

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea



Gizarte Zientziei Aplikatutako Matematika II USE 2022

www.ehu.eus



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

- **Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta. Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.**
- **Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.**

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak transmititzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.**
- **En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.**

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: ALJEBRA

A.1. [gehienez 2,5 puntu]

$f(x, y) = 4x + 2y - 1$ funtzioaren maximoa eta minimoa lortu nahi dira honako murrizketa hauek definitutako esparruan:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) [1 puntu] Irudika ezazu aipatutako esparrua.
b) [1,5 puntu] Kalkulatu zein puntutan lortzen diren funtzioaren maximoa eta minimoa, baita puntu horietan funtzioak dituen balioak ere.

B.1. [gehienez 2,5 puntu]

Izan bitez honako matrize hauek: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ eta $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) [0,75 puntu] Aurkitu zer balio izan behar duen/dituen x aldagaiak berdintza hau bete dadin:

$$B^2 = A$$

- b) [1 puntu] Berdin, honako hau bete dadin:

$$B + C = A^{-1}$$

- c) [0,75 puntu] Zehaztu ezazu x -ren balioa $A + B + C = 3 \cdot I_2$ betetzeko, non $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ den.



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

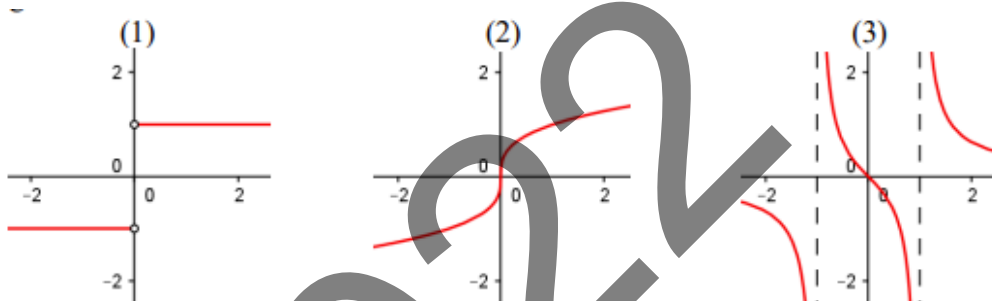
BLOKEA: ANALISIA

A.2. [gehienez 2,5 puntu]

a) [0,9 puntu] Elkartu itzazu, arrazoituta, funtzio hauek:

$$A) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} ; B) g(x) = \frac{|x|}{x} ; C) h(x) = \sqrt[3]{x}$$

adierazpen grafiko hauekin:



b) [1,6 puntu] Kasu bakoitzean, adierazpen grafikotik abiatuta, adieraz itzazu funtzioaren definizio-eremua eta ibilbidea.

B.2. [gehienez 2,5 puntos]

Patinete batek t denboraren arabera daraman $v(t)$ abiadura honako adierazpen honek zehazten du:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{baldin } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{baldin } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{baldin } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) [0,8 puntu] Zehaztu itzazu a eta b parametroen balioak $v(t)$ funtzioa $t = 1$ eta $t = 5$ uneetan jarraitua izan dadin.

b) [1 puntu] $a = 5$ eta $b = -20$ kasuan, zer unetan lortzen du patineteak abiadura maximoa? Zehaztu ezazu aipatutako abiadura maximo hori.

c) [0,7 puntu] $a = 5$ eta $b = -20$ kasuan, egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3. [gehienez 2,5 puntu]

40 lagunen artean New Yorkerako 4 bidaia zozketatuko dira 40 kartako karta sorta bat erabiliz. Pertsona bakoitzari karta bat emango zaio, eta errege bat jasotzen duen bakoitzak bidaia bat irabaziko du.

- [0,5 puntu]** Kalkula ezazu zer probabilitate duen karta jaso duen lehen pertsonak bidaia bat irabazteko.
- [1,25 puntu]** Kalkula ezazu zer probabilitate duen karta jaso duen bigarren pertsonak bidaia bat irabazteko.
- [0,75 puntu]** Kalkula ezazu zer probabilitate dagoen lehenengo bi pertsonetako batek ere bidaia bat ez irabazteko.

B.3. [gehienez 2,5 puntu]

Deiene eta Kattalin saskibaloi-jokalariak dira. Deienek 5 jaurtiketatik 2 sartzen ditu; 7 jaurtiketatik 3 Kattalinek.

Biek saskira behin bakarrik botatzen baldin badute, kalkula itzazu honako gertaera hauen probabilitatea:

- [0,75 puntu]** Biek saskiratu dute.
- [0,75 puntu]** Inork ez du saskiratu.
- [0,5 puntu]** Deienek baino ez du saskiratu.
- [0,5 puntu]** Gutxienez batek saskiratu du.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOKEA: INFERENTZIA ESTADÍSTIKOA

A.4. [gehienez 2,5 puntu]

Hilabete jakin bateko tenperaturak 10 graduko batezbestekoa eta 16 gradu²-ko bariantza dituen banaketa normal bati jarraitzen dio.

- [0,9 puntu] Lor ezazu % 80rako tarte bereizgarria.
- [0,3 puntu] Zer probabilitate dago egun bateko tenperatura 11° C baino altuagoa izateko?
- [0,6 puntu] Zer probabilitate dago egun bateko tenperatura 8° C eta 10° C bitartean egoteko?
- [0,3 puntu] Zein da 9° C baino gehiago izan duten egunen proportzioa?
- [0,4 puntu] 30 eguneko hilabetea kontuan hartzen baldin badugu, zenbat egunetan izan da tenperatura 12° C baino baxuagoa?

B.4. [gehienez 2,5 puntu]

Hiri bateko 16 urteko neskek batez beste zer pisu duten zenbatesteko, 100 tamainako zorizko lagin bat hartu da, eta hortik honako balio hauek lortu dira:

$$\bar{x} = 52,5 \text{ kg} \text{ eta } s = 5,3 \text{ kg}$$

Baieztapen hau egin dugu:

“Hiri horretako 16 urteko nesken batez besteko pisua 51 kg eta 54 kg artean dago”.

Zer konfiantza-mailaz egin daiteke baieztapen hori?



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 1$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) *[[1 punto]]* Representa el recinto mencionado.
- b) *[[1,5 puntos]]* Obtén los puntos en los que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de la función en dichos puntos.

B.1 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) *[[0,75 punto]]* Encuentra el valor o valores de x para que se cumpla la igualdad:

$$B^2 = A$$

- b) *[[1 puntos]]* Igualmente, para que se cumpla:

$$B + C = A^{-1}$$

- c) *[[0,75 puntos]]* Determina el valor de x para que $A + B + C = 3 \cdot I_2$, donde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II

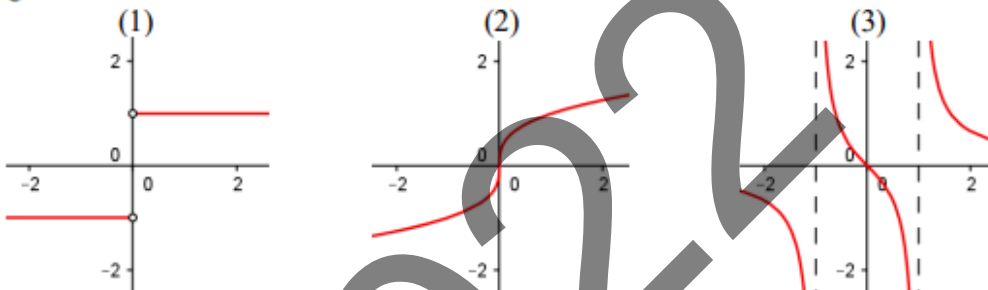
BLOQUE: ANÁLISIS

A.2 [hasta 2,5 puntos]

a) [0,9 puntos] Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} ; B) g(x) = \frac{|x|}{x} ; C) h(x) = \sqrt[3]{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:



b) [1,6 punto] En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio y recorrido de la función.

B.2 [hasta 2,5 puntos]

La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t , viene dada por la siguiente función:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) [0,8 puntos] Determina los valores de a y b para que la función $v(t)$ sea continua en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.

b) [1 punto] Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima? Concreta la velocidad máxima mencionada.

c) [0,7 puntos] En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

Se van a sortear 4 viajes a Nueva York entre 40 personas utilizando una baraja de 40 cartas. Se reparte una carta por persona y cada una que recibe un rey ganará un viaje.

- [0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.
- [1,25 puntos]** Calcula la probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.
- [0,75 puntos]** Calcula la probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Deiene y Kattalin son jugadoras de baloncesto. Deiene encesta 2 de cada 5 tiros; Kattalin 3 de cada 7.

Si ambas tiran a canasta una sola vez, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

- [0,75 puntos]** Ambas han enceestado.
- [0,75 puntos]** Ninguna ha enceestado.
- [0,5 puntos]** Sólo Deiene ha enceestado.
- [0,5 puntos]** Al menos una ha enceestado.



**GIZARTE ZIENTZIEI
APLIKATUTAKO
MATEMATIKA II**

**MATEMÁTICAS
APLICADAS A LAS
CIENCIAS SOCIALES II**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4 *[hasta 2,5 puntos]*

La temperatura en un determinado mes sigue una distribución normal de media 10 grados y de varianza 16 grados².

- [0,9 puntos]** Obtén el intervalo característico para el 80%.
- [0,3 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día sea superior a 11°?
- [0,6 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura de un día esté entre 8° y 10°?
- [0,3 puntos]** ¿Cuál es la proporción de días con más de 9°?
- [0,4 puntos]** Si consideramos un mes de 30 días, ¿en cuántos días la temperatura ha sido inferior a 12°?

