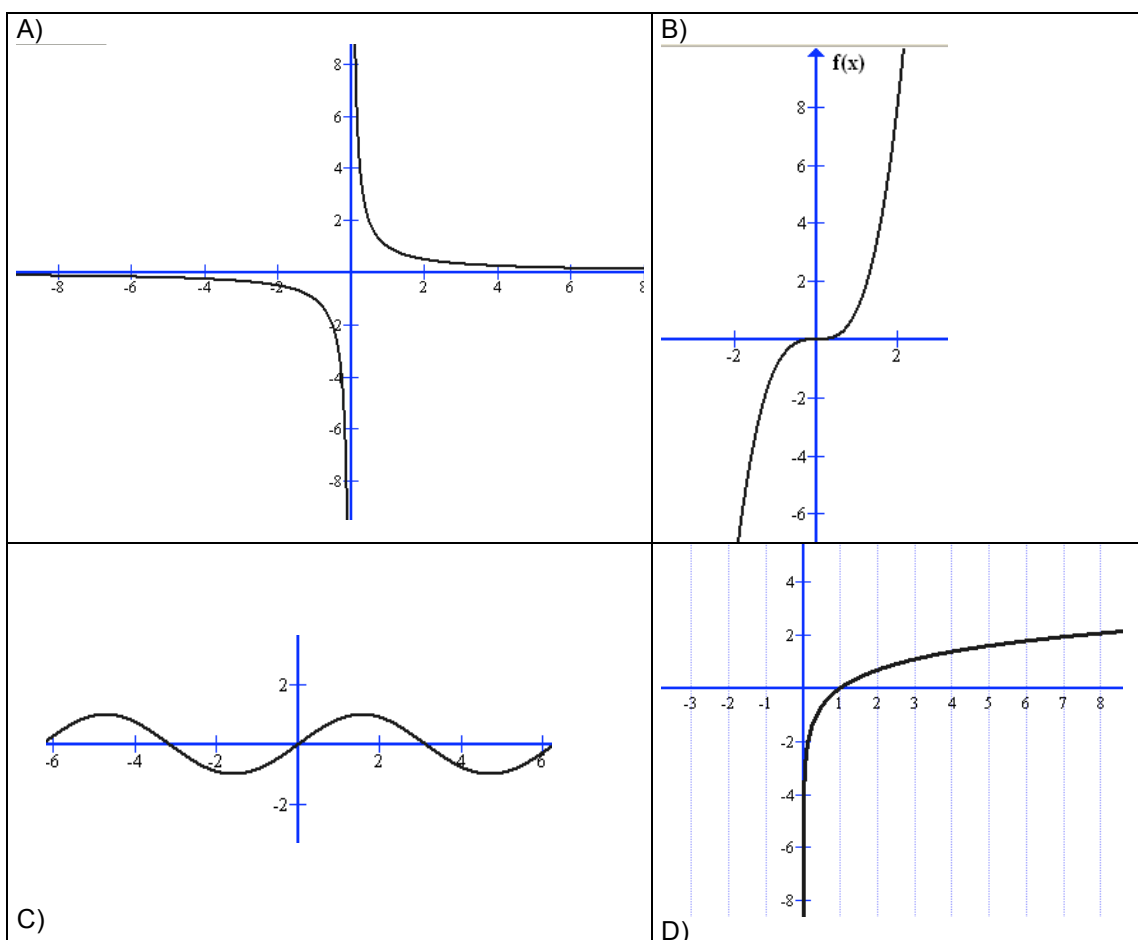




Respuesta:

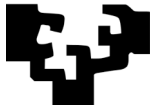
- A) Trigonométrica
- B) Exponencial
- C) Logarítmica
- D) Trigonométrica

17. Dadas las siguientes gráficas, indicar cuáles son continuas y cuáles no. En caso de discontinuidad señalar los puntos de discontinuidad.



Respuesta:

- A) Discontinua en $x = 0$
- B) Continua en toda la recta Real
- C) Continua en toda la recta Real
- D) Continua en todo su dominio de definición



18. Sabiendo que, cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow 4$, $h(x) \rightarrow -\infty$, $u(x) \rightarrow 0$,
asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \rightarrow +\infty$ a las expresiones siguientes:

- a) $f(x) - h(x)$
- b) $f(x) \cdot f(x)$
- c) $f(x) + h(x)$
- d) $g(x) \cdot h(x)$
- e) $h(x) / u(x)$

Respuesta:

- a) $f(x) - h(x)$ tiende a infinito
- b) $f(x) \cdot f(x)$ tiende a infinito
- c) $f(x) + h(x)$ indeterminado
- d) $g(x) \cdot h(x)$ tiende a menos infinito
- e) $h(x) / u(x)$ tiende a infinito

19. Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos ($\pm\infty$) cuando $x \rightarrow +\infty$:

- a) $0,5^x$
- b) $-1,5^x$
- c) 4^x
- d) 4^{-x}

Respuesta:

- a) $0,5^x \rightarrow 0$
- b) $-1,5^x \rightarrow -\infty$
- c) $4^x \rightarrow \infty$
- d) $4^{-x} \rightarrow 0$

20. Si observamos la siguiente gráfica. Calcula los siguientes valores: $f'(3)$, $f'(9)$

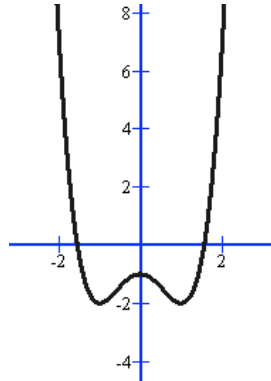


Respuesta :



$f'(3) = 0$, mientras que $f'(9) = -3/4$

21. Dada la siguiente función:



(Corresponde a la función $y = x^4 - 2x^2 - 1$)

Indica de manera muy somera para qué valores de x la función tiene derivada cero, para cuales derivada positiva y para cuales derivada negativa. Señala las características más relevantes de la función.

Respuesta:

Derivando la función tenemos $y' = 4x^3 - 4x$, igualando a cero esta derivada obtenemos los puntos críticos, son $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

En el dibujo podemos identificar cada uno de los tres puntos señalados, en particular para $x = 0$ la función tiene un máximo relativo, mientras que para los valores de $x = 1$ y -1 la función tiene mínimos relativos (que también son absolutos).

Es una función par (simétrica respecto al eje OY).

Para analizar el valor de la derivada, podemos proceder de la siguiente manera:

Como $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$, analizaremos el signo de esta derivada.

- Para valores menores de -1 , el valor de la derivada es negativa
- Para valores mayores de 1 , el valor de la derivada es positiva
- Para los valores comprendidos entre -1 y 0 la primera derivada es positiva
- Para los valores comprendidos entre 0 y 1 la primera derivada es negativa

22. Calcula el valor de la derivada, en el punto $x = 3$, de las siguientes funciones:

a) $y = 3 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 34$

b) $y = \frac{2x-1}{4x+2}$

Además, obtener en las dos funciones la recta tangente en dicho punto.

Respuesta:

a) $y' = 9x^2 - 8x - 5$, por tanto la recta tangente en $x = 3$, es la siguiente:

$$y - 64 = 52(x - 3)$$

Puesto que la recta pasa por el punto $(3, 64)$, y el valor de la derivada en el punto $x = 3$ es igual a 52



b) $y' = \frac{1 \cdot (2x - 3) - 2 \cdot (x - 1)}{(2x - 3)^2} = \frac{-1}{(2x - 3)^2}$, por tanto la recta tangente en $x = 3$, es la

siguiente:

$$y - \frac{5}{14} = \frac{-1}{9}(x - 3)$$

Puesto que la recta pasa por el punto $(3, \frac{5}{14})$, y el valor de la derivada en el punto $x = 3$

es igual a $\frac{-1}{9}$

23. Calcula los puntos de derivada nula de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x}{(x + 3)^2}$

b) $y = \frac{16}{x^2(x - 4)}$

Respuesta.

a) $y' = \frac{(x + 3)^2 - 2(x + 3)x}{(x + 3)^4} = \frac{(x + 3) - 2x}{(x + 3)^3} = \frac{3 - x}{(x + 3)^3}$

$$y' = 0 \rightarrow 3 - x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = \frac{1}{12}$$

Se anula en el punto $(3, \frac{1}{12})$.

b) $y = \frac{16}{x^3 - 4x^2} \rightarrow y' = \frac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$$y' = 0 \rightarrow 3x^2 - 8x = 0 \rightarrow x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (no vale)} \\ x = \frac{8}{3} \rightarrow y = \frac{-27}{16} \end{cases}$$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $(\frac{8}{3}, \frac{-27}{16})$.

24. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0 y 1

Respuesta:

$$y' = \frac{15x^2 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (5x^3)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 30x^2}{(x - 2)^4}, \text{ al ser}$$



$$y'(0) = 0$$
$$y'(1) = -20$$

Las rectas tangentes son , respectivamente para $x= 0$ y $x = 1$, las siguientes.

$$y = 0$$

$$y + 4 = -20(x - 1)$$

25. Halla los valores máximos y mínimos de la siguiente función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$

Respuesta:

Derivando la función e igualándola a cero, tenemos que:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

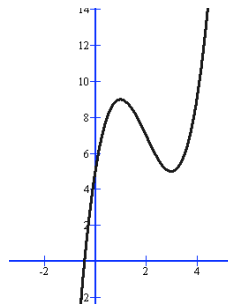
Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$x = 1, x = 3$$

la segunda derivada nos dice si es un máximo o un mínimo

$$y'' = 6x - 12$$

Al ser $y''(1) = -6$, la función tiene un máximo para $x = 1$, mientras que como $y''(3) = 6$, la función tiene un mínimo. El dibujo de la función es suficientemente explicativo.



26. Determina el valor de k que hace que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único punto de tangente horizontal.

Respuesta.

