

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II USE 2022

www.ehu.eus



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- **Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta. Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.**
- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.**
- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKE: ALJEBRA

A.1. [[gehienez 2,5 puntu]]

Langileak hautatzeko enpresa jakin batek 90 galderako testa egiten du. Asmatutako galdera bakoitzeko 6 puntu ematen ditu; akats bakoitzeko 2,5 puntu kentzen ditu, eta erantzun gabeko galdera bakoitzeko 1,5 puntu kentzen ditu. Gainditzeko, gutxienez 210 puntu lortu behar dira.

Zenbat galdera zuzen erantzun behar dira 210 puntuak lortzeko, eta erantzun gabeko galderen kopurua gehi erantzun zuzenen kopurua akats-kopuruaren bikoitza izateko?

B.1. [[gehienez 2,5 puntu]]

Hiri jakin bateko udalak gehienez 120 etxebizitzako urbanizazioa eraikitzeke lizentzia eman du, A eta B motakoak.

Horretarako, eraikuntza-enpresak 15 milioi euroko kapital maximoa du. A motako etxebizitzaren eraikitze-kostua 100.000 € da, eta B motakoarena, berriz, 300.000 €. Gainera, A motako etxebizitza baten salmentagatik lortutako etekina 20.000 € da, eta B motako batengatik 40.000 €.

	Eraikitze-kostua	Etekin
A	100.000 €	20.000 €
B	300.000 €	40.000 €

- a) [[2, 2 puntu]] Mota bakoitzeko, zenbat etxebizitza eraiki behar dira etekin maximoa lortzeko?
- b) [[0, 3 puntu]] Zenbat da aipatutako etekin maximo hori?



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKE: ANALISIA

A.2. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bedi $f(x)$ funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & x < 0 \quad \text{bada} \\ x^2 - x - a & x \geq 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

- [0,7 puntu]** Aurki ezazu a parametroaren balioa $f(x)$ funtzioa $x = 0$ puntuan jarraitua izateko.
- [1 puntu]** $a = 2$ kasuan, azter itzazu funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta maximo eta minimo erlatiboak.
- [0,8 puntu]** $a = 2$ kasuan, egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa.

B.2. [gehienez 2,5 puntu]

- [0,8 puntu]** Kalkula itzazu honako funtzio hauen deribatua:

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3 \qquad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

- [0,6 puntu]** Zehaztu ezazu $h(x)$ funtzioak $x = 1$ abszisa-puntuan duen zuzen ukizaillearen ekuazioa.

$$h(x) = \frac{3x+6}{2x+1}$$

- [0,5 puntu]** Zehaztu itzazu, existitzen badira, $h(x)$ funtzioaren asintota bertikalak eta horizontalak.
- [0,6 puntu]** Kalkula ezazu:

$$\int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx$$



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKE: PROBABILITATEA

A.3. [[gehienez 2,5 puntu]]

Liburu batek 230 orrialde ditu 3 kapitulutan banatuta. Lehen kapituluak 100 orrialde ditu, eta horietatik % 15ek akatsak ditu. Bigarrenak 80 orrialde ditu, eta horietatik 8 akastunak dira; eta, hirugarrenean, 50 orrialdekoa, 40 orrialdek soilik ez dituzte akatsik.

Liburua orrialde batetik, zoriz, irekitzen baldin badugu:

- [[0,5 puntu]] Zein da bigarren kapitulukoa izateko probabilitatea?
- [[0,75 puntu]] Kalkula ezazu aukeratutako orrialdeak akatsak izateko eta hirugarren kapitulukoa izateko probabilitatea.
- [[0,75 puntu]] Kalkula ezazu aukeratutako orrialdeak akatsik ez izateko probabilitatea.
- [[0,5 puntu]] Aukeratutako orrialdeak akatsak dituela ikusten dugu, zein da hirugarren kapitulukoa izateko probabilitatea?

B.3. [[gehienez 2,5 puntu]]

Izan bitez A, B, C, D , eta E zorizko esperimendu jakin baten gertaerak.

- [[0,75 puntu]] Badakigu $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$ eta $P(A \cup B) = 0,5$, direla. Kalkula ezazu A eta B gertatzeko probabilitatea.
- [[1 puntu]] Badakigu $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$ eta $P(C \cup D) = 0,7$ direla. Kalkula ezazu C gertatzeko probabilitatea, D gertatu dela jakinda.
- [[0,75 puntu]] Badakigu $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ eta A eta E gertaerak askeak direla. Kalkula ezazu gertaera bietako baten bat gertatzeko probabilitatea.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKE: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4. [gehienez 2,5 puntu]

Hizkuntz Ingelesa azterketa batean, aztertutako ikasleen % 30ek 7,6 puntu baino gehiago lortu zuen. Badakigu azterketa horretan lortutako puntuazioak 6,8 puntuko batezbestekoa duen banaketa normal bati jarraitzen diola.

- [0,75 puntu]** Kalkula ezazu puntuazioaren banaketaren desbideratze tipikoa.
- [0,75 puntu]** Desbideratze tipikoa 1,5 puntu baldin bada, zer puntuazio gainditzen du ikasleen % 20k soilik?
- [1 puntu]** Desbideratze tipikoa 1,5 puntu baldin bada, eta *Gainditua* 5 puntu edo gehiago lortuta lortzen bada, ikasleen zer portzentajek gainditu du azterketa?

B.4. [gehienez 2,5 puntu]

Gaixotasun jakin baten aurkako txertoa hartu duen populazioaren portzentajea egiaztatzeko esperimentu bat diseinatu da. Horretarako 1.000 laguneko zorizko lagina aukeratu da, eta txertoa jaso duten ala ez galdetu zaie. Hauetariko 860k baietz erantzun dute eta gainontzekoek ezetz.