B.4 *[hasta 2,5 puntos]*

Para estimar el peso medio de las chicas de 16 años de una ciudad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 52,5 \text{ kg} \text{ y } s = 5,3 \text{ kg}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:

“El peso medio de las chicas de 16 años de esta ciudad está entre 51 kg y 54 kg”.

¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?



GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketa zortzi ariketaz osatuta dago.
2. **Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar zaie, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.**
3. Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
4. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
5. Ariketa bakoitza 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko da.
6. Galdera batean erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez bada, galdera hori modu egokian ebazten duen edozein bide onartuko da.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuletan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuletan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.



BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten dutenean (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebazitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen denean.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.

2022



ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **1 puntu.** Bideragarritasun-eskualdea irudikatzea.
- Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu; beraz, **0,5 puntu.**
 - Eskatutako esparrua zehaztea, **0,5 puntu.**
- b. **1,5 puntu.** Maximoa eta minimoa zehaztea, eta haietan funtzioak zer balio dituen.
- Bideragarritasun-eskualdeko erpinak zehaztea.
 - A erpina, **0,125 puntu.**
 - B erpina, **0,25 puntu.**
 - C erpina, **0,25 puntu.**
 - D erpina, **0,125 puntu.**
 - Funtzioa erpinetan balioestea, **0,5 puntu.**
 - Helburu-funtzioaren balioa zehaztea, **0,25 puntu.**

B.1 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,75 puntu.**
- B^2 matrizea kalkulatzeko **0,5 puntu.**
 - x -ren balioa lortzea, **0,25 puntu.**
- b. **1 puntu.**
- A matrizearen alderantzizkoa kalkulatzeko:
 - A matrizearen determinante kalkulatzeko, **0,15 puntu.**
 - A matrizearen adjuntua, **0,5 puntu.**
 - A matrizearen alderantzizkoa, **0,15 puntu.**
 - x -ren balioa lortzea, **0,2 puntu.**
- c. **0,75 puntu.**
- $3 \cdot I_2$ matrizearen kalkulua egitea, **0,5 puntu.**
 - x -ren balioa lortzea, **0,25 puntu.**



BLOKEA: ANALISIA

A.2 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,9 puntu.

- (A) grafikoa bere funtzioarekin elkartzea modu arrazoituan, **0,3 puntu.**
- (B) grafikoa bere funtzioarekin elkartzea modu arrazoituan, **0,3 puntu.**
- (C) grafikoa bere funtzioarekin elkartzea modu arrazoituan, **0,3 puntu.**

b. 1,6 puntu.

- (1) grafikoa
 - Definizio-eremua, **0,3 puntu.**
 - Ibilbidea, **0,3 puntu.**
- (2) grafikoa
 - Definizio-eremua, **0,2 puntu.**
 - Ibilbidea, **0,2 puntu.**
- (3) grafikoa
 - Definizio-eremua, **0,3 puntu.**
 - Ibilbidea, **0,3 puntu.**

B.2 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,8 puntu.

- Jarraitutasuna $t = 1$ puntuan.
 - Funtzio baten jarraitutasuna $t = 1$ puntuan definitzea, **0,1 puntu.**
 - Alboko limiteak, **0,3 puntu.**
- Jarraitutasuna $t = 5$ puntuan.
 - Funtzio baten jarraitutasuna $t = 5$ puntuan definitzea, **0,1 puntu.**
 - Alboko limiteak, **0,3 puntu.**

b. 1 puntu.

- $v'(t)$ -ren kalkulua, **0,25 puntu.**
- $v''(t)$ -ren kalkulua, **0,25 puntu.**
- $v(t)$ funtzioaren maximoa zer puntutan lortzen den adieraztea, **0,25 puntu.**
- Abiadura maximoa zehaztea, **0,25 puntu.**



Oharra: Abiadura maximoa zehaztuz gero, baina maximo absolutua dela egiaztatu barik, atalaren puntuazio osoa hau izango da: **0,75 puntu.**

c. 0,7 puntu.

- $v(t) = 7t^2$ funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,2 puntu.**
- $v(t) = 7t + 5$ funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,2 puntu.**
- $v(t) = -t^2 + 12t - 20$ funtzioaren adierazpen grafikoa, **0,3 puntu.**

2022



BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. 0,5 puntu.
- Eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,5 puntu.**
- b. 1,25 puntu.
- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,25 puntu.**
 - Probabilitate osoaren formula adieraztea, **0,5 puntu.**
 - Eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,5 puntu.**
- c. 0,75 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,25 puntu.**
 - Eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,5 puntu.**

B.3 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- a. 0,75 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
 - Gertaera askeak direla adieraztea, **0,2 puntu.**
 - $P(D \cap K)$ eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,45 puntu.**
- b. 0,75 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
 - Gertaera askeak direla adieraztea, **0,2 puntu.**
 - $P(D^c \cap K^c)$ eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,45 puntu.**
- c. 0,5 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,2 puntu.**
 - $P(D \cap K^c)$ eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,3 puntu.**
- d. 0,5 puntu.
- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
 - $P(D \cup K)$ formula adieraztea, **0,1 puntu.**
 - Eskatutako probabilitatea kalkulatzea, **0,3 puntu.**



BLOKEA: INFERENTZIA ESTADISTIKOA

A.4 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,9 puntu.

- Tarte bereizgarria nola adierazten den zehaztea, **0,25 puntu.**
- Aldagaiaren tipifikazioa, **0,25 puntu.**
- Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,15 puntu.**
- Tarte bereizgarria zehaztea, **0,25 puntu.**

b. 0,3 puntu.

- $P(X \geq 11)$ probabilitatea zehaztea, **0,3 puntu.**

c. 0,6 puntu.

- $P(X \leq 10)$ probabilitatea zehaztea, **0,25 puntu.**
- $P(X \leq 8)$ probabilitatea zehaztea, **0,25 puntu.**
- Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko, **0,1 puntu.**

d. 0,3 puntu.

- $P(X \geq 9)$ probabilitatea kalkulatzeko, **0,2 puntu.**
- Eskatutako proportzioa adieraztea, **0,1 puntu.**

e. 0,4 puntu.

- Eskatutako probabilitatea kalkulatzeko, **0,3 puntu.**
- Zenbat egunetan adieraztea, **0,1 puntu.**

B.4 ariketa (gehienez 2,5 puntu)

- ✚ Konfiantza-maila zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- ✚ Errore maximo onargarriaren formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- ✚ Errore maximo onargarria zehaztea, **0,3 puntu.**
- ✚ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ lortzea, **0,75 puntu.**
- ✚ $\frac{\alpha}{2}$ lortzea, **0,75 puntu.**
- ✚ Konfiantza-maila zehaztea, **0,3 puntu.**



EBAZPENAK

BLOKEA: ALJEBRA

A.1 Bi aldagaiko programazio linealeko problema bat ebaztea.

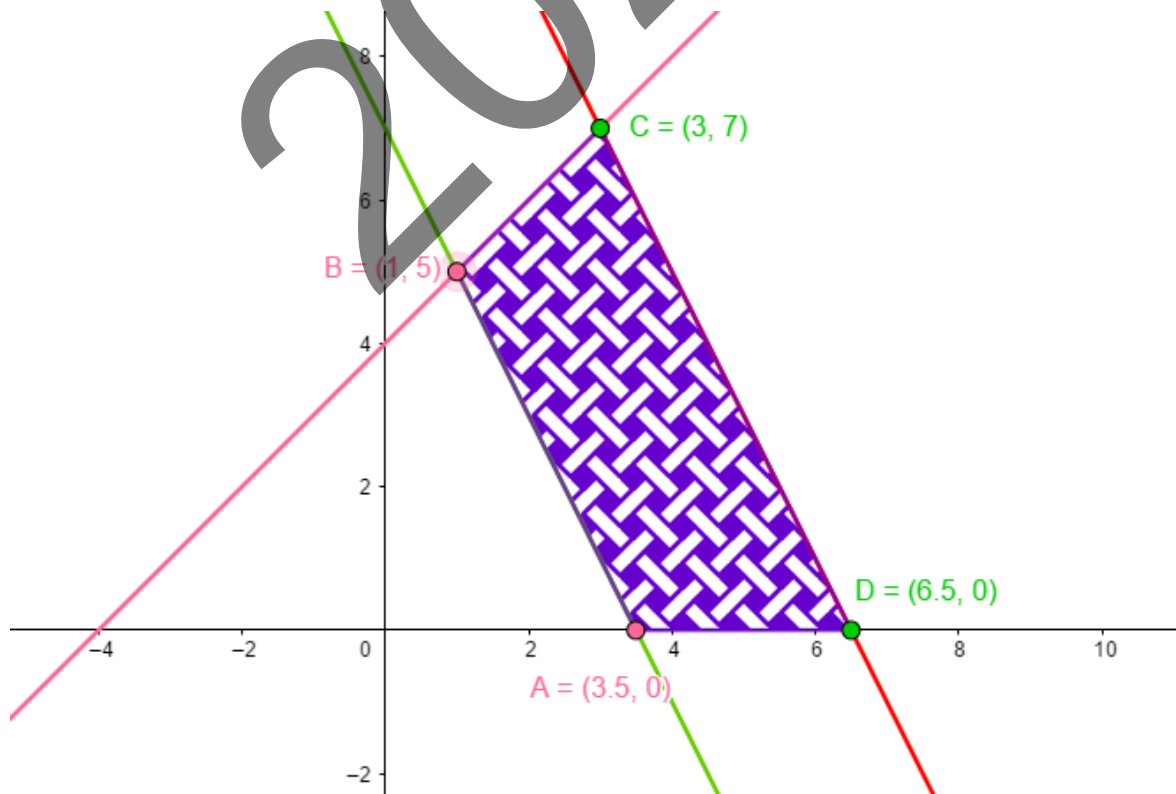
a) Soluzio bideragarrien esparrua irudikatzea XY planoan.