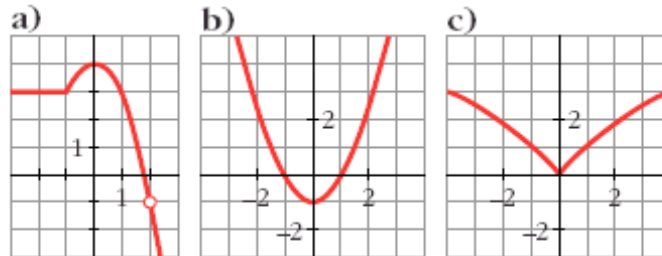
$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + k) - 2xe^x}{(x^2 + k)^2} = \frac{(x^2 - 2x + k)e^x}{(x^2 + k)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4k}}{2}$$

Para que haya una sola ecuación, ha de ser $4 - 4k = 0$; es decir, $k = 1$.



27. Observa las gráficas de las siguientes funciones e indica en qué puntos no son derivables. ¿Alguna de ellas es derivable en toda la recta real?



Respuesta

- a) No es derivable en $x = -1$ (tiene un punto “anguloso”) ni tampoco es derivable en $x = 2$ (por que no está definida la función).
b) Es derivable en toda la recta real.
c) No es derivable en $x = 0$ (tiene un punto “anguloso”).

28. Obtener las derivadas de las siguientes funciones:

- a) $y = \text{sen}(3x) + \cos(2x)$
b) $y = 5x^2 - \frac{2}{x}$
c) $y = \ln(3x)$

Respuesta:

- a) $y' = 3 \cdot \cos(3x) - 2\text{sen}(2x)$
b) $y' = 10x + \frac{2}{x^2}$
c) $y' = \frac{1}{x}$

29. Resolver las siguientes integrales

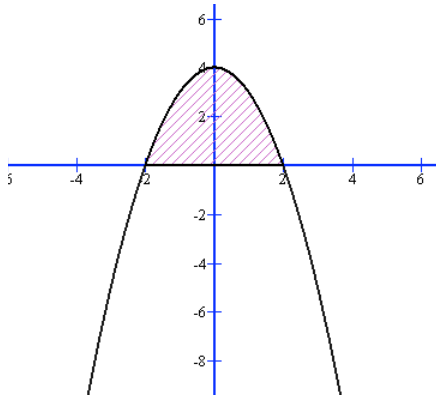
- a) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx$
b) $\int \text{sen}2x dx$

Respuesta:

- a) $\int \frac{x^4 - 5x^2 + 3x - 4}{x} dx = \int x^3 dx - \int 5x dx + \int 3 dx - \int \frac{4 dx}{x} = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} + 3x - 4 \ln x + C$
b) $\int \text{sen}2x dx = \frac{-\cos(2x)}{2} + C$



30. El dibujo, corresponde a la función: $y = x^2 + 4$



Calcula el área rayada, empleando la fórmula de Barrow.

Respuesta:

$$\int_{-2}^2 (-x^2 + 4x) dx = \frac{32}{3}$$

31. Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

Respuesta:

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son -2 y 2 .

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$$

III. Calculamos su primitiva:

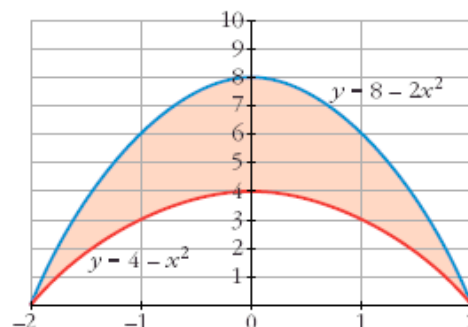
$$G(x) = \int (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \frac{8}{3} = -\frac{16}{3}$

$$G(2) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

V. $G(2) - G(-2) = \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$

El área buscada es: $\frac{32}{3} u^2$.





b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$.

Son $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$$

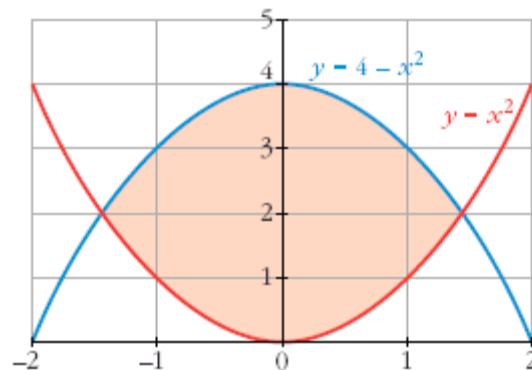
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (4 - 2x^2) dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

$$\text{IV. } G(-\sqrt{2}) = \frac{-8\sqrt{2}}{3}, \quad G(\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{V. } G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$

El área buscada es: $\frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u}^2$.

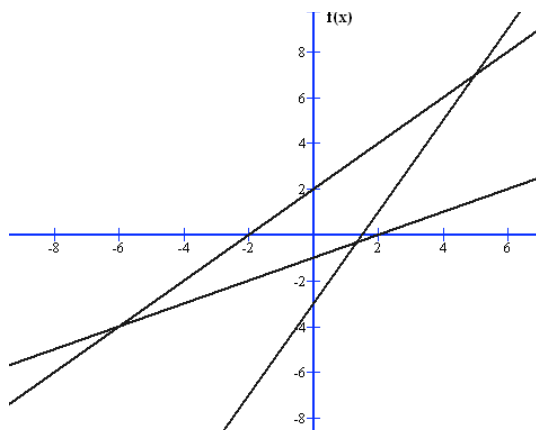


32. Calcula la distancia entre los puntos A(-1, 1) y B(4,3)

Respuesta:

$$d = \sqrt{(4+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{29}$$

33. En el siguiente gráfico hay dibujadas tres rectas. Calcula las ecuaciones de las dos rectas de menor pendiente.

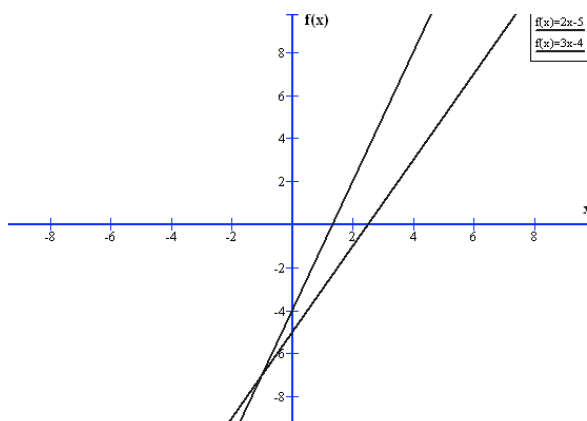


Respuesta:

Una de las rectas pedidas pasa por los punto $(0, -1)$ y $(2,0)$, su ecuación es: $y = \frac{x}{2} - 1$

La otra recta pasa por el punto $(-2,0)$ y $(2,0)$, su ecuación es: $y = x + 2$

34. Las dos funciones $y = 2x - 5$ e $y = 3x - 4$ son rectas, su dibujo se puede ver en el siguiente gráfico:



- ¿Cuál es su punto exacto de corte?
- ¿Cuál de las dos rectas tiene mayor pendiente? ¿Cuáles son sus pendientes?
- ¿Alguna de las dos rectas pasa por el punto $(1.000, 2996)$?

Respuesta:

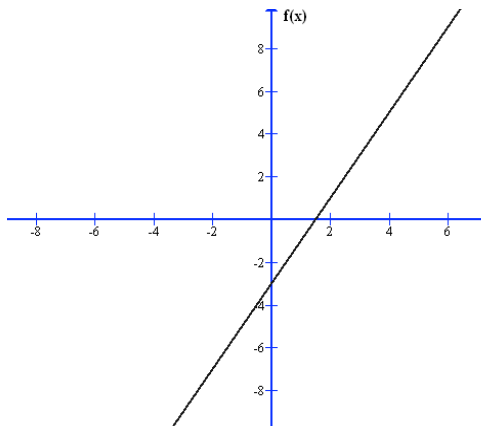
a) El punto de corte de las rectas corresponde a la solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 3x - 4 \end{cases} \text{ la solución es } x = -1, y = -7, \text{ por tanto el punto de corte es } P(-1, -7)$$

- La recta de mayor pendiente es la recta $y = 3x - 4$, las pendientes de las rectas son 2 y 3 respectivamente.
- La recta $y = 3x - 4$ pasa por el punto $(1.000, 2996)$



35. La siguiente gráfica corresponde a la función $y = 2x - 3$



Calcula:

- A) Los puntos de corte con los ejes
- B) Pendiente de la recta
- C) ¿Pasa dicha recta por el punto P(5,6)?

Respuesta:

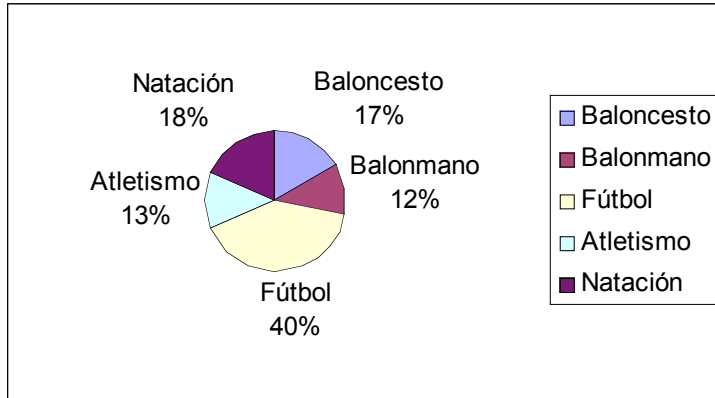
- a) Para obtener el corte con los ejes, se procede de la siguiente manera
Para $x = 0$ calculamos el punto de corte con el eje OY. En nuestro caso (0, -3)
Para $y = 0$ calculamos el punto de corte con el eje OX. En nuestro caso (3/2,0)
- b) La pendiente de la recta viene dada por el valor 2
- c) La recta no pasa por el punto P(5, 6)

36. Los 120 alumnos de un instituto practican los siguientes deportes:

Deportes	Número de estudiantes
Baloncesto	20
Balonmano	14
Fútbol	48
Atletismo	16
Natación	22
	Total: 120

En base a los siguientes datos construir el diagrama de sectores correspondiente.