Informazio honekin:

- [1,25 puntu]** Zenbatets ezazu txertoa jaso duen populazioaren pertsonen portzentajea, % 95eko konfiantza-mailaz.
- [0,75 puntu]** Kalkula ezazu aipatutako konfiantza-mailarako egindako errore maximo onargarria.
- [0,5 puntu]** Azaldu itzazu lortutako emaitzak.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi ariketaz osatuta dago.
2. **Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.**
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, ...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebatzitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzean dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

2022



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKE: ALJEBRA

A.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- Problemaren planteamendua, **1 puntu**.
- Cramer-en erregela erabil daitekeela egiaztatzea, **0,3 puntu**.
- Hiru aldagaien kalkulua, 0,4 puntu aldagai bakoitza, **1,2 puntu**.

B.1. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 2,2 puntu

- Helburu funtzioa zehaztea, **0,1 puntu**.
- Murrizketak determinatzea, **0,2 puntu**.
- Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea eta zehaztea,
 - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu, beraz **0,4 puntu**.
 - Bideragarritasun-eskualdea zehaztea, **0,4 puntu**.
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea.
 - A erpina, **0,1 puntu**.
 - B erpina, **0,125 puntu**.
 - C erpina, **0,25 puntu**.
 - D erpina, **0,125 puntu**.
- Erpinetan funtzioa baloratzea, **0,4 puntu**.
- Maximoa zehaztea, **0,1 puntu**.

b. 0,3 puntu.

- Funtzioaren balioa puntu maximoan, **0,3 puntu**.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKE: ANALISIA

A.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,7 puntu.** a parametroaren balioaren kalkulua funtzioa jarraitua izateko $x = 0$ puntuan.
- Funtzio baten jarraitutasuna puntu batean definitzea, **0,2 puntu.**
 - Alboko limiteen kalkulua, **0,3 puntu.**
 - a parametroaren balioa zehaztea **0,2 puntu.**
- b. **1 puntu.**
- Funtzioaren hazkundearen ikerketa.
 - Funtzio arrazionalaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, **0,2 puntu.**
 - Bigarren mailako polinomioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, **0,3 puntu.**
 - Funtzioaren maximo eta minimo erlatiboen azterketa.
 - Funtzioa arrazionalaren maximo eta minimo erlatiboak, **0,2 puntu.**
 - Bigarren mailako polinomioaren maximo eta minimo erlatiboen kalkulua, **0,3 puntu.**
- c. **0,8 puntu.**
- Adierazpen grafikoa.
 - Bigarren mailako polinomioaren adierazpen grafikoa, **0,4 puntu.**
 - Funtzio arrazionalaren adierazpen grafikoa, **0,4 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.2. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,8 puntu.** $f(x)$ eta $g(x)$ funtzioen deribatua.
- $f(x)$ funtzioaren deribatua, **0,5 puntu.**
 - $g(x)$ funtzioaren deribatua, **0,3 puntu.**
- b. **0,6 puntu.** Funtzioaren zuzen ukitzaila $x = 1$ puntuan.
- Zehaztea zuzen ukitzailaren malda, **0,4 puntu.**
 - Zehaztea zuzen ukitzailaren ekuazioa, **0,2 puntu.**
- c. **0,5 puntu.** $h(x)$ funtzioaren asintota bertikalak eta horizontalak kalkulatzeko.
- Asintota bertikala, **0,25 puntu.**
 - Asintota horizontala, **0,25 puntu.**
- d. **0,6 puntu.** Integral mugagabeko kalkulua.
- a. $\int e^{3x} dx$ integralaren kalkulua, **0,1 puntu.**
 - b. $\int 3x^2 dx$ integralaren kalkulua, **0,1 puntu.**
 - c. $\int \frac{2}{x+2} dx$ integralaren kalkulua, **0,2 puntu.**
 - d. $\int \frac{4}{(x+2)^2} dx$ integralaren kalkulua, **0,2 puntu.**



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKE: PROBABILITATEA

A.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. 0,5 puntu.
- Zuhaitz diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.
- b. 0,75 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu**.
 - $P(A \cap B)$ formula adieraztea, **0,35 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.
- c. 0,75 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu**.
 - Gertaeraren probabilitate osoa adieraztea edo bere formula, **0,35 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.
- d. 0,5 puntu
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu**.
 - A posteriori probabilitatea, Bayes-en teorema, adieraztea, **0,2 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu**.

B.3. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. 0,75 puntu.
- Venn-en diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu**.
 - $P(A \cap B)$ formula adieraztea, **0,25 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.
- b. 1 puntu.
- Zuhaitz diagrama edo eskema baten bat egitea, **0,25 puntu**.
 - Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,25 puntu**.
 - $P(C | D)$, formula adieraztea, **0,25 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.
- c. 0,75 puntu.
- Adieraztea gertaera askeak izateak zer esan nahi duen, **0,2 puntu**.
 - Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,15 puntu**.
 - $P(A \cup E)$ formula adieraztea, **0,15 puntu**.
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,25 puntu**.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOKE: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,2 puntu.**
- Ekuazioa ebaztea σ lortuz, **0,15 puntu.**

b. 0,75 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,2 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako k balioa zehaztea, **0,25 puntu.**

c. 1 puntu.

- Problemaren planteamendua, **0,3 puntu.**
- Taulan kontsultatutako probabilitateen balioak zehaztea, **0,3 puntu.**
- Eskatutako portzentajea, **0,4 puntu.**

B.4. ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,25 puntu.

- Laginaren proportzioa zer den dakiela adieraztea, **0,2 puntu.**
- Laginaren proportziorako konfiantza-tartearen formula zehaztea, **0,25 puntu.**
- Determinatzea $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,3 puntu.**
- Eskatutako konfiantza-tartea, **0,35 puntu.**
- Eskatutako portzentajea zehaztea, **0,15 puntu.**

b. 0,75 puntu.

- Errore maximo onargarria zer den adieraztea, **0,25 puntu.**
- Errorearen formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Errorearen kalkulua, **0,3 puntu.**

c. 0,5 puntu.