✚ Helburu-funtzioa hau da:

$$f(x, y) = 4x + 2y - 1$$

✚ Murrizketak hauek dira:
$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

✚ Beraz, XY planoan, hau da soluzio bideragarrien esparrua:





b) Helburu-funtzioaren maximoa eta minimoa, bai eta funtzioak puntu horietan dituen balioak ere.

✚ Erpinak hauek dira:

○ $A = ?$

$$A = \begin{cases} y + 2x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \Rightarrow A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

○ $B = ?$

$$B = \begin{cases} y - x = 4 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow 4 + 3x = 7 \Rightarrow x = 1, \quad y = 5 \Rightarrow B(1, 5)$$

○ $C = ?$

$$C = \begin{cases} y - x = 4 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow 4 + 3x = 13 \Rightarrow x = 3, \quad y = 7 \Rightarrow C(3, 7)$$

○ $D = ?$

$$D = \begin{cases} -2x - y + 13 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \Rightarrow D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$$

Beraz, erpinak hauek dira:

$$A\left(\frac{7}{2}, 0\right), \quad B(1, 5), \quad C(3, 7), \quad D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$$

✚ Erpin horietan helburu-funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatu ditugu:

$$f(A) = f\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 13$$

$$f(B) = f(1, 5) = 13$$

$$f(C) = f(3, 7) = 25$$

$$f(D) = f\left(\frac{13}{2}, 0\right) = 25$$

✚ Ikusten dugu helburu-funtzioak balio maximoa C eta D puntuetan hartzen duela; beraz, helburu-funtzioak **CD zuzenkiko puntu guztietan balio maximoa** hartzen du, eta aipatutako puntuetan helburu funtzioaren balioa **25 da**.

✚ Era berean, helburu-funtzioak balio minimoa A eta B puntuetan hartzen du; beraz, helburu-funtzioak **balio minimoa AB zuzenkiko puntu guztietan** hartzen du, eta aipatutako puntuetan helburu funtzioaren balioa **13 da**.



B.1 Kalkulu matriziala: Matrizeen propietateak. Ekuazio matrizial bat ebaztea.

a) Aurkitu ezazu edo itzazu x -ren balioa edo balioak $B^2 = A$ betetzeko.

$$B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x^2=2 \\ x=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

b) Aurkitu ezazu edo itzazu x -ren balioa edo balioak $B + C = A^{-1}$ betetzeko.

$$\star |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\star A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\star \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=0$$

c) Zehaztu ezazu x -ren balioa $A + B + C = 3 \cdot I_2$ betetzeko.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0$$



BLOKEA: ANALISIA

A.2 Funtzioak adierazpen grafikoekin lotzea. Funtzio baten definizio-eremua eta ibilbidea identifikatzea.

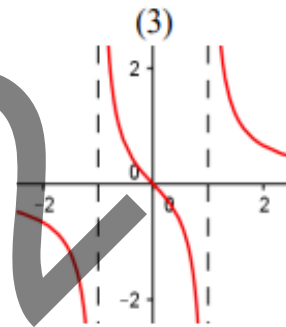
a) Elkartu, arrazoituz, A), B) eta C) funtzioak (1), (2) eta (3) grafikoekin.

✚ A) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ funtzioa ez dago definituta $x = 1$ eta $x = -1$ puntuetan;

$f(x)$ funtzioak puntu horietako bakoitzean asintota bertikal bat du.

Ezaugarri horiek dituen funtzio bakarra (3) da.

Beraz, **A) = (3)**.

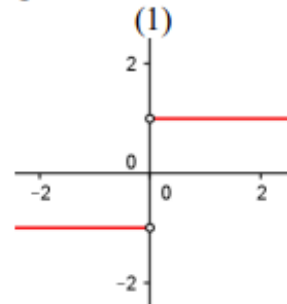


✚ B) $g(x) = \frac{|x|}{x}$ funtzioa ez dago definituta $x = 0$ puntuan, eta konstantea

eta berdin 1 da baldin $x > 0$ bada; eta konstantea eta berdin -1 da $x < 0$ bada.

Ezaugarri horiek dituen funtzio bakarra (1) da.

Beraz, **B) = (1)**.

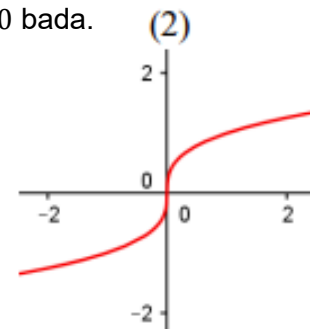


✚ C) $h(x) = \sqrt[3]{x}$ funtzioa $x = 0$ puntutik pasatzen da, eta balio positiboak

hartzeko $x > 0$ bada; eta balio negatiboak $x < 0$ bada.

Ezaugarri horiek dituen funtzio bakarra (2) da.

Beraz, **C) = (2)**

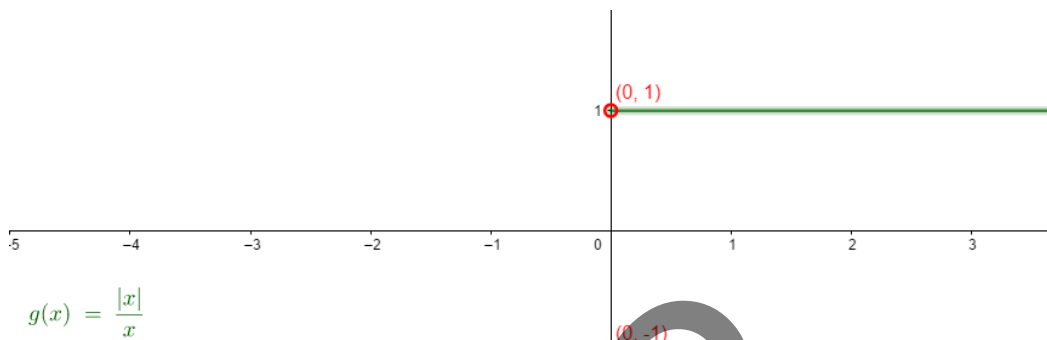




b) Kasu bakoitzean, adieraz itzazu funtzioaren definizio-eremua eta ibilbidea.

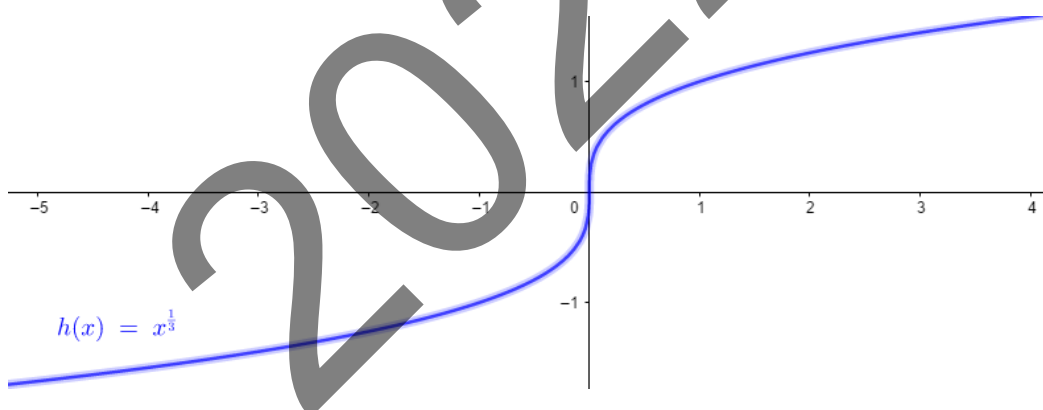
Adierazpen grafikoa (1)

Definizio – eremua $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$, Ibilbidea $f(x) = \{-1, 1\}$



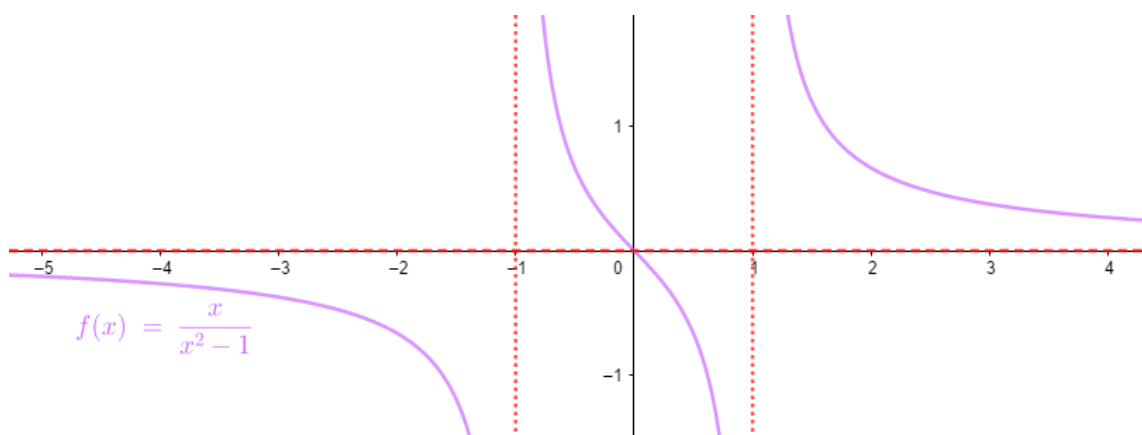
Adierazpen grafikoa (2)

Definizio – eremua $f(x) = \mathbb{R}$, Ibilbidea $f(x) = \mathbb{R}$



Adierazpen grafikoa (3)

Definizio – eremua $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, Ibilbidea $f(x) = \mathbb{R}$





B.2 Funtzio bat aztertzea. Funtzioaren maximoen, minimoen, inflexio-puntuen kalkulua eta adierazpen grafikoa.