Respuesta:



37. En la fabricación de cierto número de bombillas, se ha detectado que algunas son defectuosas. Se han estudiado 200 cajas de 100 bombillas cada una, obteniéndose la siguiente tabla estadística.

Bombillas defectuosas	Número de cajas
	5
2	15
3	38
4	42
5	49
6	32
7	17
8	2

Calcula la media de bombillas defectuosas.

Respuesta:

Bombillas defectuosas x	Número de cajas f	x. f
1	5	5
2	15	30
3	38	114
4	42	168
5	49	245
6	32	192
7	17	119
8	2	16
Total	200	Total 889

$$\text{Media} = \frac{889}{200} = 4,4 \text{ bombillas defectuosas de media por caja}$$



38. Los cuarenta alumnos de un aula se distribuyen según aparecen en la siguiente tabla. La variable anotada es la estatura.

Intervalos (cm)	Frecuencia
148,5 a 153,5	2
153,5 a 158,5	4
158,5 a 163,5	11
163,5 a 168,5	14
168,5 a 173,5	5
173,5 a 178,5	4

Calcula: a) La media aritmética
b) La desviación típica.

Respuesta:

Intervalos (cm)	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
148,5 a 153,5	151	2	302	45.602
153,5 a 158,5	156	4	624	97.344
158,5 a 163,5	161	11	1771	285.131
163,5 a 168,5	166	14	2334	385.784
168,5 a 173,5	171	5	855	146.205
173,5 a 178,5	176	4	704	123.904
Totales		40	6.580	1.083.970

$$\text{Media} = \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{6580}{40} = 164,5 \text{ cm}$$

$$S = \text{Desviación típica} = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2} = \sqrt{1.083.970 - (164,5)^2} = 39 \text{ cm}$$

39. Rellena la siguiente tabla estadística:

Variable (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia (f)	4	4		7	5		7	
Frecuencia Absoluta (F)			16		28	38	45	
Frecuencia relativa	0,08		0,16	0,14				

Respuesta:

Variable (x)	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia (f)	4	4	8	7	5	10	7	5
Frecuencia Absoluta acumulada (F)	4	8	16	23	28	38	45	50
Frecuencia relativa	0,08	0,08	0,16	0,14	0,1	0,2	0,14	0,1

Para rellenar la tabla es necesario conocer los conceptos de frecuencia, frecuencia absoluta acumulada y frecuencia relativa.



40. La siguiente tabla de datos, agrupados en intervalos, nos presenta las puntuaciones obtenidas por un grupo de adolescentes en un test de inteligencia.

Inteligencia	Número de estudiantes
85-90	5
91-95	10
96-100	20
101-105	35
106-110	15
111-115	10

- a) Calcular el valor de: Media, Mediana, Moda y Desviación Típica
- b) Dibuja el histograma correspondiente.

Respuesta:

a)

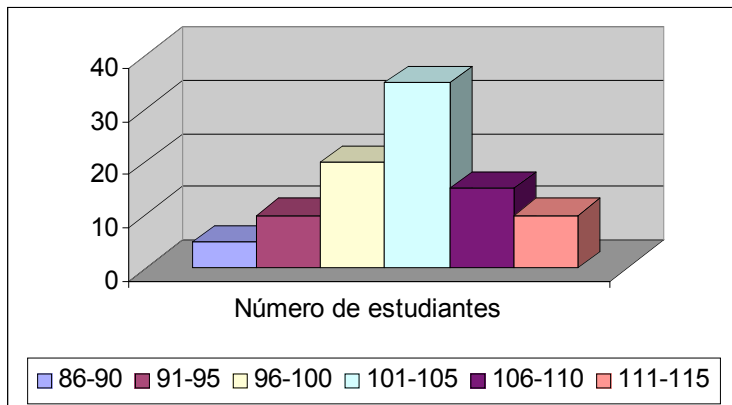
Inteligencia	Número de estudiantes	$X_i \cdot F_i$	$(X_i - \bar{X})^2 \cdot F_i$
X_i	F_i		
88	5	440	972,594045
93	10	930	800,48809
98	20	1960	311,57618
103	35	3605	38,808315
108	15	1620	549,582135
113	10	1130	1221,68809
Total: 95		Total :9685	Total:3894,73686

Media aritmética: $\bar{X} = \frac{9685}{95} = 101,947$

Moda = 103 (el valor que más se repite)

Mediana = 103 (de una manera simplificada)

b) El histograma correspondiente es :





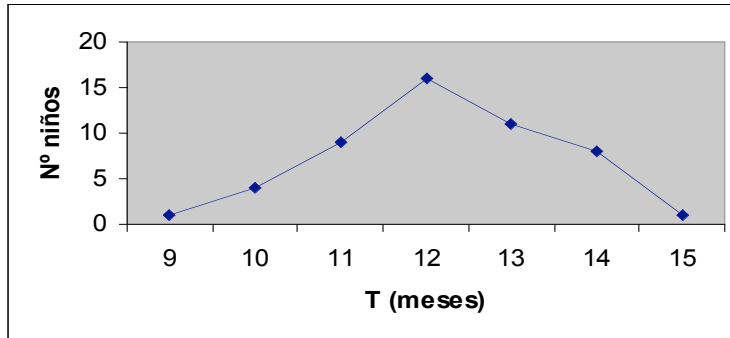
41 .Observa esta tabla sobre la edad de algunos niños y niñas en el momento de andar.

Tiempo (meses)	9	10	11	12	13	14	15
Nº niños	1	4	9	16	11	8	1

- Dibuja el gráfico correspondiente.
- Calcula la media y la desviación típica.
- ¿Cuál es el intervalo mediano?

Respuesta

a)



Respuesta:

b) la media = $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{9 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 11 \cdot 9 + \dots + 14 \cdot 8 + 15 \cdot 1}{50} = 12,2 \text{ meses}$

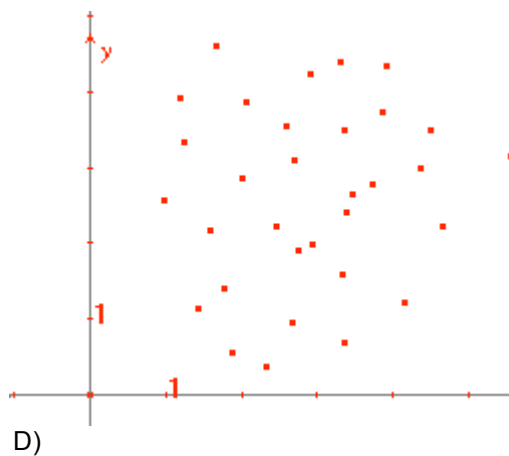
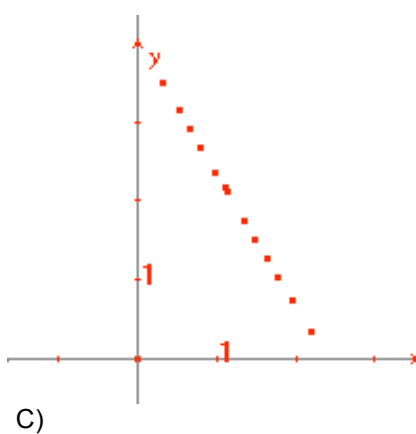
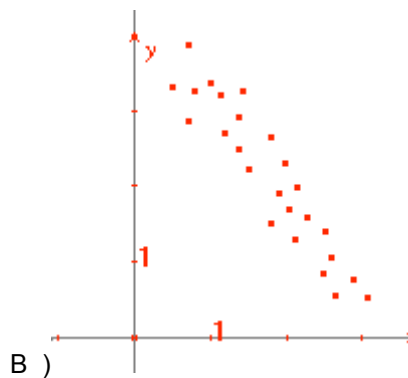
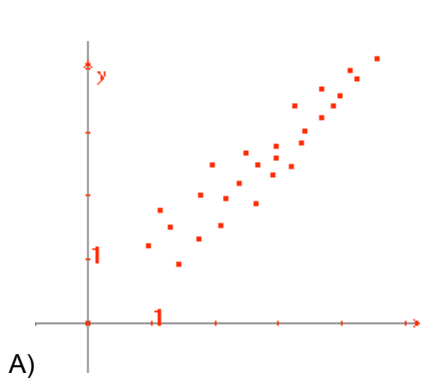
S = desviación típica = $\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i} = 1,29$

c) El intervalo mediano se halla mediante la frecuencia acumulada.

x_i	9	10	11	12	13	14	15
f_i	1	4	9	16	11	8	1
F_i	1	5	14	30	41	49	50

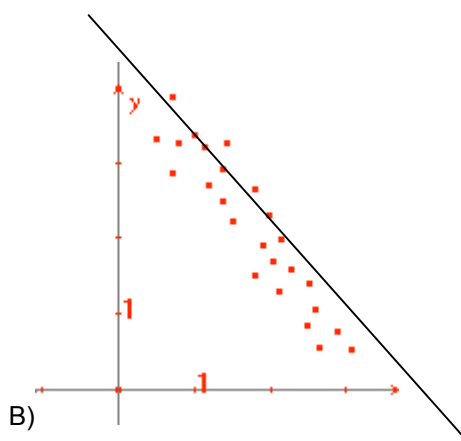
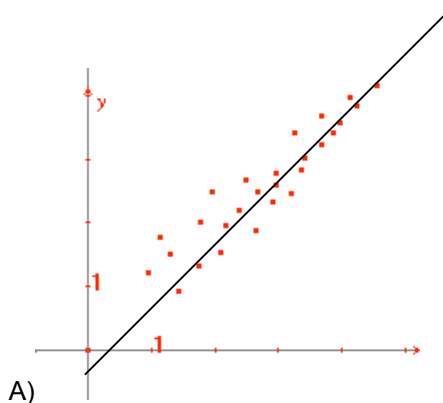
La mediana está situada sobre el intervalo de 12 a 13 meses.