- Lortutako emaitzak arrazoitzen ditu, nahiz eta hauek zenbakiz zuzenak ez izan, **0,5 puntu.**

eman la zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK
PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

2022



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

EBAZPENAK

BLOKE: ALJEBRA

A.1. *Gizarte-errealitatearen egoera hizkuntza aljebraikoan adierazteko problema. Cramer-en erregelaren erabilera.*

Aldagaiak zehazten ditugu

$$\begin{cases} x = & \text{asmatutako erantzunen kopurua} \\ y = & \text{oker erantzundako galderen kopurua} \\ z = & \text{erantzun gabeko galderen kopurua} \end{cases}$$

	NOLA	PUNTUAZIOA
x	ONDO	+6
y	OKER	-2,5
z	ERANTZUN BARIK	-1,5

Aldagai horien arabera, honako sistema hau lortzen dugu:

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 6x - 2,5y - 1,5z = 210 \\ x + z = 2y \end{cases}$$

Cramer-en metodoa erabil dezakegula egiaztatzen dugu, hau da, koefizienteen matrizearen determinantea nulua ez dela.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & -2,5 & -1,5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & -2,5 & -7,5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -7,5 - 15 = -22,5 \neq 0$$

Beraz, Cramer-en erregelaren bidez ebazten dugu:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 90 & 1 & 1 \\ 210 & -2,5 & -1,5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-22,5} = \frac{30 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -2,5 & -1,5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-22,5} = \frac{30(-7,5 - 14 - 7 - 9)}{-22,5} = 50$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 90 & 1 \\ 6 & 210 & -1,5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-22,5} = \frac{30 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 7 & -1,5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-22,5} = \frac{30(7 - 4,5 - 7 - 18)}{-22,5} = 30$$

**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 90 \\ 6 & -2,5 & 210 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-22,5} = \frac{30 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 6 & -2,5 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-22,5} = \frac{30(-36 + 7 + 7,5 + 14)}{-22,5} = 10$$

Beraz:

$$\begin{cases} x = & \text{asmatutako erantzunen kopurua} = 50 \\ y = & \text{oker erantzundako galderen kopurua} = 30 \\ z = & \text{erantzun gabeko galderen kopurua} = 10 \end{cases}$$

2022



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B.1 Bi aldagaiko programazio linealeko problemaren ebazpena.

a) Eraiki beharreko etxebizitza-kopurua etekin maximoa lortzeko.

	Ekoizpen kostua	Etekina	ETXE BIZITZA
A	100.000	20.000	x
B	300.000	40.000	y

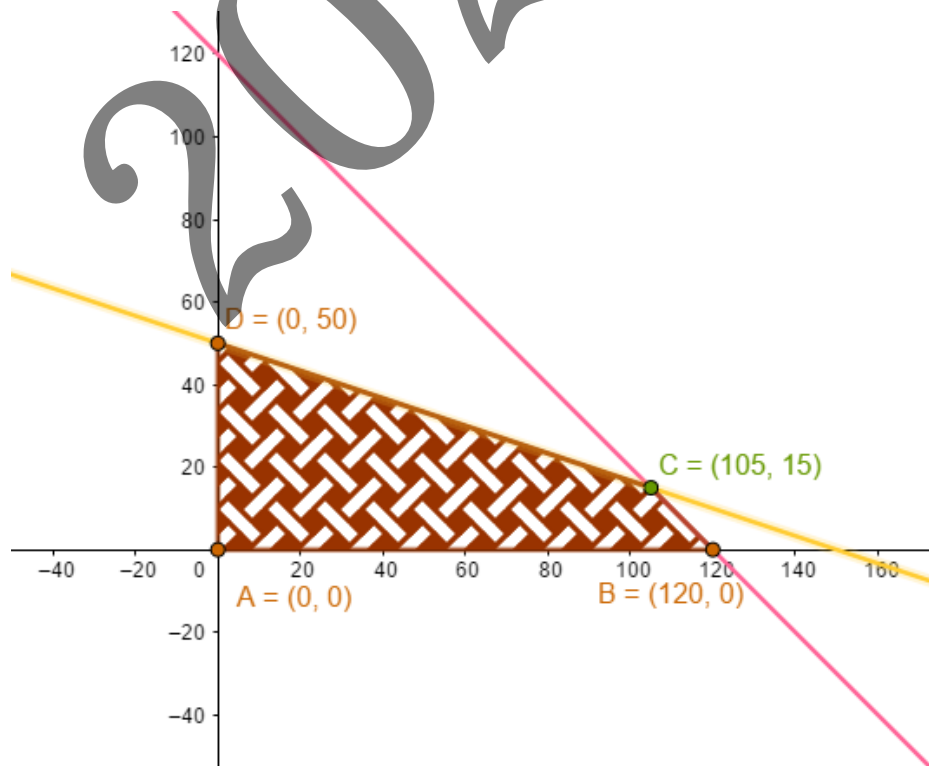
✚ Helburu funtzioa da:

$$f(x, y) = 20.000x + 40.000y$$

✚ Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ 100.000x + 300.000y \leq 15.000.000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 120 \\ x + 3y \leq 150 \end{cases}$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



✚ C erpinaren kalkulua:

$$C = \begin{cases} x + y = 120 \\ x + 3y = 150 \end{cases} \Rightarrow x = 120 - y \Rightarrow 120 - y + 3y = 150 \Rightarrow \begin{cases} x = 105 \\ y = 15 \end{cases}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

Beraz, erpinak dira:

$$A(0,0), \quad B(120,0), \quad C(105,15), \quad D(0,50)$$

✚ Erpin horietan helburu funtzioak hartzen dituen baloreak kalkulatu ditugu:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(120,0) = 2.400.000$$

$$f(C) = f(105,15) = 2.700.000$$

$$f(D) = f(0,50) = 2.000.000$$

✚ Funtzioaren balio maximoa **C(105, 15)** puntuan lortzen da, eta ondorioz, **A motako 105 eta B motako 15 etxebizitza** eraiki behar dira etekin maximoa lortzeko.

b) Etekin maximoa.

$$f(x,y) = f(C) = f(105,15) = 20.000 \cdot 105 + 40.000 \cdot 15 = \mathbf{2.700.000 \text{ €}}.$$

Horrela **2.700.000 €-ko etekin maximoa** lortuko da.