Patinete batek t denboraren arabera daraman $v(t)$ abiadura hau da:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{baldin } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{baldin } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{baldin } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) Zehaztu a eta b $v(t)$ funtzioa $t = 1$ eta $t = 5$ uneetan jarraitua izan dadin.

- $t = 1$ unean.

$$v(t) \text{ jarraitua } t = 1 \text{ puntuan} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = v(1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 7t^2 = 7$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 2t + a = 2 + a$$

$$v(1) = 2 + a$$

$$\text{Beraz, } 2 + a = 7 \Rightarrow a = 5$$

- $t = 5$ unean.

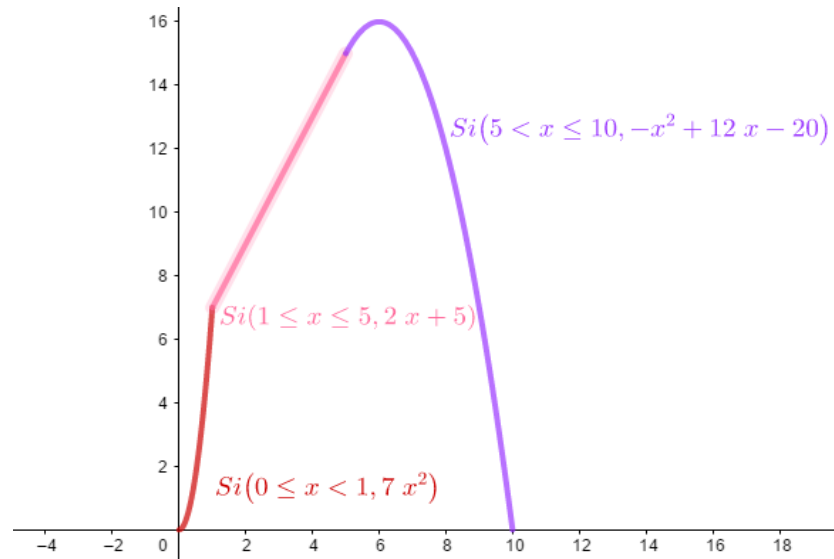
$$v(t) \text{ jarraitua } t = 5 \text{ puntuan} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = v(5)$$

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 2t + a = \lim_{t \rightarrow 5^-} 2t + 5 = 15$$

$$\lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} -t^2 + 12t + b = -25 + 60 + b = 35 + b$$

$$v(5) = 15$$

$$\text{Beraz, } 15 = 35 + b \Rightarrow b = -20$$





b) $a = 5$ eta $b = -20$ kasuan, zer unetan lortzen du patineteak abiadura maximoa?

$$v'(t) = \begin{cases} 14t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t \leq 5 \\ -2t + 12 & 5 < t < 10 \end{cases}$$

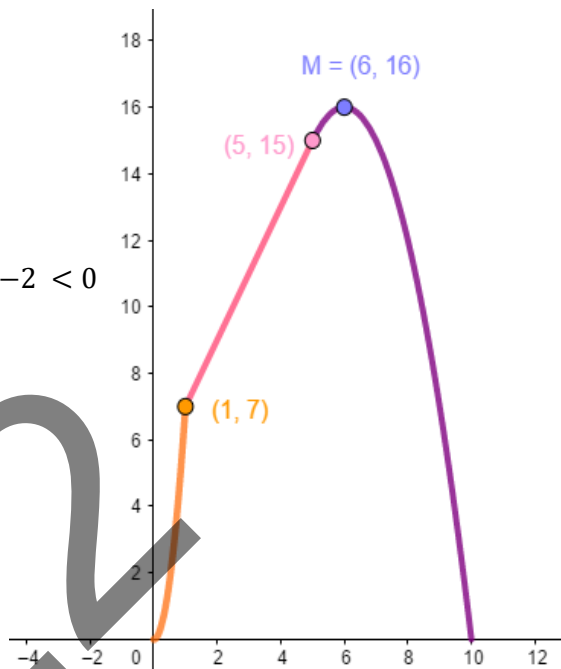
Beraz, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$

$$v''(t) = \begin{cases} 14 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 5 \\ -2 & 5 < t < 10 \end{cases} \Rightarrow v''(6) = -2 < 0$$

Beraz, $t = 6$ maximo erlatiboa dugu.

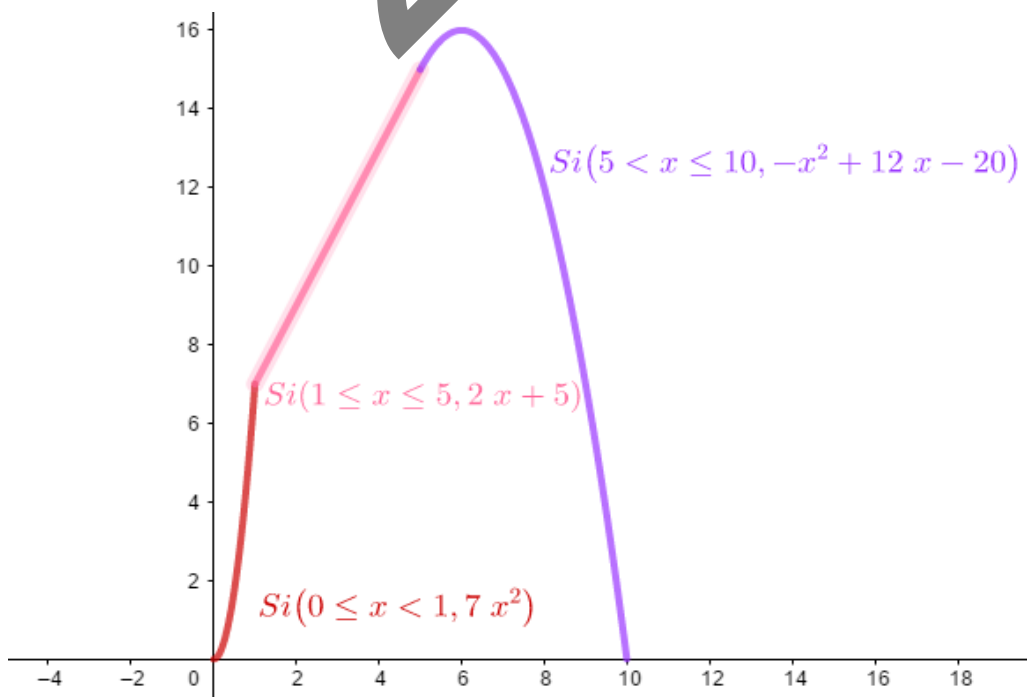
• Maximo absolutua egiaztatzeko:

- $v(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = 16$
- $v(0) = 0$
- $v(10) = 0$



Beraz, **abiadura maximoa $t = 6$ unean lortzen da, eta bere balioa 16 da.**

c) $a = 5$ eta $b = -20$ kasuan, egin ezazu funtzioaren adierazpen grafikoa.





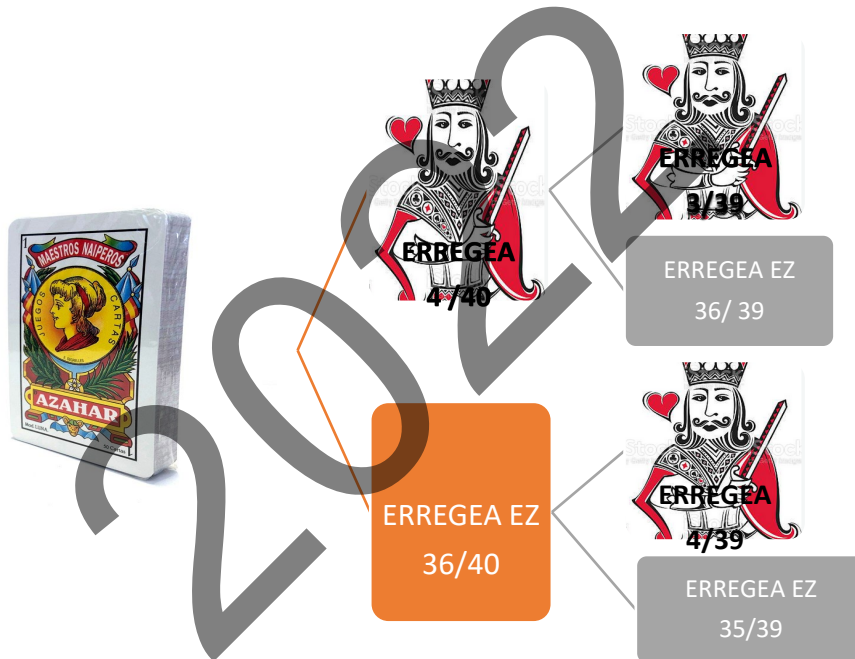
BLOKEA: PROBABILITATEA

A.3 Probabilitate baten kalkulua, zuhaitz-diagramaren bidez edo probabilitate osoaren bidez.

a) Karta jaso duen lehen pertsonak bidaia bat irabazteko probabilitatea.

$$P(1. pertsonak bidaia bat irabazten du) = P(E_1) = \frac{4}{40} = 0,1 \Rightarrow \% 10$$

b) Karta jaso duen bigarren pertsonak bidaia bat irabazteko probabilitatea.



$$\begin{aligned} P(2. pertsonak bidaia bat irabazten du) &= P(E_2) = \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) + P(E_1^c) \cdot P(E_2 | E_1^c) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} + \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{156}{1560} = 0,1 \\ &\Rightarrow \% 10 \end{aligned}$$

c) Lehenengo bi pertsonetako batek ere bidaia bat ez irabazteko probabilitatea.

$$\begin{aligned} P(\text{lehenengo bi pertsonetako batek ere ez du irabazten bidaia bat}) &= \\ &= P(E_1^c \cap E_2^c) = P(E_1^c) \cdot P(E_2^c | E_1^c) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{1260}{1560} = 0,8077 \Rightarrow \% 80,77 \end{aligned}$$



B.3 Probabilitateen kalkuluei buruzko ariketa.

$$P(\text{Deienek saskiratu}) = P(D) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(D^c) = \frac{3}{5}$$

$$P(\text{Kattalineek saskiratu}) = P(K) = \frac{3}{7} \Rightarrow P(K^c) = \frac{4}{7}$$

- a)** Biek saskiratzeko probabilitatea, hau da, $D \cap K$ gertaeraren probabilitatea.