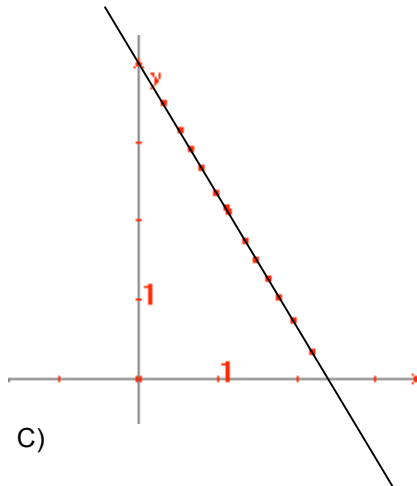
42. Traza a ojo la recta de regresión en cada una de estas distribuciones bidimensionales:



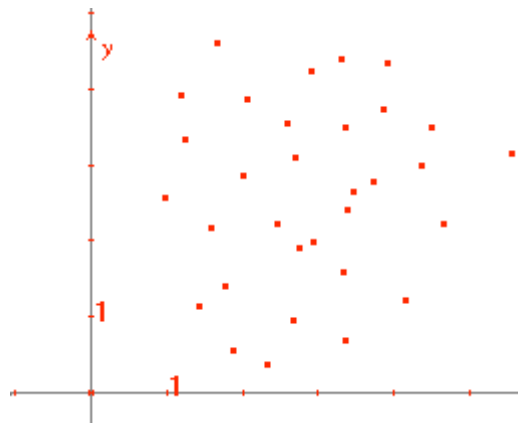
- b) ¿Cuáles de ellas tienen una correlación positiva y cuáles tienen una correlación negativa?
c) Trata de dar un valor aproximado del coeficiente de correlación en cada uno de los casos.

Respuesta:





C)



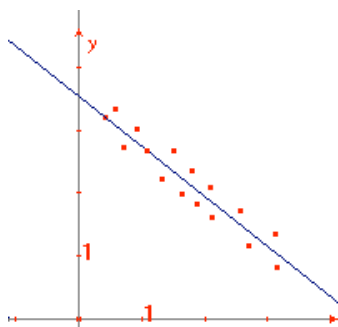
D)

- b. Los apartados B) y C) tienen una correlación negativa, mientras que el apartado A) tiene una correlación positiva. En el apartado D) no existe correlación de ningún tipo.
- c. La correlación A) puede valer en torno a 0,85
La correlación B) puede valer en torno a -0,85
La correlación C) es igual a -1 (hay una dependencia funcional)
En el apartado D) La correlación es cero.

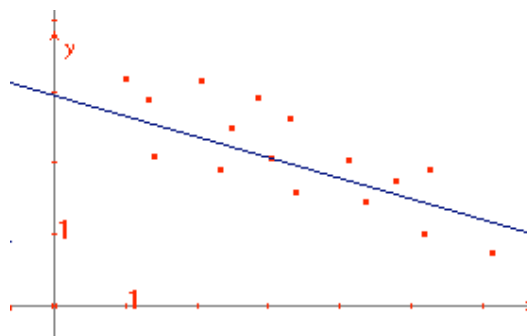
43. En cada uno de los siguientes casos se muestra una nube de puntos y su correspondiente recta de regresión. Sabiendo que sus coeficientes de correlación son:

a) $r=0$; b) $r= -0,96$; $r= -0,6$; $r= 0,8$; $r= 0,95$

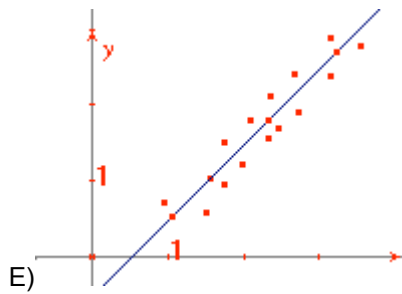
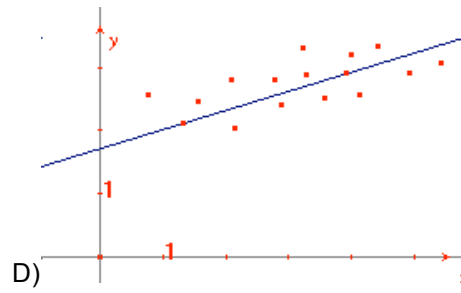
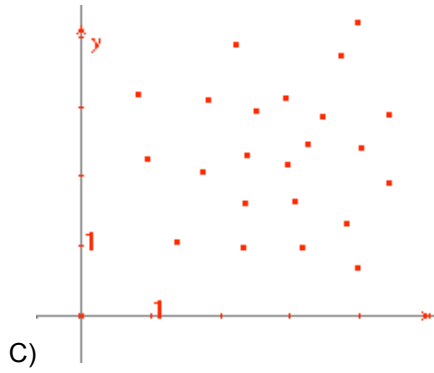
Asocia cada uno de ellos con la nube de puntos correspondiente.



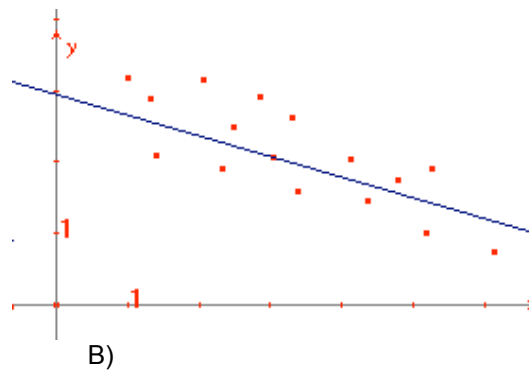
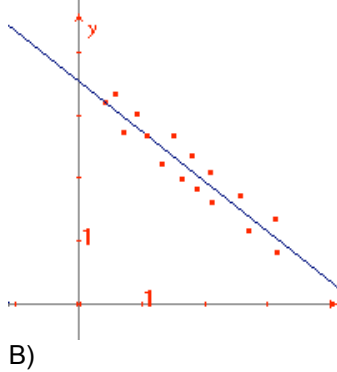
A)



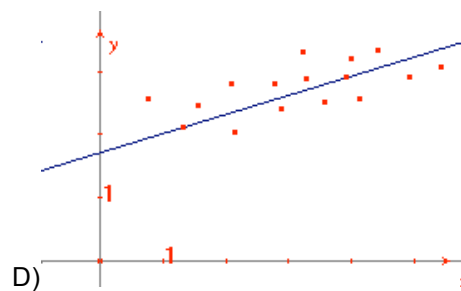
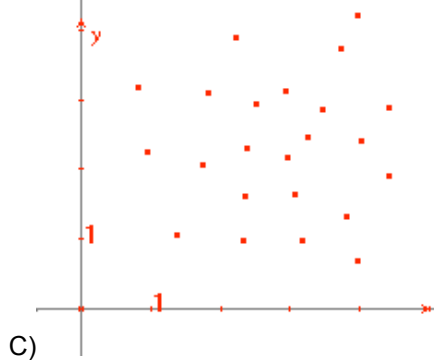
B)



Respuesta:

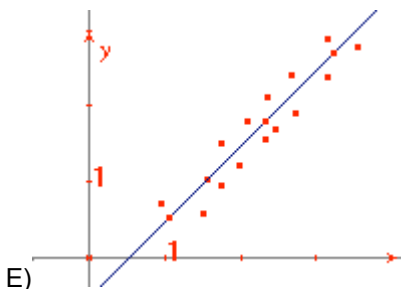


$R = -0,96$ (Hay una fuerte correlación $r = -0,6$ (no hay mucha correlación). Pero es negativa)



$R = 0$ (no hay correlación)

$r = 0,8$



E)

$r = 0,95$ (la nube de puntos está más próxima a la recta de regresión que en el caso anterior)

44. Los quince primeros equipos de fútbol de primera división, al final de la liga obtuvieron los siguientes resultados.

C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
G	20	22	20	17	17	14	12	13	11	10	10	12	11	11	11
E	9	5	8	8	4	9	11	8	11	13	12	8	8	7	6
P	5	7	6	9	13	11	11	13	12	11	12	14	15	15	17

C: Clasificación obtenida.

G: Número de partidos ganados.

E: Número de partidos empatados.

P: Número de partidos perdidos.

a) Dibujar la nube de puntos correspondientes, relacionando

Caso I: C y P

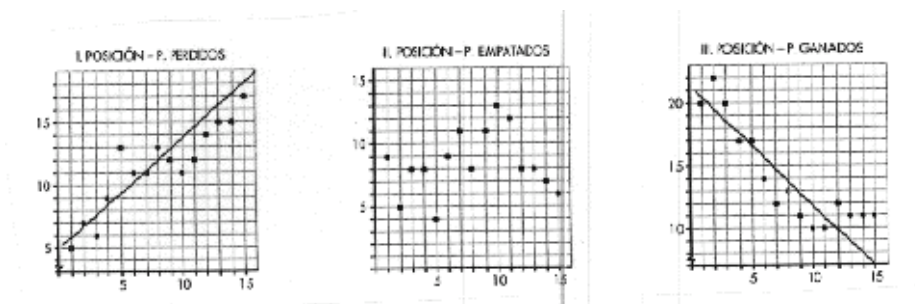
Caso II: C y E

Caso III: C y G

b) Indicar, en caso de que existiese, el tipo de correlación en cada uno de los tres casos.

Respuesta:

a) Las nubes de puntos en cada caso son las siguientes:



b) Se puede observar a simple vista que únicamente hay una correlación en los casos I y III.

En el caso I la correlación es positiva, mientras que en el caso III la correlación es negativa.