2022



**CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK**

BLOKE: ANALISIA

A.2 Funtzio baten jarraitutasuna eta deribagarritasuna. Adierazpena grafikoa. Funtzioaren ezaugarriak.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & x < 0 \quad \text{bada} \\ x^2 - x - a & x \geq 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$

a) Aurki ezazu a parametroaren balioa $f(x)$ funtzioa $x = 0$ puntuan jarraitua izateko.

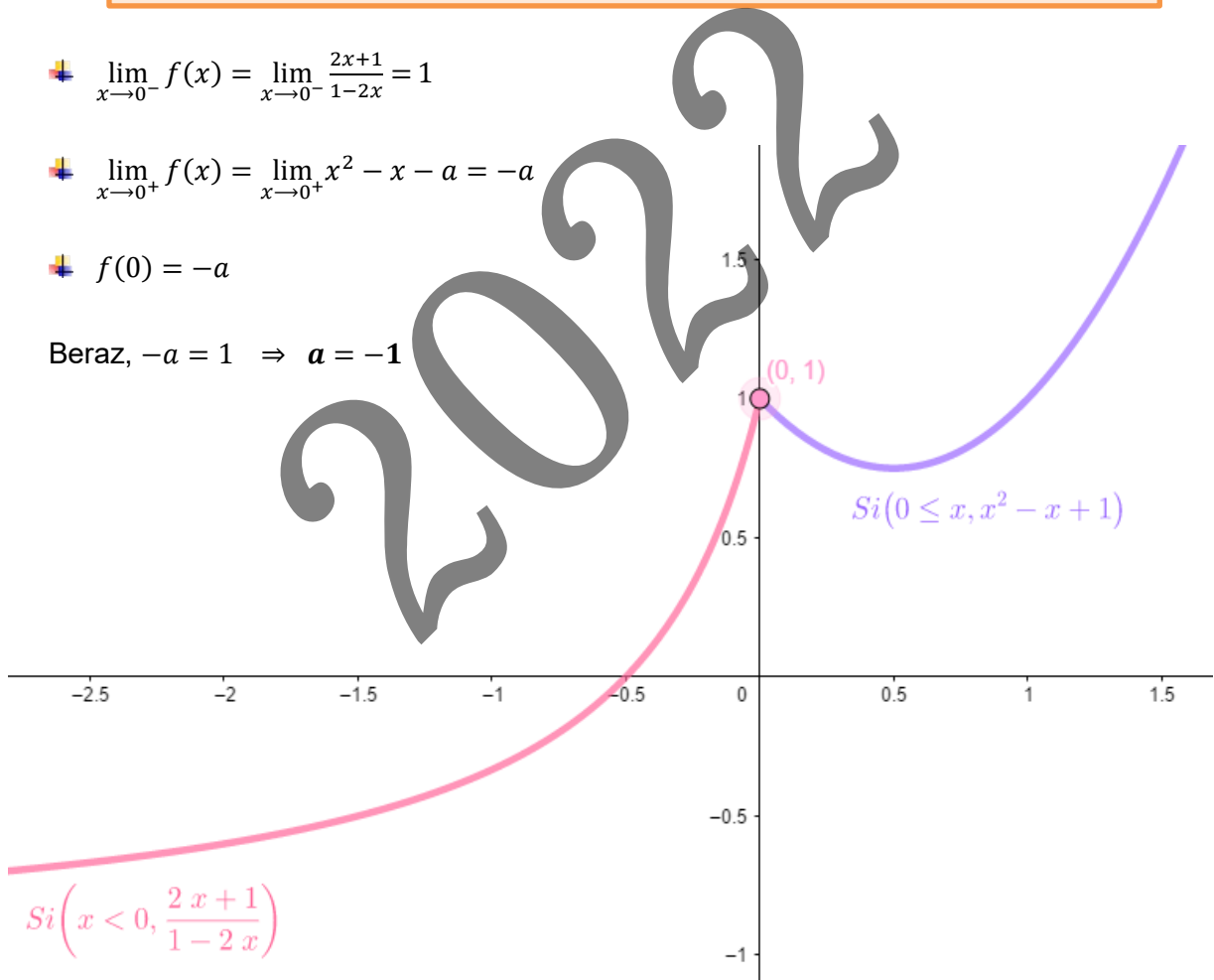
$$f(x) \text{ jarraitua } x = 0 \text{ puntuan} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x+1}{1-2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x - a = -a$$

$$f(0) = -a$$

Beraz, $-a = 1 \Rightarrow a = -1$



b) Funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta maximo eta minimo erlatiboak.

$a = 2$ kasuan, funtzioa da:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{1-2x} & x < 0 \quad \text{bada} \\ x^2 - x - 2 & x \geq 0 \quad \text{bada} \end{cases}$$



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

- Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak

$$f(x) \uparrow \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

✚ $x < 0$ bada

$$f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

eta $f'(x) > 0$ bere izate eremuan, orduan $(-\infty, 0)$ tartean ere.

Beraz; $f(x) \uparrow (-\infty, 0)$ tartean

✚ $x > 0$ bada

$$f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow 2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \Rightarrow f(x) \uparrow \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \text{ tartean}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(x) \downarrow \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ tartean}$$

Laburbilduz: $f(x) \uparrow (-\infty, 0)$ eta $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ tartean; eta $f(x) \downarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tartean

- Maximo eta minimo erlatiboak $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & x_0 \text{ maximo erlatiboa} \\ f''(x_0) > 0 & x_0 \text{ minimo erlatiboa} \end{cases}$$

✚ $x < 0$ bada, $f(x)$ funtzioaren deribatua ez da inoiz anulatzen:

$$\nexists x \text{ non } f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2} = 0 \text{ den}$$

Beraz, ez dago maximo ezta minimo erlatiborik ere $(-\infty, 0)$ tartean.