D eta K gertaerak askeak dira; orduan:

$$P(D \cap K) = P(D) \cdot P(K)$$

$$P(D \cap K) = P(D) \cdot P(K) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35} = 0,1714 \Rightarrow \% \mathbf{17,14}$$

- b)** Inork ez-saskiratzeko probabilitatea, hau da, $D^c \cap K^c$ gertaeraren probabilitatea.

D eta K gertaerak askeak dira; orduan:

$$P(D^c \cap K^c) = P(D^c) \cdot P(K^c)$$

$$P(D^c \cap K^c) = P(D^c) \cdot P(K^c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35} = 0,3428 \Rightarrow \% \mathbf{34,28}$$

- c)** Deienek baino ez saskiratzeko probabilitatea.

$$P(D \cap K^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35} = 0,2286 \Rightarrow \% \mathbf{22,86}$$

- d)** Gutxienez batek saskiratzeko probabilitatea.

$$P(D \cup K) = P(D) + P(K) - P(D \cap K) = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{6}{35} = \frac{23}{35} = 0,6571$$

$$\Rightarrow \% \mathbf{65,71}$$



BLOKEA: INFERENTZIA ESTATISTIKOA

A.4 Banaketa normala ulertzea, erabilera eta probabilitateen kalkulua.

a) % 80rako tarte bereizgarria.

$$\text{bariantza} = 16 \Rightarrow \sigma = \sqrt{16} = 4$$

$$X \equiv \text{temperatura} = \mathcal{N}(10, 4)$$

%80rako tarte bereizgarria $(10 - e, 10 + e)$ da baldin $P(10 - e \leq X \leq 10 + e) = 0,8$

$$P(10 - e \leq X \leq 10 + e) = 0,8 \Rightarrow P(X \leq 10 + e) - P(X \leq 10 - e) = 0,8 \Rightarrow$$

TIPIFIKAZIOA:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{4} \Rightarrow X = 4Z + 10$$

$$P(X \leq 10 + e) = P(4Z + 10 \leq 10 + e) = P(4Z \leq e) = P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)$$

$$P(X \leq 10 - e) = P(4Z + 10 \leq 10 - e) = P(4Z \leq -e) = P\left(Z \leq \frac{-e}{4}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)$$

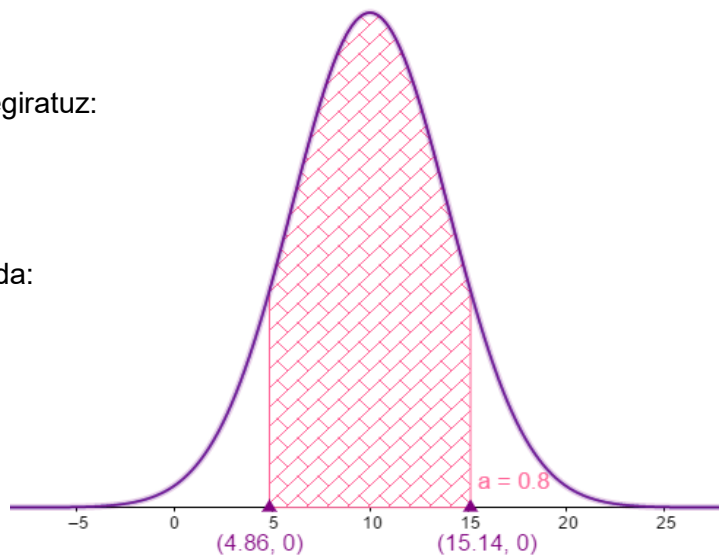
$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)\right] = 0,8 \Rightarrow -1 + 2P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) = 0,8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) = 0,9$$

Orduan, banaketa normalaren taulan begiratzuz:

$$\frac{e}{4} = 1,285 \Rightarrow e = 5,14$$

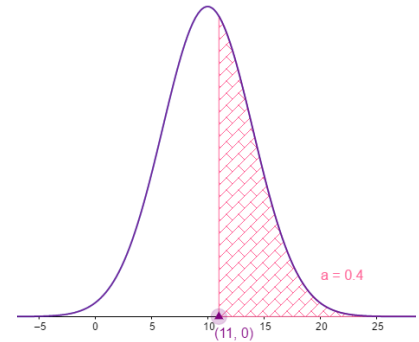
Beraz, % 80rako tarte bereizgarria hau da:

$$(10 - e, 10 + e) = (4,86, 15,14)$$



b) $P(X \geq 11)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 11) &= P(4Z + 10 \geq 11) = \\ &= P(Z \geq 0,25) = 1 - P(Z \leq 0,25) \\ &= 1 - 0,5987 = 0,4013 \Rightarrow \% \mathbf{40,13} \end{aligned}$$



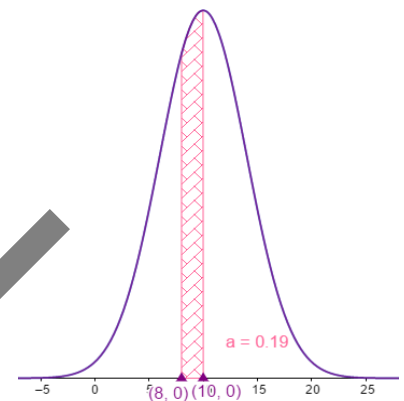
c) $P(8 \leq X \leq 10)$

$$P(8 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 8)$$

$$\begin{aligned} \color{blue}{\oplus} P(X \leq 10) &= P(4Z + 10 \leq 10) = \\ &= P(Z \leq 0) = 0,5 \end{aligned}$$

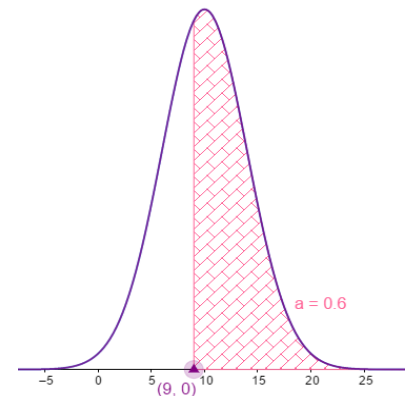
$$\begin{aligned} \color{blue}{\oplus} P(X \leq 8) &= P(4Z + 10 \leq 8) = \\ &= P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \end{aligned}$$

Beraz; $P(8 \leq X \leq 10) = 0,5 - 0,3085 = 0,1915 \Rightarrow \% \mathbf{19,15}$



d) 9° C baino gehiago izan duten egunen proportzioa.

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(4Z + 10 \geq 9) = \\ &= P(Z \geq -0,25) = P(Z \leq 0,25) = 0,5987 \\ &\Rightarrow \% \mathbf{59,87} \end{aligned}$$



e) Zenbat egunetan izan da temperatura 12° C baino baxuagoa?

$$P(X \leq 12) = P(4Z + 10 \leq 12) = P(Z \leq 0,5) = 0,6915 \Rightarrow \% \mathbf{69,15}$$

Orduan, 30en % 69,15 hau da: 20,74; egun kopuruak zenbaki arrunta izan behar duenez, orduan esan dezakegu **20 egunetan** temperatura 12° C baino baxuagoa izan dela.

B. 4 Laginen batezbestekoen banaketari buruzko ariketa. Laginaren batezbestekoaren balioa eta errore maximo onargarria.

- Batezbestekorako konfiantza-tartearen bidez egindako zenbatespenean, errore maximo onargarriaren formula ezagutzen dugu. Hau da:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- e_m tartearen zabaleraren erdia da.

Beraz:
$$e_m = \frac{54-51}{2} = 1,5$$

- Desbideratze tipikoaren, σ -ren, balioa $s = 5,3$ baliotik zenbatesten da.

- Badakigu laginaren tamaina $n = 100$ dela.