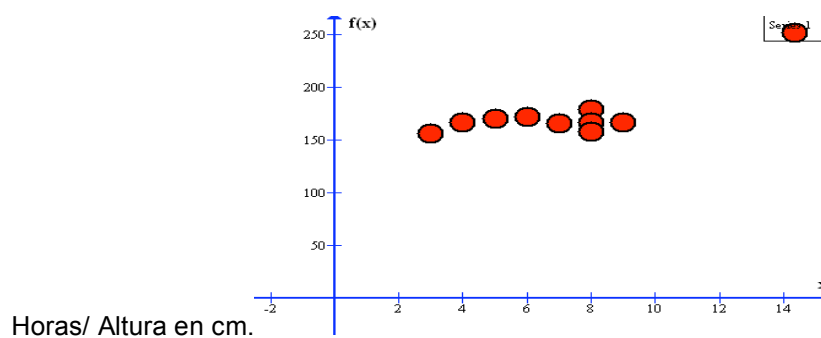
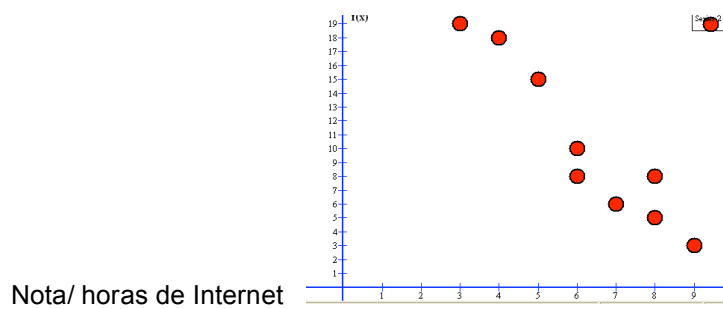
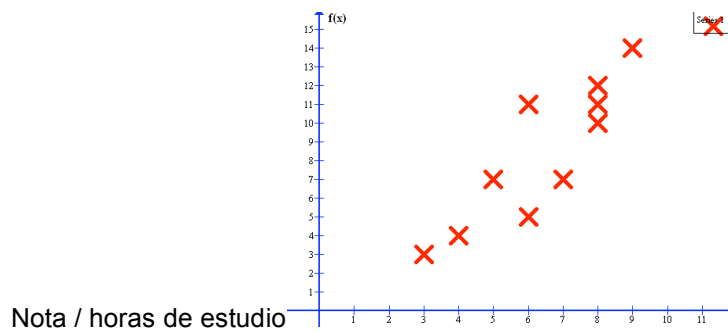
45. La tabla adjunta muestra la nota de 10 estudiantes, las horas dedicadas la preparación del examen, las horas que estuvieron conectados a Internet los días previos al examen y la estatura de cada uno de ellos.



Representa en sendas nubes de puntos cada uno de los casos, suponiendo que una de las variables es siempre la nota obtenida y la otra cada una de las otras tres variables.

Nota	3	4	5	6	6	7	8	8	8	9
Horas de estudio	3	4	7	11	5	7	10	11	12	14
Horas Internet	19	18	15	10	8	6	5	5	8	3
Altura (cm)	156	167	170	170	172	166	179	167	158	167

Respuesta:



46. Los pesos de los individuos de una población se distribuyen normalmente con media de 70 Kg y desviación típica de 6 Kg. De una población de 6.000 personas, calcular cuantas personas tendrán un peso entre 64 y 76 Kg.

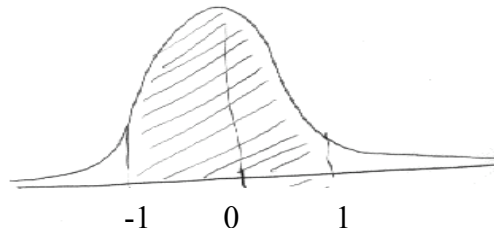
Respuesta:

Tipificando los dos datos tenemos



$$x_1 = \frac{64 - 70}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{76 - 70}{6} = 1$$



Mirando a las tablas obtenemos que el porcentaje de individuos que está entre -1 y 1 es igual a $2(0'8413 - 0'5) = 0,6826$

Como son 6.000 individuos, el resultado será $6.000 \times 0,6826 = 4.096$ (aproximadamente) individuos.

47. Si tenemos un dado correcto y lo lanzamos 50 veces:
¿Cuál es la probabilidad de que “el 1” salga más de 10 veces?

Respuesta:

Corresponde a una distribución binomial

a) Llamamos $x =$ “nº de veces que sale el 1”; así, x es $B\left(50; \frac{1}{6}\right)$.

Como $np > 5$ y $nq > 5$, podemos aproximar mediante una normal de media

$\mu = 50 \cdot \frac{1}{6} = 8,33$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 2,64$; es decir:

$$x \text{ es } B\left(50; \frac{1}{6}\right) \rightarrow x' \text{ es } N(8,33; 2,64) \rightarrow z \text{ es } N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P[x > 10] &= P[x' \geq 10,5] = P\left[z \geq \frac{10,5 - 8,33}{2,64}\right] = P[z \geq 0,82] = 1 - P[z < 0,82] = \\ &= 1 - 0,7939 = 0,2061 \end{aligned}$$

48. Una prueba de inteligencia está compuesta por 10 preguntas, cada una de ellas tiene cuatro respuestas, siendo sólo una de ellas correcta. Una persona contesta al azar las diez cuestiones. Calcular:

- a) La probabilidad de acertar exactamente cuatro preguntas.
- b) Probabilidad de acertar al menos ocho.

Respuesta:

La probabilidad de acertar es de $1/4 = 0'25$. Por tanto $p = 0'25$ y $q = 1 - p = 0'75$

Se trata de una distribución binomial $B(10; 0,25)$:



$$\begin{aligned} \text{a) } p(\text{acertar exactamente } 4) &= \binom{10}{4} 0,25^4 \cdot 0,75^6 = 0,1460 \\ \text{b) } p(\text{acertar al menos } 8) &= p(x=8) + p(x=9) + p(x=10) \\ &= \binom{10}{8} 0,25^8 \cdot 0,75^2 + \binom{10}{9} 0,25^9 \cdot 0,75 + \binom{10}{10} 0,25^{10} = 0,005 \end{aligned}$$

49. Se lanzan dos dados cúbicos al aire y se observa en cada uno de ellos el número que ha salido. Calcular:

- La probabilidad de que en los dos dados salga el mismo número.
- La probabilidad de que la suma de los dos números obtenidos sea igual a 7.
- La probabilidad de que el producto de los dos números sea igual a 12.

Respuesta:

- Como puedes observar hay 36 casos posibles: (1,1),(1,2)...(6,5) y (6,6)
La probabilidad de que sean los dos números iguales es $6/36 = 1/6$ (puesto que los casos favorables son 6: (1,1); (2,2);... (6,6)
- La suma 7 se puede dar únicamente en los siguientes casos: (1,6); (6, 1); (2, 5); (5,2);(3, 4) y (4,3). Total casos favorables son 6. La probabilidad pedida por tanto es igual a $6/36 = 1/6$
- Para que el producto sea 12 hay los siguientes casos: (2, 6); (6,2); (3,4) y (4,3). Total hay 4 posibilidades. La probabilidad es por tanto igual a $4/36 = 1/9$

50. Una urna contiene 12 bolas rojas, 3 bolas azules y 2 blancas.

Extraemos al azar una bola. ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

Respuesta:

Como tenemos un total de 17 bolas, de las cuales 12 son bolas blancas. La probabilidad pedida es igual a $P=12/17$

51. En la experiencia aleatoria de lanzar dos dados al mismo tiempo.

¿cuáles son los sucesos elementales de dicha experiencia?

Respuesta:

Hay 36 casos posibles: (1,1),(1,2)...(6,5) y (6,6) que son los sucesos elementales

52. Lanzamos dos monedas al mismo tiempo

¿cuáles son los sucesos elementales de dicha experiencia?

Respuesta:

Hay cuatro casos posibles(c,+),(+,c),(c,c) y (+,+)

53. Lanzamos tres monedas al mismo tiempo

¿cuáles son los sucesos elementales de dicha experiencia?

Respuesta:

Hay ocho casos posibles(c,c,c),(c,c,+),.....y (+,+,+)



Hacemos una tabla para la diferencia de resultados:

		1 ^{er} DADO					
		1	2	3	4	5	6
2 ^o DADO	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

$$P[\text{DIFERENCIA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

58. Si lanzamos 5 monedas. Halla la probabilidad de:

- Obtener 5 cruces.
- Obtener alguna cara.

Respuesta:

$$a) P[5 \text{ CRUCES}] = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0,03125 = 0,031$$

$$b) P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA}] = 1 - P[5 \text{ CRUCES}] = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0,96875 = 0,969$$

59. Una clase se compone de veinte alumnos y diez alumnas. La mitad de las alumnas y la mitad de los alumnos aprueban las matemáticas. Calcula la probabilidad de que, al elegir una persona al azar, resulte ser:

- Alumna o que aprueba las matemáticas.
- Alumno que suspenda las matemáticas.
- Sabiendo que es alumno, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe las matemáticas?

Respuesta:

Hacemos la tabla de contingencia:

	ALUMNOS	ALUMNAS	
APRUEBAN MAT.	10	5	15
SUSPENDEN MAT.	10	5	15
	20	10	30

$$a) P[\text{alumna} \cup \text{aprueba mat.}] = P[\text{alumna}] + P[\text{aprueba mat.}] - P[\text{alumna} \cap \text{aprueba mat.}] = \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$b) P[\text{alumno} \cap \text{suspende mat.}] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

$$c) P[\text{aprueba mat./alumno}] = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$



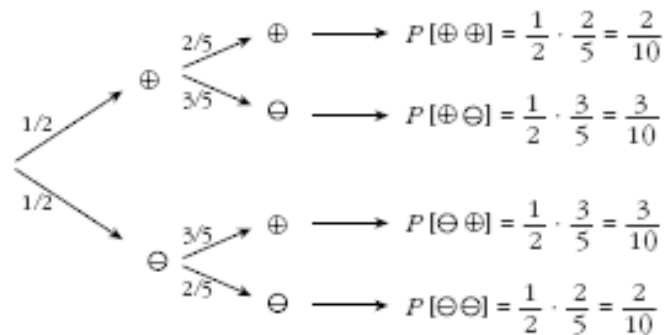
60. En una caja hay seis bolas numeradas, tres de ellas con números positivos y las otras tres con números negativos. Se extrae una bola y después otra, sin reemplazamiento.

- Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea positivo.
- Calcula la probabilidad de que el producto de los números obtenidos sea negativo.

Respuesta

Hay que recordar que el producto de dos números del mismo signo es positivo, mientras que si son de signo contrario el producto es negativo.

Hacemos un diagrama en árbol:



$$\text{a) } P[\oplus \oplus] + P[\ominus \ominus] = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$\text{b) } P[\oplus \ominus] + P[\ominus \oplus] = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$$



EJEMPLO DE PRUEBA

Contesta cinco de los seis ejercicios propuestos

(Cada ejercicio vale 2 pts.)

1. De una muestra de 75 pilas eléctricas, se han obtenido estos datos sobre su duración

Tiempo (en horas)	Número de pilas
[25, 30)	3
[30,35)	5
[35, 40)	20
[40,45)	30
[45,50)	12
[50,55)	5

- a) Representa los datos mediante un histograma
b) Calcula la media y la desviación típica
2. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. En un lote de 2000 tornillos, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosos?
(Nota: Utilizar la tabla de distribución normal)
3. Una persona duda entre comprarse un coche de gasolina o uno de gasóleo. El primero consume 9 litros cada 100 km. El segundo 6 litros cada 100 km. El coche de gasóleo resulta 4.000 euros más caro que el de gasolina. Sabiendo que el precio de la gasolina es de 0,71 euros el litro y el gasóleo 0,42 euros por litro. Averigua a partir de cuántos kilómetros resultará más rentable uno que otro. Explica cada uno de tus razonamientos.
4. Dada la función $y = 3x^2 - 2x - 2$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $x = 3$
b) Cuál es valor mínimo de dicha función.
c) Intenta dibujar dicha función.
5. De una urna que contiene nueve bolas rojas y cinco negras se extraen sucesivamente dos bolas (primero una de ellas y sin devolverla a la urna se extrae la segunda). Calcular la probabilidad en los siguientes casos:
a) Las dos bolas sean negras.
b) Las dos bolas sean rojas.
c) Que la primera sea roja y la segunda negra.
6. Encuentra el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje OX y las ordenadas en $x=2$ y $x=6$. Además haz un dibujo de la figura.



SOLUCIONARIO DEL EJEMPLO DE PRUEBA

Contesta cinco de los seis ejercicios propuestos

(Cada ejercicio vale 2 pts.)

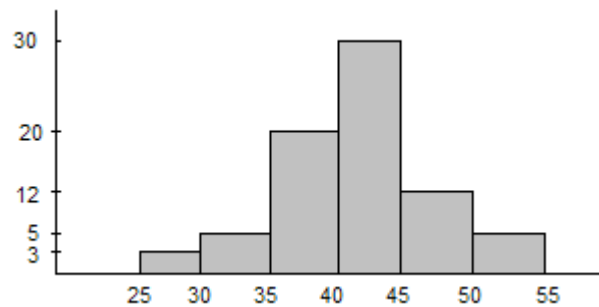
1. De una muestra de 75 pilas eléctricas, se han obtenido estos datos sobre su duración.

Tiempo (en horas)	Número de pilas
[25, 30)	3
[30,35)	5
[35, 40)	20
[40,45)	30
[45,50)	12
[50,55)	5

- Representa los datos mediante un histograma
- Calcula la media y la desviación típica

Respuesta:

A)



B)

X_i	f_i
27'5	3
32'5	5
37'5	20
42'5	30
47'5	12
52'5	5



$$\bar{X} = \frac{(27'5) \cdot 3 + (32'5) \cdot 5 + \dots + (52'5) \cdot 5}{3 + 5 + 20 + \dots + 5} = \frac{3102'5}{75} = 41'36 \text{ horas}$$

$$S \text{ (desviación típica)} = \sqrt{\frac{(27'5 - 41'36)^2 \cdot 3 + \dots + (52'5 - 41'36)^2 \cdot 5}{75}} = 5'63$$

Nota: Para realizar estos cálculos se ha empleado la calculadora en modo estadístico.

2. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. En un lote de 2000 tornillos ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 50 defectuosos?

(Nota: Utilizar la tabla de distribución normal))

Respuesta:

Es una distribución binomial $B(2000; 0'02)$

Con media $= n \cdot p = 40$

desviación típica $= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = 6'26$

Como $n \cdot p = 40 > 5$ y también $n \cdot q > 5$ podemos asegurar que se aproxima a una distribución normal $N(40 ; 6'26)$

$$P(x < 50) = P\left(z \leq \frac{50 - 40}{6'26}\right) = P(z \leq 1'59)$$

Por tanto si miramos en la tabla

$$P(z \leq 1'59) = 0'9441$$

Concluyendo que: la probabilidad de que el número de tornillos defectuosos sea menor que 50 es de 0'9441.

3. Una persona duda entre comprarse un coche de gasolina o uno de gasóleo. El primero consume 9 litros cada 100 km. El segundo 6 litros cada 100 km. El coche de gasóleo resulta 4.000 euros más caro que el de gasolina. Sabiendo que el precio de la gasolina es de 0,71 euros el litro y el gasóleo 0,42 euros por litro.

Averigua a partir de cuantos kilómetros resultará más rentable uno que otro. Explica cada uno de tus razonamientos.



Respuesta:

El coche gasóleo gasta 0'06 l/km
El coche gasolina gasta 0'09 l/km

$$C_1 = \text{Gasto coche de gasóleo después de recorrer } X \text{ (km)} = 4.000 + (0'06) \cdot 0'42 \cdot X$$

$$C_2 = \text{Gasto coche de gasolina después de recorrer } X \text{ (km)} = (0'09) \cdot 0'71 \cdot X$$

Por tanto:

$$C_1 = 4.000 + 0'0252 X$$

$$C_2 = 0'0639 X$$

Resolviendo éste sistema de ecuaciones cuando $C_1 = C_2$ obtenemos a partir de qué km resulta más rentable.

$$X \sim 103.359,17 \text{ km}$$

4. Dada la función $y = 3x^2 - 2x - 2$
- Calcula la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $x = 3$
 - Cuál es valor mínimo de dicha función.
 - Intenta dibujar dicha función.

Respuesta:

- a) Calcula la ecuación de la recta tangente a dicha curva en el punto $x = 3$

$$Y' = 6x - 2$$

$$Y(3) = 27 - 6 - 2 = 19$$

$$Y'(3) = 16$$

Recta tangente:

$$y - 19 = 16(x - 3)$$

- b) Cuál es valor mínimo de dicha función.

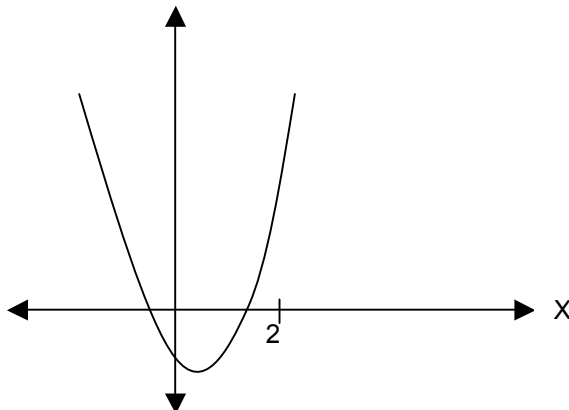
$$Y' = 6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1}{3} \longrightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3}$$

$$\text{Mínimo } \left(\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$



c) Intenta dibujar dicha función.



5. De una urna que contiene nueve bolas rojas y cinco negras se extraen sucesivamente dos bolas (primero una de ellas y sin devolverla a la urna se extrae la segunda). Calcular la probabilidad en los siguientes casos:

- a) Las dos bolas sean negras.
- b) Las dos bolas sean rojas.
- c) Que la primera sea roja y la segunda negra.

Respuesta:

$$a) \quad P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 / N_1) = \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{20}{182} = \frac{10}{91}$$

$$b) \quad P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2 / R_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13} = \frac{36}{91}$$

$$c) \quad P(R_1 \cap N_2) = P(R_1) \cdot P(N_2 / R_1) = \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13} = \frac{45}{182}$$

6. Encuentra el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje OX y las ordenadas en $x= 2$ y $x= 6$. Además haz un dibujo de la figura.

Respuesta:

El área pedida se puede obtener aplicando el teorema de Barrow



$$A = \int_2^6 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_2^6 = \frac{6^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{208}{3}$$

CORRESPONDENCIA ENTRE LAS PREGUNTAS DE LA PRUEBA Y LOS INDICADORES DE CONOCIMIENTO

Pregunta	Indicador de conocimiento
1	3.1 y 3.2
2	3.5 y 3.6
3	1.4
4	2.2, 2.3, 2.8 y 2.9
5	3.7, 3.8 y 3.9
6	2.12 y 2.13



PROGRAMACIÓN Y RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE

• PROGRAMACIÓN

El módulo está organizado en torno a trece unidades de aprendizaje. El conjunto de ellas contempla la totalidad de los contenidos presentes en los tres bloques de contenido. Las cuatro primeras son básicas y fundamentales de cara a entender el desarrollo de las unidades relativas al campo funcional. Las siguientes unidades están centradas en el problema de las funciones, se realiza un estudio de los aspectos claves dentro de este campo: concepto de función, límites, dibujo de curvas, concepto de derivada y concepto de integral, así como sus aplicaciones. En las cinco últimas unidades se presentan contenidos de tipo estadístico y del mundo de la probabilidad, estos son dos campos emergentes, tanto en las matemáticas como en el mundo que nos rodea.

El sentido del módulo es eminentemente práctico y funcional. Su planteamiento está basado en la resolución de ejercicios y problemas. A la hora de plantear las actividades en el presente módulo hemos de tener presente que las matemáticas son, sobre todo, una herramienta básica con la que podemos profundizar en otras áreas.