✚ $x > 0$ bada

- $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- $f''\left(x = \frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ puntuan minimo erlatiboa dago.
- $y = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ minimo erlatiboa.



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

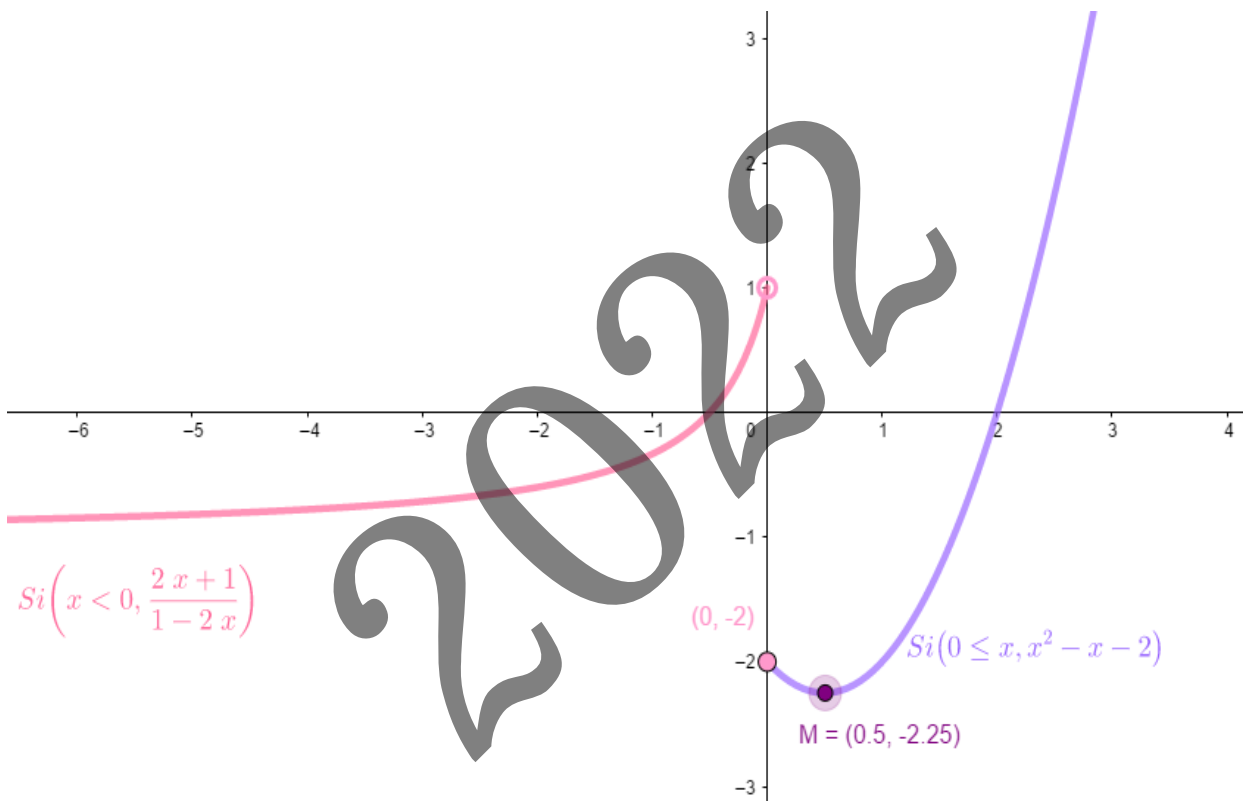
c) Adierazpen grafikoa $a = 2$ kasuan

• $x < 0$ bada

x	-2	-1	-1/2
$f(x)$	-3/5	-1/3	0

• $x \geq 0$ bada

x	0	1/2	1	2
$f(x)$	-2	-9/4	-2	0





B.2 Funtzio baten lehenengo deribatua. Funtzioa baten zuzen ukitzaila puntu batean. Jatorrizko funtzioa.

a) Kalkula itzazu honako funtzio hauen deribatuak.

$$f(x) = (x^2 - 1)(3x^3 + 5x)^3 \qquad g(x) = \frac{\ln(3x)}{e^{2x}}$$

✚ $f(x)$ funtzioaren deribatua:

$$f'(x) = 2x \cdot (3x^3 + 5x)^3 + 3(3x^3 + 5x)^2(9x^2 + 5) \cdot (x^2 - 1)$$

✚ $g(x)$ funtzioaren deribatua:

$$g'(x) = \frac{\frac{3}{3x} \cdot e^{2x} - 2e^{2x} \cdot \ln 3x}{(e^{2x})^2} = \frac{e^{2x} \left(\frac{1}{x} - 2 \ln 3x \right)}{(e^{2x})^2} = \frac{\frac{1}{x} - 2 \ln 3x}{e^{2x}}$$

b) $h(x)$ funtzioak $x = 1$ abzisa-puntuan duen zuzen ukitzailaren ekuazioa.

$$h(x) = \frac{3x + 6}{2x + 1}$$

✚ Zuzen ukitzailaren ekuazioa $x = 1$ puntuan.