Hortik, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatu dugu:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1,5 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{5,3}{\sqrt{100}} \Rightarrow 15 = 5,3 \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,83$$

- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ -tik abiatuta, $1 - \alpha$ konfiantza maila lortuko dugu:

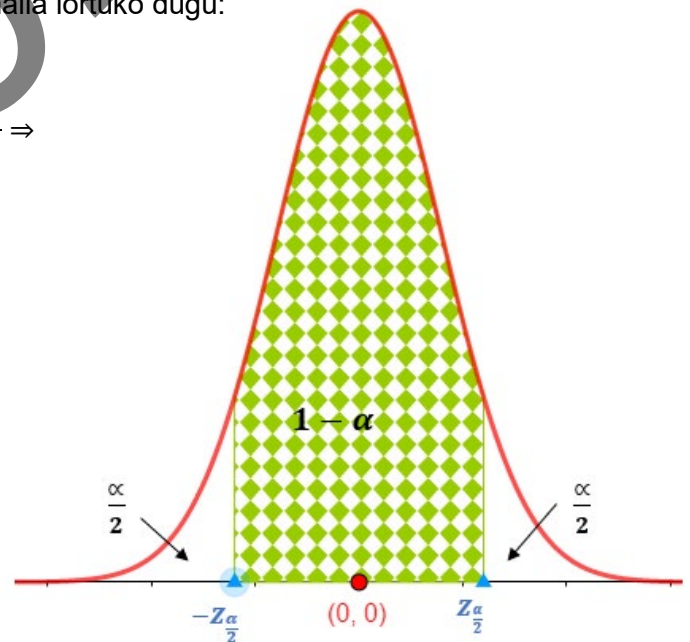
$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq 2,83) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0,9987 = 0,0023 = \frac{\alpha}{2}$$

Beraz:

$$\frac{\alpha}{2} = 0,0023 \Rightarrow \alpha = 0,0046 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9954$$



Beraz, **% 99,54ko konfiantza-mailaz esan dezakegu** hiri horretako 16 urteko nesken batez besteko pisua 51 kg eta 54 kg artean dagoela.



MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios distribuidos en cuatro bloques.
2. *De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.*
3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.
6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECE VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, ..., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.



ASPECTOS QUE MERECE VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

2022



CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1 (hasta 2,5 puntos)

- a. **1 punto.** Representar la región factible.
- Representación de cada restricción 0,1 punto, por lo tanto, **0,5 puntos.**
 - Determinar el recinto pedido, **0,5 puntos.**
- b. **1,5 puntos.** Determinar los máximos y los mínimos, y en ellos los valores de la función.
- Determinar los vértices de la región factible.
 - El vértice A, **0,125 puntos.**
 - El vértice B, **0,25 puntos.**
 - El vértice C, **0,25 puntos.**
 - El vértice D, **0,125 puntos.**
 - Valorar la función en los vértices, **0,5 puntos.**
 - Determinar el valor de la función objetivo, **0,25 puntos.**

Problema B.1 (hasta 2,5 puntos)

- a. **0,75 puntos.**
- Cálculo de la matriz B^2 , **0,5 puntos.**
 - Conseguir el valor de x , **0,25 puntos.**
- b. **1 punto.**
- Cálculo de la matriz inversa de la matriz A :
 - Cálculo del determinante de la matriz A , **0,15 puntos.**
 - Adjunto de la matriz A , **0,5 puntos.**
 - Inversa de la matriz A , **0,15 puntos.**
 - Conseguir el valor de x , **0,2 puntos.**
- c. **0,75 puntos.**
- Hacer el cálculo de la matriz $3 \cdot I_2$, **0,5 puntos.**
 - Conseguir el valor de x , **0,25 puntos.**



BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2 (hasta 2,5 puntos)

a. 0,9 puntos.

- Unir la gráfica (A) con su función de modo razonado, **0,3 puntos.**
- Unir la gráfica (B) con su función de modo razonado, **0,3 puntos.**
- Unir la gráfica (C) con su función de modo razonado, **0,3 puntos.**

b. 1,6 puntos.

- Gráfica (1)
 - Dominio de definición, **0,3 puntos.**
 - Recorrido, **0,3 puntos.**
- Gráfica (2)
 - Dominio de definición, **0,2 puntos.**
 - Recorrido, **0,2 puntos.**
- Gráfica (3)
 - Dominio de definición, **0,3 puntos.**
 - Recorrido, **0,3 puntos.**

Problema B.2 (hasta 2,5 puntos)

a. 0,8 puntos.

- Continuidad en el punto $t = 1$.
 - Definir la continuidad de una función en el punto $t = 1$, **0,1 puntos.**
 - Límites laterales, **0,3 puntos.**
- Continuidad en el punto $t = 5$.
 - Definir la continuidad de una función en el punto $t = 5$, **0,1 puntos.**
 - Límites laterales, **0,3 puntos.**

b. 1 punto.

- Cálculo de $v'(t)$, **0,25 puntos.**
- Cálculo de $v''(t)$, **0,25 puntos.**
- Indicar en qué punto se alcanza el máximo de la función $v(t)$, **0,25 puntos.**
- Determinar la velocidad máxima, **0,25 puntos.**



Nota: En el caso de que se determine la velocidad máxima sin comprobar que es máximo absoluto la puntuación total del apartado será, **0,75 puntos**.

c. 0,7 puntu.

- Representación gráfica de la función $v(t) = 7t^2$, **0,2 puntos**.
- Representación gráfica de la función $v(t) = 7t + 5$, **0,2 puntos**.
- Representación gráfica de la función $v(t) = -t^2 + 12t - 20$, **0,3 puntos**.

2022



BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3 (hasta 2,5 puntos)

- a. **0,5 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**
- b. **1,25 puntos.**
- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,25 puntos.**
 - Indicar la fórmula de la probabilidad total, **0,5 puntos.**
 - El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**
- c. **0,75 puntos.**
- Indicar qué hay que calcular, **0,25 puntos.**
 - El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

Problema B.3 (hasta 2,5 puntos)

- a. **0,75 puntos.**
- Indicar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
 - Expresar que son sucesos independientes, **0,2 puntos.**
 - Cálculo de la probabilidad pedida $P(D \cap K)$, **0,45 puntos.**
- b. **0,75 puntos.**
- Indicar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
 - Expresar que son sucesos independientes, **0,2 puntos.**
 - Cálculo de la probabilidad pedida $P(D^c \cap K^c)$, **0,45 puntos.**
- c. **0,5 puntos.**
- Indicar qué hay que calcular, **0,2 puntos.**
 - Cálculo de la probabilidad pedida $P(D \cap K^c)$, **0,3 puntos.**
- d. **0,5 puntos.**
- Indicar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
 - Determinar la fórmula $P(D \cup K)$, **0,1 puntos.**
 - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,3 puntos.**



BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4 (hasta 2,5 puntos)

- a. **0,9 puntos.**
- Expresar cómo se determina el intervalo característico, **0,25 puntos.**
 - Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
 - Determinar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,15 puntos.**
 - Concretar el intervalo característico, **0,25 puntos.**
- b. **0,3 puntos.**
- Determinar la probabilidad $P(X \geq 11)$, **0,3 puntos.**
- c. **0,6 puntos.**
- Determinar la probabilidad $P(X \leq 10)$, **0,25 puntos.**
 - Determinar la probabilidad $P(X \leq 8)$, **0,25 puntos.**
 - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,1 puntos.**
- d. **0,3 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad $P(X \geq 9)$, **0,2 puntos.**
 - Determinar la proporción pedida, **0,1 puntos.**
- e. **0,4 puntos**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,3 puntos.**
 - Determinar en cuántos días, **0,1 puntos.**

Problema B.4 (hasta 2,5 puntos)

- ✚ Concretar qué es el nivel de confianza, **0,2 puntos.**
- ✚ Indicar la fórmula del error máximo admisible, **0,2 puntos.**
- ✚ Concretar el error máximo admisible **0,3 puntos.**
- ✚ Conseguir $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,75 puntos.**
- ✚ Conseguir $\frac{\alpha}{2}$, **0,75 puntos.**
- ✚ Determinar el nivel de confianza, **0,3 puntos.**



SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1 Resolución de un problema de programación lineal con dos variables:

a) Representación de la región factible en el plano XY.

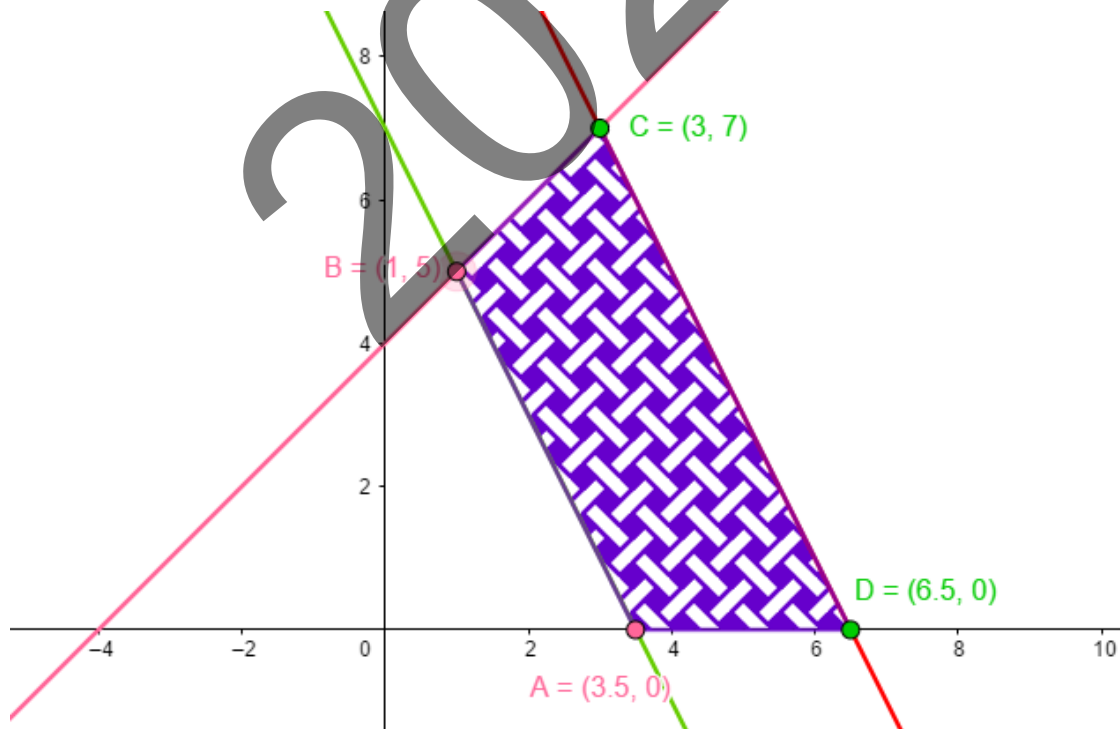
✚ La función objetivo es:

$$f(x, y) = 4x + 2y - 1$$

✚ Las restricciones son:

$$\begin{cases} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

✚ Por lo tanto, en el plano XY la región factible es:





b) Máximo y mínimo de la función objetivo, así como los valores de ésta en dichos puntos.