A continuación se detallan brevemente las unidades de aprendizaje. Se hace notar que de cara a un desarrollo lógico del módulo conviene seguir la ordenación que se sugiere, si bien se podría empezar por las unidades correspondientes al bloque de estadística y probabilidad sin que esto suponga ningún problema. Antes de introducirse de lleno en las unidades es conveniente dedicar un tiempo al repaso de los conceptos y procedimientos que cada profesor estime oportuno.

Bloques de contenido	Unidades de aprendizaje	Denominación	Tiempo estimado
1. Aritmética y Álgebra	U.A. 1	Números y operaciones	6 horas
	U.A. 2	El lenguaje algebraico y sus aplicaciones.	7 horas
	U.A. 3	Matrices y Determinantes.	4 horas
	U.A. 4	Sistemas de ecuaciones y su resolución	5 horas
2. Análisis Matemático	U.A. 5	El mundo de las funciones	4 horas
	U.A. 6	Estudio de algunas funciones	5 horas
	U.A. 7	El mundo de la derivada y sus aplicaciones	14 horas
	U.A. 8	El mundo de las integrales y sus aplicaciones.	10 horas
3. Estadística y Probabilidad	U.A. 9	Introducción a la estadística unidimensional: Parámetros estadísticos y su significado.	6 horas
	U.A. 10	Introducción a la estadística bidimensional: La correlación y la recta de regresión.	6 horas
	U.A. 11	Distribuciones de probabilidad. Discretas: La distribución binomial.	5 horas
	U.A. 12	La Distribución normal. Aproximación de la binomial mediante la normal.	8 horas
	U.A. 13	Introducción a la probabilidad. Probabilidad condicionada y compuesta.	10 horas



Unidad de Aprendizaje 1: NÚMEROS Y OPERACIONES (6 horas)

Esta unidad es clave para el desarrollo posterior. Uno de sus objetivos es que se dominen con cierta soltura los distintos números que en ella se trabajan, así como las relaciones entre ellos. Es muy importante un manejo seguro de los números enteros, los racionales e irracionales en los distintos contextos. Del mismo modo, es importante un manejo diestro de los números representados mediante notación científica como la más adecuada para trabajar con números muy grandes o muy pequeños.

Los alumnos deben hacer un uso adecuado de los distintos tipos de números y ser capaz de ubicarlos de una manera adecuada en la recta real. Las operaciones habituales con dichos números han de realizarse con seguridad y confianza. Esta unidad contempla el trabajo con una nueva operación: el logaritmo, para comprender este concepto y presentarlo adecuadamente es conveniente relacionarlo con la función exponencial y con la representación de los números en notación científica.

En toda la unidad es muy recomendable el uso de la calculadora, ella nos ahorrará muchos cálculos, y de ésta manera podremos dedicarnos a profundizar más en los procesos. Hacia el final de la unidad se incluyen los contenidos derivados de las progresiones aritméticas y geométricas, no es necesario profundizar mucho en este tipo de contenidos, nos interesa, especialmente, la distinción existente entre unas y otras. El obtener el término general de cada una de las progresiones puede ser un buen punto de partida de cara al concepto de sucesión numérica.

La unidad debe contemplar la resolución de distintos ejercicios y problemas de carácter numérico. El sentido de la unidad es dotarnos de unas herramientas necesarias y básicas para poder avanzar en matemáticas.

Unidad de Aprendizaje 2: EL LENGUAJE ALGEBRAICO Y SUS APLICACIONES (7 horas)

La presente unidad supone una profundización en el álgebra y sus métodos. Un inicio de la unidad puede centrarse en la relación existente entre nuestro lenguaje natural y el lenguaje algebraico. Posteriormente se ha de introducir el concepto de expresión algebraica, y como caso particular el estudio de un tipo de expresión algebraica: los polinomios.. Posteriormente se ha de trabajar el concepto de ecuación y su solución. Es muy importante saber qué significa resolver una ecuación y conocer algunas técnicas de resolución. La última parte de la unidad estará dedicada a resolver ecuaciones de segundo grado. El sentido de la unidad es eminentemente instrumental, esto significa que el álgebra debe una poderosa herramienta para resolver ecuaciones (de primer y segundo grado), así como para resolver problemas que admitan un planteamiento algebraico. El álgebra es una potente herramienta para resolver problemas que no debemos desaprovechar.

Unidad de Aprendizaje 3: MATRICES Y DETERMINANTES (4 horas)

Es una unidad de carácter meramente instrumental; sin embargo, es muy importante comprender los conceptos de matriz y determinante, dichos conceptos son claves de cara a acceder a la comprensión de otros contenidos como: resolución de sistemas (U. A 4). Conviene tener un dominio diestro de las operaciones elementales con matrices (suma, resta y multiplicación por un escalar), así como del cálculo de determinantes de 3x3 mediante la regla de Sarrus, estos aspectos nos posibilitarán la resolución de sistemas lineales mediante manipulación de las matrices.



Unidad de Aprendizaje 4: SISTEMAS DE ECUACIONES Y SU RESOLUCIÓN (5 horas)

Es una unidad importante dentro del campo algebraico. En primer lugar hemos de comprender bien qué significa resolver un sistema de ecuaciones. Entender la diferencia que existe entre un sistema compatible o incompatible. Saber lo que son dos sistemas equivalentes. Comprender cuando un sistema tiene una única solución (determinado) o tiene infinitas soluciones (indeterminado). La unidad tiene un carácter instrumental: el objetivo de la misma es resolver sistemas de ecuaciones por distintos procedimientos; pero especialmente haciendo hincapié en el llamado método de Gauss. Un aspecto importante de la unidad es todo lo concerniente al planteamiento y resolución de problemas mediante una concepción algebraica.

Unidad de Aprendizaje 5: EL MUNDO DE LAS FUNCIONES (4 horas)

Esta unidad es fundamental de cara a comprender el concepto de función. Su relación con otras unidades de aprendizaje es muy clara, especialmente con las tres unidades siguientes. Un buen aprendizaje del tema supone adquirir un conocimiento de los diversos lenguajes (verbal, tabular, gráfico y algebraico) en que estas pueden expresarse y desarrollar la capacidad para traducir de un lenguaje a otro.

A lo largo de la unidad ha de quedar claro el concepto de función como una relación entre dos magnitudes que varían de forma simultánea. Del mismo modo, tiene interés un estudio de las características globales de las gráficas (crecimiento, decrecimiento, continuidad, etc.), así como el concepto de dominio de una función. Al ser posible se han de proponer actividades y ejercicios en los que aparezcan funciones en diversos contextos.

Unidad de Aprendizaje 6: ESTUDIO DE ALGUNAS FUNCIONES (5 horas)

En esta unidad de aprendizaje se estudian de una manera más profunda algunos tipos de funciones, especialmente la función lineal, cuadrática y de una manera más somera las funciones: exponenciales y logarítmicas.

Si bien, las funciones lineales y cuadráticas ya han sido objeto de estudio en cursos anteriores, en esta unidad se volverán a estudiar, profundizando aún más en su conocimiento. A lo largo de la unidad hemos de comprender los aspectos más relevantes de las funciones objeto de estudio, como son: crecimiento, decrecimiento, tendencias, máximos, mínimos, etc. Es importante conocer algunas características básicas de las funciones, como: periodicidad, dominio de la función, rango, etc.

Unidad de Aprendizaje 7: EL MUNDO DE LA DERIVADA Y SUS APLICACIONES (14 horas)

Esta unidad de aprendizaje es clave, no sólo dentro del bloque relativo al análisis matemático sino en el conjunto de todas las unidades. El inicio de la misma contempla los conceptos de sucesiones numéricas y del límite de una función en un punto, así como los conceptos de continuidad y discontinuidad (todos ellos a nivel muy intuitivo). Estos conceptos deben tener un carácter marcadamente práctico, el trabajo puede ser de carácter muy cualitativo, lo que interesa es que los contenidos a trabajar estén muy claros.

El núcleo central de la unidad se centrará en el concepto de derivada de una función en un punto, así como la interpretación geométrica de dicho concepto. Este aspecto está estrechamente relacionado con la recta tangente a la curva en un punto, por esta razón conviene tener claros alguno de los aspectos sobre la función lineal, vistos en la U. A. 6. Una vez comprendido el concepto de derivada en un punto pasaremos al de la función derivada de una función dada. La última parte de la unidad estará dedicada a la práctica de algunas reglas básicas de derivación, lo que nos permitirá derivar algunas funciones elementales. La unidad se cierra con algunas aplicaciones de la derivada, especialmente al dibujo de curvas con la obtención de los llamados puntos críticos de una función: máximos, mínimos, etc.



Unidad de Aprendizaje 8: EL MUNDO DE LAS INTEGRALES Y SUS APLICACIONES (10 horas)

Esta unidad está estrechamente relacionada con la anterior y no es posible trabajarla bien si aquella no está bien asentada. La unidad tiene dos partes bien diferenciadas, la primera de ellas la dedicaremos al cálculo de primitivas de algunas funciones. Interesa mucho que se vea la relación existente (como operaciones inversas entre sí) entre la función derivada de una función y la función primitiva. La segunda parte de la unidad versará sobre el concepto de integral definida y alguna de sus aplicaciones, especialmente el cálculo de área bajo una curva (regla de Barrow). Es una unidad de carácter muy instrumental, con ella se cierra el bloque de contenido relativo al análisis matemático.

Unidad de Aprendizaje 9: INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA UNIDIMENSIONAL: PARÁMETROS ESTADÍSTICOS Y SU SIGNIFICADO (6 horas)

Esta unidad es clave para el desarrollo posterior. Uno de sus objetivos es que se dominen con cierta soltura los distintos conceptos estadísticos que en ella se trabajan, así como las relaciones entre ellos. Se realiza un estudio pormenorizado de la estadística relativa a una variable, tanto en los casos simples como agrupados.

