

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



Matematika II

USE 2022

www.ehu.eus



Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde guztietan kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinanteen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.



LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako ekuazio linealetako sistema honen soluzioen existentzia α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha, \\ 2x + \alpha y + \alpha z = 1, \\ x + \alpha y + z = 1. \end{cases}$$

Ebatzi sistema $\alpha = -1$ eta $\alpha = 1$ balioetarako, ahal bada.

B1 Ariketa

Izan bedi honako matrize hau:

$$A = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m - 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zehaztu m parametroaren zer balioetarako A matrizeak ez duen alderantzizkorik.
- (b) Kalkulatu, ahal bada, A -ren alderantzizko matrizea $m = 0$ kasuan.

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez r honako ekuazio parametrikoko hauek dituen zuzena:

$$r \equiv \begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = 0; \end{cases}$$

eta $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ plano. Kalkulatu r zuzenaren P puntu baten koordenatuak, zeinetarako P puntutik π planora dagoen distantzia eta P puntutik koordenatu-jatorrira dagoen distantzia berdinak diren. Puntu hori bakarra al da? Arrazoitu erantzuna.



B2 Ariketa

Izan bitez $P = (1, 2, a)$ puntua, non $a \neq 0$ den, eta $\pi \equiv x + y + 2z = 3$ plano. Aurkitu P puntuaren π planoarekiko puntu simetrikoaren koordenatuak.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = (x-1)^2 e^{-2x}$ funtzioa. Aztertu f -ren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta kalkulatu haren maximoak eta minimoak.

B3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Aurkitu A , B eta C parametroen balioak f nulua izan dadin $x = 1$ abszisa duen puntuan eta f -ren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetan $y = 2x + 1$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezzen.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Kalkulatu $\int \frac{7x + 13}{(x + 1)(x^2 - x - 2)} dx$.

B4 Ariketa

Marratzu $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$ funtzioen grafikoek eta $y = e$ zuzen horizontalak mugatzen duten eremua, eta kalkulatu eremu horren azalera.



BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Bi ontzi ditugu, bola zuri eta beltz hauek dituztenak:

T: 4 bola beltz eta 6 zuri,

R: 7 bola beltz eta 3 zuri.

Ausaz ontzi bat aukeratzen da, hortik bola bat atera eta beste ontzian jartzen da. Ondoren, azken ontzi horretatik bola bat ateratzen da. Kalkulatu ateratako bi bolak:

- (a) beltzak izateko probabilitatea,
- (b) zuriak izateko probabilitatea,
- (c) kolore ezberdinekoak izateko probabilitatea.

B5 Ariketa

Seriean fabrikatutako pieza baten pisuak (gramotan) banaketa normalari jarraitzen dio, non batez bestekoa 52 den eta desbiderapen tipikoa 6,5.

- (a) Kalkulatu fabrikatutako pieza baten pisua 50 eta 68 gramoen artean egoteko probabilitatea.
- (b) Fabrikatutako piezen % 30ek pieza jakin batek baino pisu handiagoa badu, zenbateko pisua du azken horrek?



MATEMATIKA II - OHIKO DEIALDIA - 2022

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eske-mak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
7. Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzeko eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (1 puntu).
- $\alpha = 1$ kasua eztabaidatzea eta ebaztea (0,75 puntu).
- $\alpha = -1$ kasua ebaztea (0,75 puntu).

B1.

- (a) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).



A2.

- Problema planteatzea: puntutik koordenatu-jatorrirako distantziaren eta puntutik planorako distantziaren ekuazioak lortzea (1 puntu).
- Puntutik koordenatu-jatorrira dagoen distantzia eta puntutik planorakoa berdinak izan daitezen t parametroaren balioak kalkulatzeko (1 puntu).
- Ezarritako baldintza betetzen duten puntuen koordenatuak kalkulatzeko (0,5 puntu).

B2.

- P puntutik igaro eta planoarekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa zuzen kalkulatzeko (0,75 puntu).
- Planoaren eta zuzen perpendikularren ebaki-puntua lortzea (0,75 puntu).
- Puntu simetrikoaren koordenatuak kalkulatzeko (1 puntu).

A3.

- Funtzioaren deribatuaren kalkulua (0,5 puntu).
- Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak lortzea (1 puntu).
- Muturren kalkulua (1 puntu).

B3.

- A , B eta C parametroek bete behar dituzten baldintzak zuzen planteatzea (2 puntu).
- A , B eta C parametroak zuzen kalkulatzeko (0,5 puntu).

A4.

- Integrazioa frakzio sinpleetan deskonposatzea (1,5 puntu).
- Integralaren kalkulua (1 puntu).

B4.

- Eremua ondo marraztea, eta grafikoaren ebaki-puntuak kalkulatzeko. (1,25 puntu).
- Eremuaren azalera kalkulatzeko, Barrow-en erregela erabiliz (1,25 puntu).



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

A5.

- (a) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1 puntu).
- (c) atala zuzen ebaztea (0,5 puntu).

B5.

- (a) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).
- (b) atala zuzen ebaztea (1,25 puntu).

2022



ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefizienteen matrizearen determinantea $2\alpha - 2$ da. Orduan, $\alpha \neq 1$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da.

$\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da, eta baita ere matrize zabaldua-rena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA da. Sistemaren soluzioa $(0, y, 1 - y)$ da, $y \in \mathbb{R}$ edozein izanik.