$$y = h'(1) \cdot x + n$$

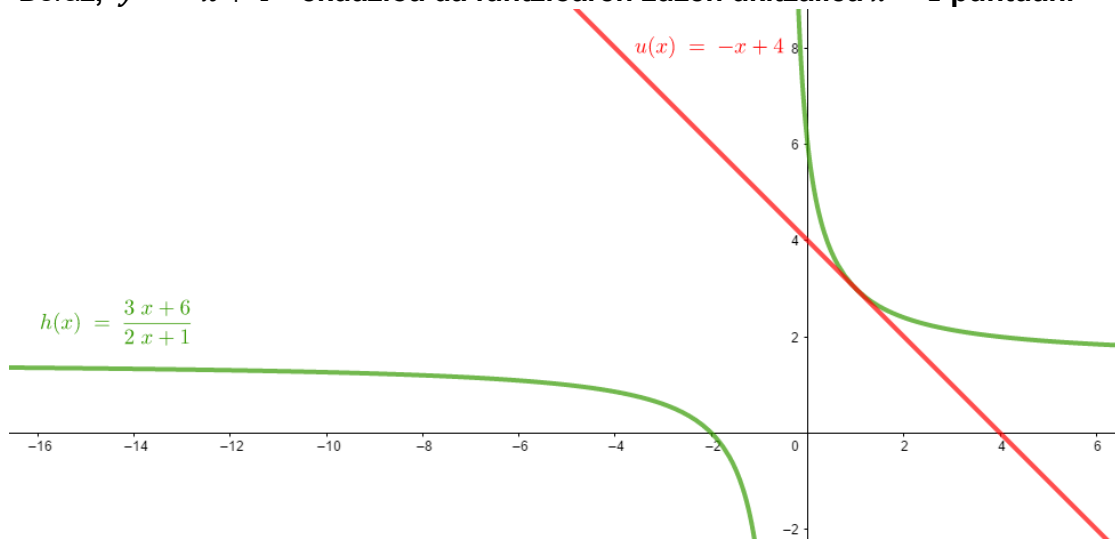
✚ $h(x)$ funtzioaren deribatua:

$$h'(x) = \frac{3(2x + 1) - 2(3x + 6)}{(2x + 1)^2} = \frac{-9}{(2x + 1)^2} \Rightarrow h'(1) = -1$$

$$\Rightarrow y = -1 \cdot x + n = -x + n$$

✚ $(1, h(1)) = (1, 3)$ puntua zuzen ukitzailan dago $\Rightarrow 3 = -1 + n \Rightarrow n = 4$

Beraz, $y = -x + 4$ ekuazioa da funtzioaren zuzen ukitzaila $x = 1$ puntuan.





c) Zehaztu itzazu, existitzen badira, $h(x)$ funtzioaren asintota bertikalak eta horizontalak.

✚ Asintotak bertikalak.

$h(x)$ -ren izate eremua $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ da, orduan

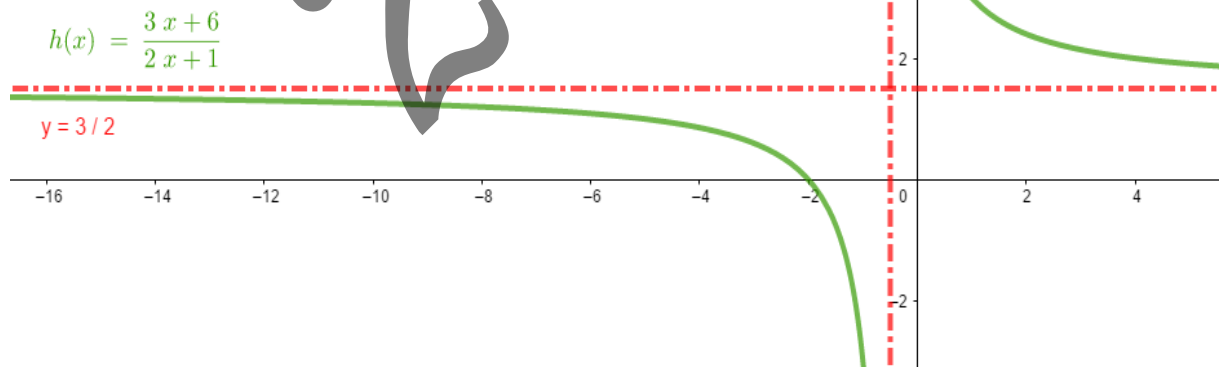
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} h(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} h(x) = +\infty$

Beraz, $x = -\frac{1}{2}$ funtzioaren asintota bertikala da.

✚ Asintotak horizontalak.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x+6}{2x+1} = \frac{3}{2}$$

Beraz $y = \frac{3}{2}$ funtzioaren asintota horizontala da.



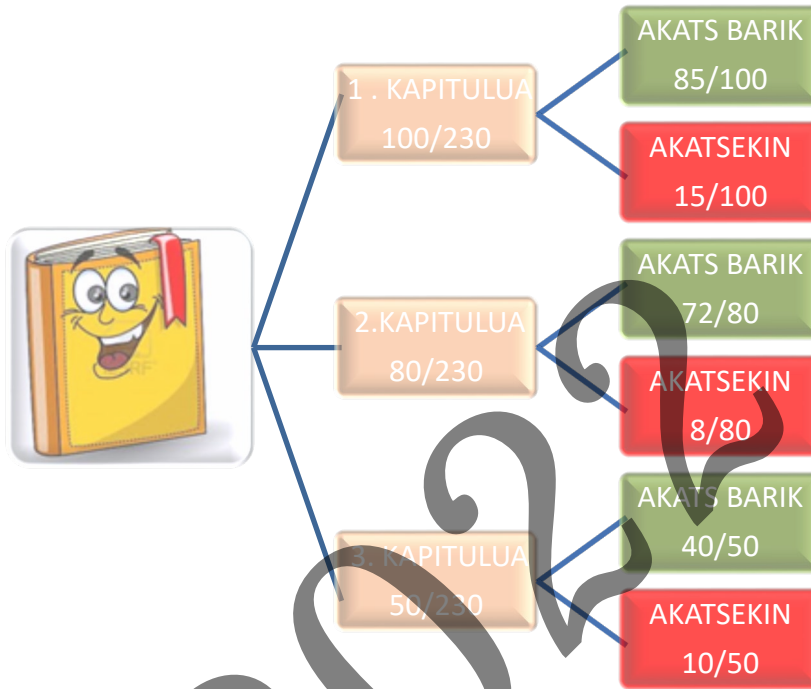
d) Kalkula ezazu.