Es muy importante un manejo seguro de los conceptos: muestra, población, variable, frecuencia relativa, porcentual y acumulada; así como las distintas técnicas de representación basadas en las tablas estadísticas. Las primeras actividades de la unidad tienen que ver con la agrupación y ordenación de los distintos datos estadísticos a través de tablas de frecuencias. Posteriormente se estudiarán las distintas gráficas estadísticas: histogramas, diagramas de barras, diagramas de sectores, etc.

La unidad debe contemplar la resolución de distintos ejercicios y problemas de carácter estadístico. El sentido de la unidad es dotarnos de unas herramientas necesarias y básicas para poder avanzar en matemáticas y en particular en la estadística. Buena parte de la unidad está encaminada a la presentación y manejo de los distintos parámetros estadísticos: de centralización y de dispersión.

Conviene dejar muy claro el sentido de los parámetros de centralización, especialmente el concepto de media aritmética como un parámetro que nos da una primera representación de todo el conjunto de la población estudiada. De igual modo ha de quedar muy claro el sentido de la desviación típica, como un parámetro que nos da un sentido de la dispersión o desviación, en torno a la media aritmética, de las variables estudiadas. Los dos parámetros: la media y la desviación típica nos ayudarán a comprender de una manera más realista y científica el conjunto de la población estudiada. En definitiva, tiene importancia no sólo el aspecto cuantitativo de dichos parámetros sino también el cualitativo: la media aritmética como un valor central, mientras la desviación típica como un valor que nos indica la desviación que existe respecto a la media. Es una unidad muy propicia para trabajar con problemas sacados de los distintos medios de comunicación.

El sentido de la unidad es eminentemente instrumental pero con un aspecto formativo importante. El uso de la calculadora en modo estadístico nos permitirá estudiar, calcular y analizar datos estadísticos de un modo más seguro y efectivo.



Unidad de Aprendizaje 10: INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL: LA CORRELACIÓN Y LA RECTA DE REGRESIÓN (6horas)

En esta unidad de aprendizaje se presentan muchos de los contenidos, presentes en la asignatura relativa al campo de la estadística bidimensional. Las primeras actividades de la unidad tienen que ver con la representación de las distribuciones bidimensionales mediante nubes de puntos, así como su representación. Posteriormente se realizarán los cálculos relativos a la media, varianza y covarianza. Naturalmente para comprender bien el sentido de la unidad es necesario poseer un dominio efectivo de la unidad anterior.

El planteamiento de toda la unidad ha de ser, en la medida de lo posible, práctico y funcional, aprovechándonos de situaciones presentes en los medios de comunicación.

El uso de la calculadora en modo estadístico nos permitirá estudiar, calcular y analizar datos estadísticos de un modo más seguro y efectivo, puesto que de otra manera los cálculos serán muy tediosos y con poco sentido.

El tema central de la unidad es el estudio de la relación que pueda existir entre las dos variables estudiadas, a través del concepto de correlación. Ha de quedar muy claro el estudio de la correlación por medio de su coeficiente, lo que nos da una medida de la posible relación entre las dos variables objeto de estudio. Se ha de dedicar un tiempo a realizar cálculos estimativos de dicho coeficiente en base a la representación proveniente de la nube de puntos.

La parte final de la unidad se dedicará al ajuste de una nube de puntos mediante una recta, en caso de que tal relación exista. Esta es la llamada recta de regresión, su cálculo ha de ser aproximativo, pero también se han de disponer de medios informáticos, tipo calculadora, que nos permitan un cálculo efectivo de los coeficientes de dicha recta de regresión.

El planteamiento de toda la unidad ha de ser, en la medida de lo posible, práctico y funcional, aprovechándonos de situaciones presentes en los medios de comunicación.

Unidad de Aprendizaje 11: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS. DISTRIBUCIÓN BINOMIAL (5 horas)

Esta unidad conviene darla después de la unidad 13, ya que en la misma se emplean conceptos relativos a la probabilidad. La unidad trabaja los elementos mínimos necesarios para poder comprender la unidad relativa a la distribución binomial. Ha de quedar muy claro que son las variables aleatorias discretas y las distribuciones de probabilidad. Al ser posible, se han de proponer actividades y ejercicios en los que aparezcan distribuciones discretas en diversos contextos familiares: dados, monedas, etc.

En esta unidad se estudia de una manera más profunda un tipo de distribución discreta: la distribución binomial. Para comprender bien dicha distribución es conveniente tener un dominio, aunque sea somero, de los llamados números combinatorios.

Esta unidad es un primer acercamiento a la distribución binomial y podremos afrontar en ella un tipo de problemas acorde a nuestra capacidad de cálculo; cuando los eventos a estudiar sean más complicados, siempre que las circunstancias lo permitan, estudiaremos dicha distribución desde otra óptica más compleja y potente: la distribución normal; pero esto será objeto de estudio en la unidad 12.

Unidad de Aprendizaje 12: LA DISTRIBUCIÓN NORMAL APROXIMACIÓN DE LA BINOMIAL MEDIANTE LA NORMAL.(8 horas)

Esta unidad de aprendizaje es clave, no sólo dentro del bloque relativo a las distribuciones continuas sino además en el mundo de las matemáticas. Muchos de los comportamientos



humanos siguen el patrón de la distribución normal. El inicio de la unidad contempla un estudio particular de la llamada distribución normal unitaria o tipificada. Se puede realizar un primer acercamiento informal e intuitivo a dicha función, para luego estudiar las variables tipificadas y el estudio de una distribución normal más general.

Es imprescindible un uso adecuado de las tablas relativas a la distribución normal. La unidad ha de tener un carácter eminentemente práctico, estudiando, si es posible, problemas sacados de nuestro contexto. La aproximación de la distribución binomial mediante la normal será un objetivo importante a estudiar.

Unidad de Aprendizaje 13: INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD. PROBABILIDAD CONDICIONADA Y COMPUESTA (10 horas)

En esta unidad de aprendizaje se presentan la mayoría de los contenidos de la asignatura, relativos al campo del mundo del azar o la probabilidad. Es muy importante acercarse al lenguaje del azar y tener un cierto dominio del mismo: experiencia aleatoria, sucesos elementales, suceso seguro, etc.

Posteriormente conviene trabajar los conceptos de frecuencia de un suceso y el concepto de probabilidad. Este último concepto debe quedar muy claro, la mejor manera es presentar numerosas experiencias aleatorias y calcular la probabilidad de algunos sucesos sean elementales o no, aunque sea de manera intuitiva. La última parte de la unidad está dedicada a la ley de Laplace, con ella podremos calcular la probabilidad de algunos sucesos más complejos. Para resolver algunos problemas son necesarios algunos conceptos de conteo combinatorios. La unidad ha de ser eminentemente práctica, pivotando sobre la resolución de actividades significativas y bien elegidas.



CORRESPONDENCIA ENTRE LAS UNIDADES DE APRENDIZAJE Y LOS INDICADORES DE CONOCIMIENTO.

Unidades de aprendizaje	Denominación	Indicadores de Conocimiento
U.A. 1	Números y operaciones	1.1 y 1.2
U.A. 2	El lenguaje algebraico y sus aplicaciones.	1.3 y 1.4
U.A. 3	Matrices y Determinantes.	1.6 y 1.7
U.A. 4	Sistemas de ecuaciones y su resolución	1.6; 1.7 y 1.8
U.A. 5	El mundo de las funciones	2.1 ; 2.2 y 2.3
U.A. 6	Estudio de algunas funciones	2.1 ; 2.2 ; 2.3 y 2.4
U.A. 7	El mundo de la derivada y sus aplicaciones	2.5; 2.6; 2.7; 2.8; 2.9: 2.10 y 2.11;
U.A. 8	El mundo de las integrales y sus aplicaciones.	2.12 y 2.13
U.A. 9	Introducción a la estadística unidimensional: Parámetros estadísticos y su significado.	3.1 y 3.2
U.A. 10	Introducción a la estadística bidimensional: La correlación y la recta de regresión.	3.3 y 3.4
U.A. 11	Distribuciones de probabilidad. Discretas: La distribución binomial.	3.6
U.A. 12	La Distribución normal. Aproximación de la binomial mediante la normal.	3.5 y 3.6
U.A. 13	Introducción a la probabilidad. Probabilidad condicionada y compuesta.	3.7; 3.8 y 3.9

Metodología a aplicar en la Unidades de aprendizaje.

La metodología de todas las unidades se basará en la resolución de problemas y ejercicios bien elegidos.



• RECURSOS PARA EL APRENDIZAJE

Para ayudarse de la preparación de estas unidades de forma autodidacta o dirigida resulta imprescindible el uso de medios y soportes didácticos, de los cuales los libros de texto son los más representativos.

Para preparar el módulo podemos emplear cualquier libro de matemáticas de los estudiados a nivel de Bachillerato. En base a esto se proponen los siguientes textos:

- **Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (de 1º y 2º de Bachillerato)**

Autores: José Colera y otros.

Edit: ANAYA.

- **Matemáticas(serie Bachillerato Matemáticas Aplicadas a las ciencias Sociales):**

Autores: Agustín Estévez y Juan Enciso.

Edi:Mc Graw Hill.

- **Compendio de Problemas de Matemáticas para el Bachillerato:**

Autores: D. Torrecilla y J.D. Molina.

Edit. Grupo Editorial Universitario.

- **Apuntes y problemas de Matemáticas para acceso a la univesidad**

Editorial: Libros de la Jarda

Web: www.lajarda.com/mat

Ambos títulos componen una obra en formato tipo apuntes cuya metodología eminentemente autodidacta y contenidos de carácter práctico, más de 4.000 ejercicios, están diseñados y orientados para preparar la prueba de acceso a la universidad en el ámbito científico-técnico.

Esta obra se adquiere exclusivamente a través de su página web.

Recursos matemáticos en Internet:

a) www.matemáticas.net

b) www.divulgamat.net