$\alpha = -1$ denean, sistemaren soluzioa $x = 0, y = -1, z = 0$ da.

B1 EBAZPENA

A matrizearen determinantea $2(m - 1)(m - 2)$ da; beraz, $m = 1$ edo $m = 2$ bada, A matrizeak ez du alderantzizkorik.

$m = 0$ bada, $|A| = 4 \neq 0$ da; beraz, A -k alderantzizkoa du:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A2 EBAZPENA

Zuzenaren puntu generikoa $P = (t, 2t, 0)$ da. $O = (0, 0, 0)$ koordenatu-jatorriaren eta P puntuaren arteko distantzia OP bektorearen modulua da, $\text{dist}(O, P) = |t|\sqrt{5}$; eta P puntuaren eta planoaren arteko distantzia $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}}$.

$$|t|\sqrt{5} = \frac{|3t - 2|}{\sqrt{3}} \text{ ebazten duten } t\text{-ren balioak } t = \frac{2}{3 - \sqrt{15}} = \frac{-3 - \sqrt{5}}{3} \text{ eta } t = \frac{2}{3 + \sqrt{15}} = \frac{-3 + \sqrt{15}}{3} \text{ dira.}$$

Hauek dira ezarritako baldintza betetzen duten bi puntuen koordenatuak:

$$\left(\frac{-3 - \sqrt{15}}{3}, \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{3}, 0 \right) \quad \text{eta} \quad \left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}, \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{3}, 0 \right).$$



B2 EBAZPENA

P puntutik igaro eta π planoarekiko perpendikularra den r zuzenak honako ekuazio parametrikoko hauek ditu: $\{1 + t, 2 + t, a + 2t\}$.

Planoaren eta r zuzenaren ebaki-puntua $M = \left(\frac{3-a}{3}, \frac{6-a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ da. Azkenik, puntu simetrikoa $P' = \left(\frac{3-2a}{3}, \frac{6-2a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$ lortzen da.

A3 EBAZPENA

$f'(x) = 2(x-1)(2-x)e^{-2x}$ da; beraz, f beherakorra da $(-\infty, 1)$ eta $(2, +\infty)$ tartetan, eta gorakorra da $(1, 2)$ tartean. f -k maximoa du $x = 2$ puntuan eta minimoa $x = 1$ puntuan.

B3 EBAZPENA

f nulua izan dadin $x = 1$ puntuan $1 + A + B + C = 0$ bete behar da.

f -ren grafikoaren $x = -1$ eta $x = 3$ abszisa duten puntuetako zuzen ukitzailak $y = 2x + 1$ zuzenarekiko paraleloak izan daitezten,

$$\begin{cases} f'(-1) = 3 - 2A + B = 2, \\ f'(3) = 27 + 6A + B = 2 \end{cases}$$

bete behar da. Azken sistema hau ebatziz, $A = -3$ eta $B = -7$ dira. Balio horiek aurreko ekuazioan ordezkatzuz, $C = 9$ lortzen da.

A4 EBAZPENA

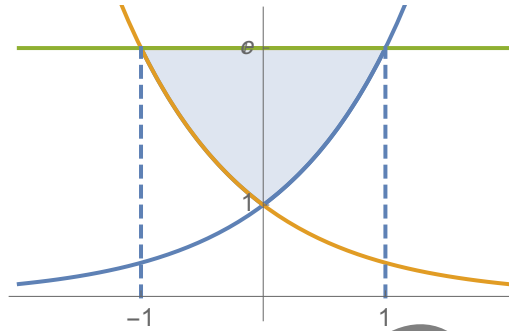
Lehenengo eta behin, integrakizuna frakzio sinpleetan deskonposatu behar da:

$$\frac{7x + 13}{(x+1)(x^2 - x - 2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Eragiketak eginez, $A = -3$, $B = -2$ eta $C = 3$ direla lortzen da. Orduan,

$$\int \frac{7x + 13}{(x+1)(x^2 - x - 2)} = -3 \ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + 3 \ln|x-2| + K.$$

B4 EBAZPENA



$y = e^x$ eta $y = e^{-x}$ kurbek $x = 1$ puntuan elkar ebakitzen dute; eta $y = e^{-x}$ eta $y = e^x$, $x = -1$ puntuan.

Eremuaren azalera honela kalkulatzen da:

$$A = \int_{-1}^0 (e - e^{-x}) dx + \int_0^1 (e - e^x) dx = 2 u^2.$$

A5 EBAZPENA

$$(a) P(\text{bi bola beltz}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{8}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{11} = \frac{67}{220}.$$

$$(b) P(\text{bi bola zuri}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{11} = \frac{45}{220}.$$

$$(c) P(\text{kolore ezberdinetako bi bola}) = 1 - P(\text{kolore berdinetako bi bola}) \\ = 1 - \left(\frac{67}{220} + \frac{45}{220} \right) = \frac{108}{220} = \frac{27}{55}.$$

B5 EBAZPENA

$$(a) P(50 < X < 68) = P(-0,31 < Z < 2,46) = 0,9931 - (1 - 0,6217) = 0,6148.$$

$$(b) P(X > \alpha) = 0,3 \implies 1 - P\left(Z < \frac{\alpha - 52}{6,5}\right) = 0,3 \implies \frac{\alpha - 52}{6,5} = 0,52 \\ \implies \alpha = 55,38.$$

Fabrikatutako piezen % 30 55,38 gramotik aurrera dago.