$$\int \left(e^{3x} - 3x^2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right) dx = \frac{1}{3} e^{3x} - 3 \frac{x^3}{3} + 2 \int \frac{1}{x+2} dx - 4 \int (x+2)^{-2} dx =$$
$$= \frac{1}{3} e^{3x} - x^3 + 2 \ln(x+2) + 4 \frac{1}{(x+2)} + K$$



BLOKE: PROBABILITATEA

A.3 Probabilitate baten kalkulua, zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate totalaren bidez. Bayes-en teorema.



a) Aukeratutako orrialdea bigarren kapitulukoa (K_2) izateko probabilitatea

$$P(K_2) = \frac{80}{230} \Rightarrow P(K_2) = 0,3478 \Rightarrow \% 34,78$$

b) Aukeratutako orrialdeak akatsak izateko (A) eta hirugarren kapitulukoa (K_3) izateko probabilitatea.

$$P(A \cap K_3) = P(K_3) \cdot P(A | K_3) = \frac{50}{230} \cdot \frac{10}{50} = \frac{10}{230} = 0,043 \Rightarrow$$

$$P(A \cap K_3) = 0,043 \Rightarrow \% 4,3$$

c) Aukeratutako orrialdeak akatsik ez izateko probabilitatea (A^c).

$$P(A^c) = P(A^c \cap K_1) + P(A^c \cap K_2) + P(A^c \cap K_3) =$$

$$= P(K_1) \cdot P(A^c | K_1) + P(K_2) \cdot P(A^c | K_2) + P(K_3) \cdot P(A^c | K_3)$$

$$= \frac{100}{230} \cdot \frac{85}{100} + \frac{80}{230} \cdot \frac{72}{80} + \frac{50}{230} \cdot \frac{40}{50} = 0,8565 \Rightarrow \% 85,65$$



BESTE MODU BAT

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A) = P(A \cap K 1) + P(A \cap K 2) + P(A \cap K 3) =$
 $= P(K 1) \cdot P(A | K 1) + P(K 2) \cdot P(A | K 2) + P(K 3) \cdot P(A | K 3)$
 $= \frac{100}{230} \cdot \frac{15}{100} + \frac{80}{230} \cdot \frac{8}{80} + \frac{50}{230} \cdot \frac{10}{50} = 0,1435 \Rightarrow$
- $P(A) = 0,1435 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0,1435 = 0,8565$

d) Orrialde akastuna hirugarren kapitulukoa izateko probabilitatea.

Bayes teorema erabiliko dugu:

$$P(K 3 | A) = \frac{P(A | K 3) \cdot P(K 3)}{P(A)} = \frac{\frac{10}{50} \cdot \frac{50}{230}}{\frac{33}{230}} = \frac{10}{33} = 0,303 \Rightarrow$$

$$P(K 3 | A) = 0,303 \Rightarrow \% 30,3$$



B.3. Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa.

a) Badakigu $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,3$; $P(A \cup B) = 0,5$.

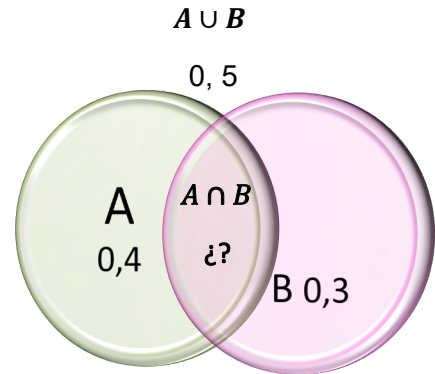
Orduan:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow$$

$$P(A \cap B) = 0,4 + 0,3 - 0,5 = 0,2 \Rightarrow$$

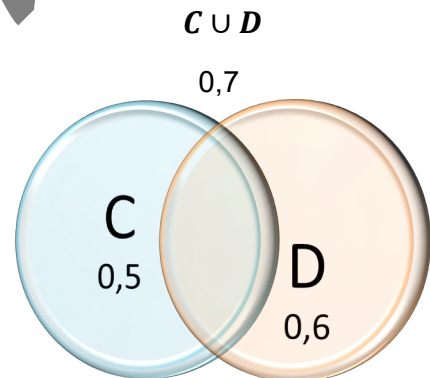
$$P(A \cap B) = \mathbf{0,2}$$



b) Badakigu $P(C) = 0,5$; $P(D) = 0,6$; $P(C \cup D) = 0,7$.

$$P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{[P(C) + P(D) - P(C \cup D)]}{P(D)} =$$

$$= \frac{0,5 + 0,6 - 0,7}{0,6} = \mathbf{0,666}$$



c) Badakigu $P(A) = 0,4$; $P(E) = 0,6$ eta E eta A gertaerak askeak direla

- Askeak izateagatik: $P(E \cap A) = P(E) \cdot P(A)$
- gertaera bietako baten bat gertatzeko probabilitatea da E edo A gertatzeko probabilitatea, hau da, $E \cup A$ gertatzeko probabilitatea.

Beraz:

$$P(E \cup A) = P(E) + P(A) - P(E \cap A) = P(E) + P(A) - P(E) \cdot P(A) =$$

$$= 0,6 + 0,4 - 0,6 \cdot 0,4 = \mathbf{0,76}$$



BLOKE: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4. Banaketa normala ulermena, erabilpena eta probabilitateen kalkulua.

Azterketan lortutako emaitza $X \equiv \mathcal{N}(6,8, \sigma)$

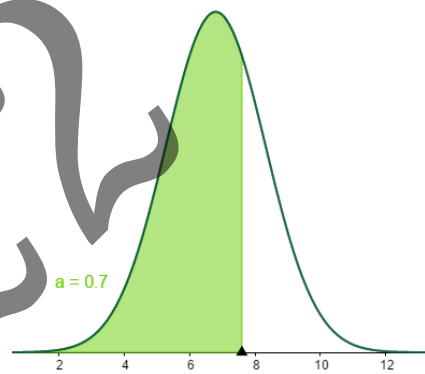
a) Desbideratze tipikoaren kalkulua.

$$P(X > 7,6) = 0,3 \Rightarrow P(X \leq 7,6) = 0,7$$

$$P(X \leq 7,6) = 0,7 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{7,6-\mu}{\sigma}\right) = 0,7 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{7,6-6,8}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,7$$

Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ bilatzen dugu:

$$P\left(Z \leq \frac{0,8}{\sigma}\right) = 0,7 \Rightarrow \frac{0,8}{\sigma} = 0,525 \Rightarrow \sigma = \frac{0,8}{0,525} = 1,5238$$



b) $\sigma = 1,5$ bada, ikasleen %20k soilik gainditzen duen k puntuazioaren balioa kalkulatu dugu.