Los vértices son:

○ $A = ?$

$$A = \begin{cases} y + 2x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \Rightarrow A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

○ $B = ?$

$$B = \begin{cases} y - x = 4 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \Rightarrow 4 + 3x = 7 \Rightarrow x = 1, \quad y = 5 \Rightarrow B(1, 5)$$

○ $C = ?$

$$C = \begin{cases} y - x = 4 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow 4 + 3x = 13 \Rightarrow x = 3, \quad y = 7 \Rightarrow C(3, 7)$$

○ $D = ?$

$$D = \begin{cases} -2x - y + 13 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x = -13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} \Rightarrow D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$$A\left(\frac{7}{2}, 0\right), \quad B(1, 5), \quad C(3, 7), \quad D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$$

Calculamos el valor que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 13$$

$$f(B) = f(1, 5) = 13$$

$$f(C) = f(3, 7) = 25$$

$$f(D) = f\left(\frac{13}{2}, 0\right) = 25$$

Vemos que la función objetivo toma **el valor máximo en los puntos C y D, y por lo tanto, la función objetivo toma el valor máximo en todos los puntos del segmento CD**, en los que el valor de la función objetivo es **25**.

Del mismo modo, la función toma **el valor mínimo en los puntos A y B, y por lo tanto, en todos los puntos del segmento AB**, en los que el valor de la función objetivo es **13**.



B.1 Cálculo matricial. Propiedades de las matrices. Resolución de una ecuación matricial.

a) Encontrar el valor o los valores de x para que se cumpla $B^2 = A$.

$$B^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+x^2 = 2 \\ x = 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

b) Encontrar el valor o los valores de x , tal que se verifique $B + C = A^{-1}$.

$$\star |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\star A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj } A)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\star \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 0$$

c) Determina el valor de x para que se verifique $A + B + C = 3 \cdot I_2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 0$$



BLOQUE: ANÁLISIS

A.2 Asociar funciones con representaciones gráficas. Identificar el dominio y el recorrido de una función.

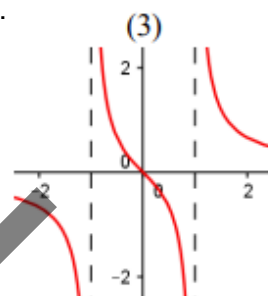
a) Asocia, razonadamente, las funciones A), B) y C) con las gráficas (1), (2) y (3).

✚ La función $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ no está definida en los puntos $x = 1$ y $x = -1$; la

función $f(x)$ tiene en cada uno de esos puntos una asíntota vertical.

La única función con esas características es la (3).

Por lo tanto, **A)=(3)**.

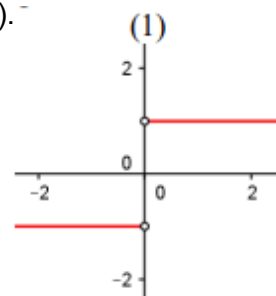


✚ La función $g(x) = \frac{|x|}{x}$ no está definida en el punto $x = 0$, y es constante

e igual a 1, si $x > 0$; y constante e igual a -1, si $x < 0$.

La única función con esas características es la (1).

Por lo tanto, **B)=(1)**.

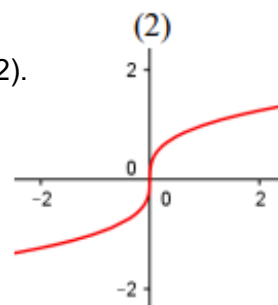


✚ La función $h(x) = \sqrt[3]{x}$ pasa por el punto $x = 0$, y toma valores positivos

si $x > 0$; y valores negativos si $x < 0$.

La única función con esas características es la (2).

Por consiguiente, **C)=(2)**.

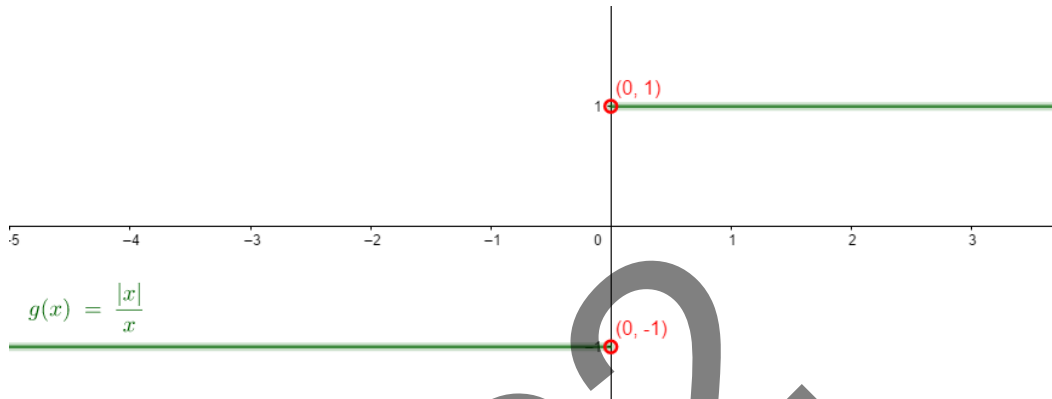




b) En cada caso, indicar el dominio y el recorrido de la función.

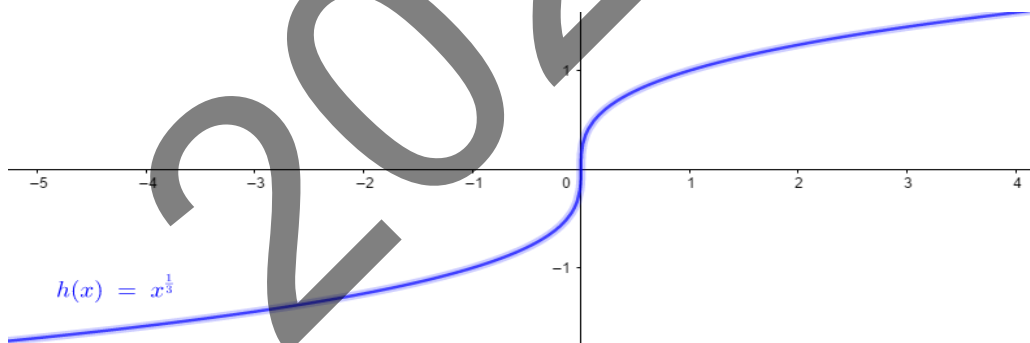
Representación gráfica (1)

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}, \text{ Recorrido } f(x) = \{-1, 1\}$$



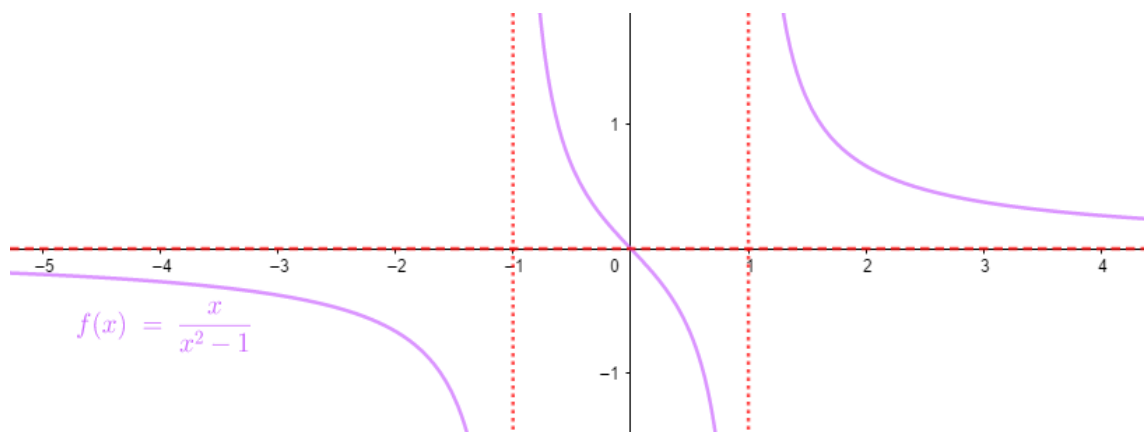
Representación gráfica (2)

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}, \text{ Recorrido } f(x) = \mathbb{R}$$



Representación gráfica (3)

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}, \text{ Recorrido } f(x) = \mathbb{R}$$





B.2 Problema de análisis de una función. Cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y representación gráfica.

La velocidad que lleva un patinete $v(t)$, en función del tiempo t , es:

$$v(t) = \begin{cases} 7t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2t + a & \text{si } 1 \leq t \leq 5 \\ -t^2 + 12t + b & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

a) Determina a y b para que la función $v(t)$ sea continua.

- En el momento $t = 1$.

$$v(t) \text{ continua en } t = 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = v(1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 7t^2 = 7$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 2t + a = 2 + a$$

$$v(1) = 2 + a$$

Por lo tanto, $2 + a = 7 \Rightarrow a = 5$

- En el momento $t = 5$.