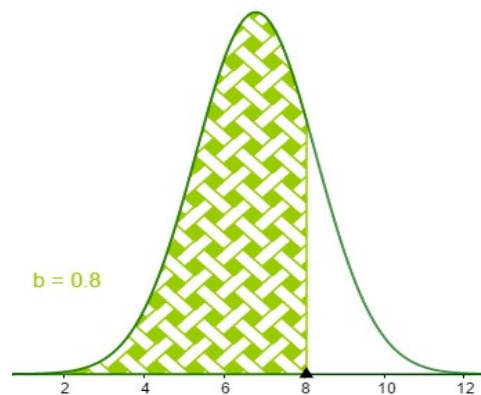
$$X \equiv \mathcal{N}(6,8, 1,5)$$

$$P(X \leq k) = 0,8 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0,8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{k-6,8}{1,5}\right) = 0,8$$

Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ bilatzen dugu:

$$\frac{k-6,8}{1,5} = 0,845 \Rightarrow$$

$$k = 6,8 + 0,845 \cdot 1,5 = 8,0675$$



Beraz, ikasleen %20k soilik lortzen du 8,1 puntu baino altuagoko emaitza.



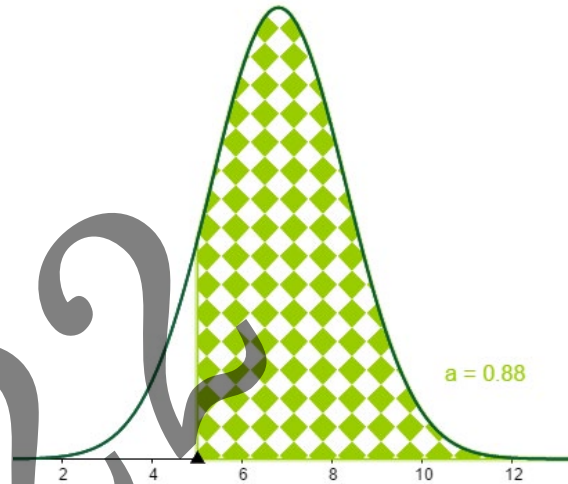
c) $\sigma = 1,5$ bada, azterketa gainditu duen ikasleen portzentajea:

$$X \equiv \mathcal{N}(6,8, 1,5)$$

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{k - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5 - 6,8}{1,5}\right) = P(Z \geq -1,2) = P(Z \leq 1,2)$$

Banaketaren taulan $Z \equiv \mathcal{N}(0, 1)$ bilatzen dugu:

$$P(Z \leq 1,2) = 0,8849 = 88,49\%$$



Beraz, ikasleen %88,5 inguruk gainditu du azterketa.



B. 4. Populazio baten proportziorako konfiantza-tartearen kalkulua eta errore maximo onargarria.

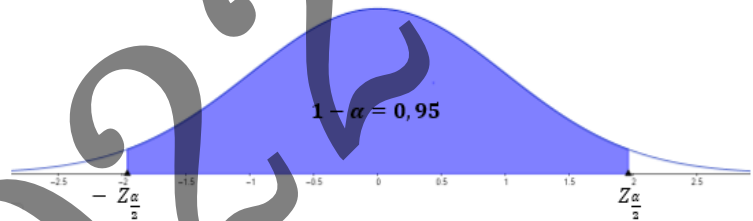
a) Zenbatetsi txertoa jaso duen populazioaren pertsonen portzentajea % 95eko konfiantza-mailaz.

- Laginaren tamaina handia baldin bada proportziorako lagin banaketa da:

$$\mathcal{N} \left(\mu = p, \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} \right)$$

- 1.000 lagunetako laginean, 860 lagun txertatuta egon dira, beraz laginean txertatutako pertsonen proportzioa $\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86$ da.
- Populazioan txertatutako proportziorako konfiantza-tartea % 95eko konfiantza-mailaz:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right)$$



- Kalkulatzeko dugu $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

Konfiantza-maila: $n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$P(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow 1 - P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,025 \Rightarrow P(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

- $\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,14$.

Orduan, $\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,86 \cdot 0,14}{1000}} = 0,01097$

- Beraz, proportziorako konfiantza-tartea % 95eko konfiantza-mailaz da:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} ; \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \right) = (0,86 - 1,96 \cdot 0,01097, 0,86 + 1,96 \cdot 0,01097) =$$

$$= (0,8385, 0,8815)$$

Hau da, txertoa jaso duen populazioaren pertsonen portzentajea dago % 83,85en eta % 88,15en artean, % 95eko konfiantza-mailaz.



- b) Aipatutako konfiantza-mailarako egindako errore maximo onargarria.

Errore maximo onargarria % 95eko konfiantza-mailaz proportziorako da konfiantza-tartearen zabalaren erdia, hau da,

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$$

Beraz,

$$e_m = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = 1,96 \cdot 0,01097 = \frac{0,8815 - 0,8385}{2} = 0,0215 \Rightarrow \text{hau da } \% 2,15$$

- c) Azaldu lortutako emaitzak

Esan daiteke % 95eko konfiantza-mailaz, orduan, % 2,15eko errore maximoarekin, txertoa jaso duten populazioaren portzentajea % 83,85 baino handiagoa eta % 88,15 baino txikiagoa dela.