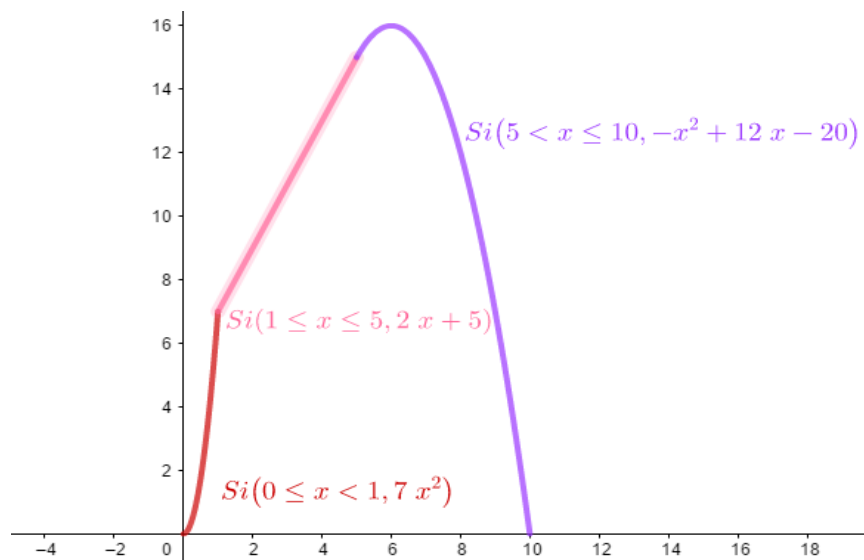
$$v(t) \text{ continua en } t = 5 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = v(5)$$

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 2t + a = \lim_{t \rightarrow 5^-} 2t + 5 = 15$$

$$\lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} -t^2 + 12t + b = -25 + 60 + b = 35 + b$$

$$v(5) = 15$$

Por lo tanto, $15 = 35 + b \Rightarrow b = -20$





b) Para $a = 5$ y $b = -20$, ¿en qué momento el patinete alcanza la velocidad máxima?

$$v'(t) = \begin{cases} 14t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t \leq 5 \\ -2t + 12 & 5 < t < 10 \end{cases}$$

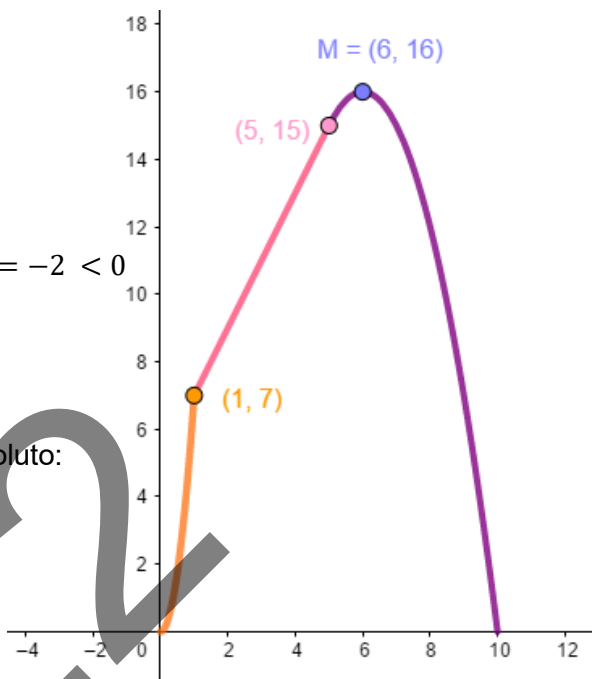
Entonces, $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$

$$v''(t) = \begin{cases} 14 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 5 \\ -2 & 5 < t < 10 \end{cases} \Rightarrow v''(6) = -2 < 0$$

Luego, en $t = 6$ hay un máximo relativo.

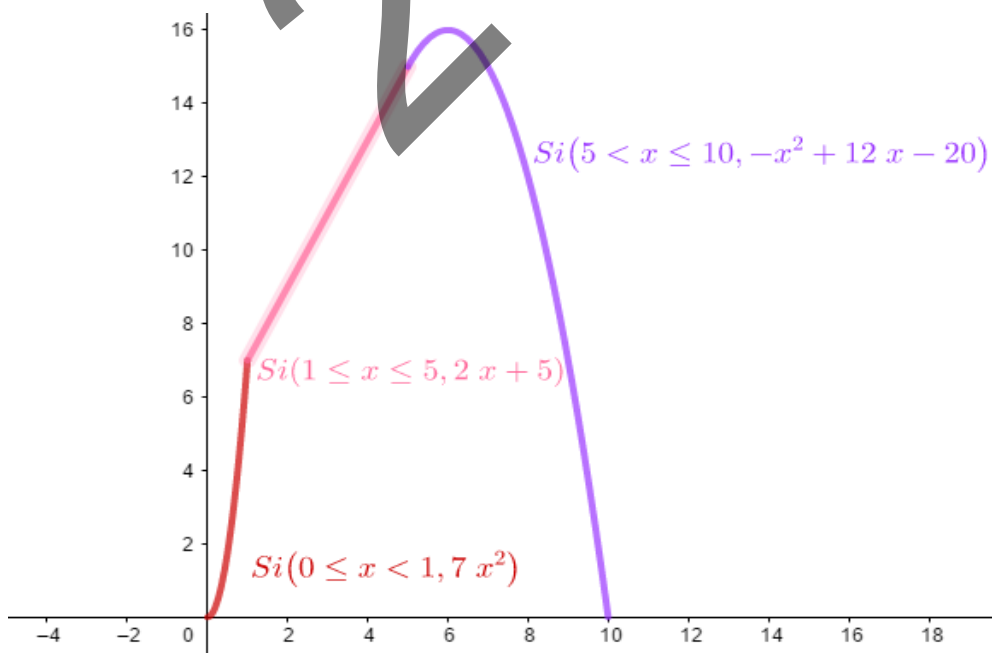
• Para comprobar que es máximo absoluto:

- $v(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 20 = 16$
- $v(0) = 0$
- $v(10) = 0$



Por lo tanto, la velocidad máxima se alcanza en el instante $t = 6$, y su valor es 16.

c) En el caso $a = 5$ y $b = -20$, realiza la representación gráfica de la función





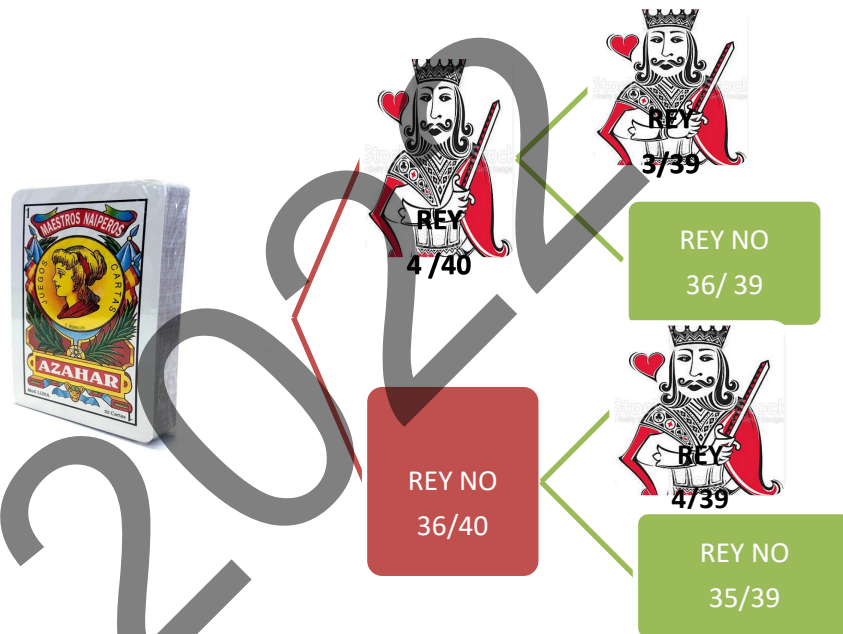
BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3 Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol o a través de la fórmula de la probabilidad total.

- a) Probabilidad de que gane un viaje la primera persona que recibe la carta.

$$P(\text{la 1ª persona gana un viaje}) = P(R_1) = \frac{4}{40} = 0,1 \Rightarrow 10 \%$$

- b) Probabilidad de que gane un viaje la segunda persona que recibe la carta.



$$P(\text{la 2ª persona gana un viaje}) = P(R_2) =$$

$$= P(R_1) \cdot P(R_2 | R_1) + P(R_1^c) \cdot P(R_2 | R_1^c) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} + \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{156}{1560} = 0,1$$
$$\Rightarrow 10 \%$$

- c) Probabilidad de que ninguna de las dos primeras personas gane un viaje.

$$P(\text{ninguna de las dos primeras personas gana el viaje}) =$$

$$= P(R_1^c \cap R_2^c) = P(R_1^c) \cdot P(R_2^c | R_1^c) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{1260}{1560} = 0,8077 \Rightarrow 80,77 \%$$



B.3 Problema de cálculo de probabilidades.

$$P(\text{encestar Deiene}) = P(D) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(D^c) = \frac{3}{5}$$
$$P(\text{encestar Kattalin}) = P(K) = \frac{3}{7} \Rightarrow P(K^c) = \frac{4}{7}$$

- a) Probabilidad de que encesten las dos, esto es, probabilidad del suceso $D \cap K$.

Los sucesos D y K son independientes, por lo tanto:

$$P(D \cap K) = P(D) \cdot P(K)$$

$$P(D \cap K) = P(D) \cdot P(K) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{35} = 0,1714 \Rightarrow \mathbf{17,14 \%}$$

- b) Probabilidad de que no enceste ninguna de las dos, esto es, probabilidad del suceso $D^c \cap K^c$.

Los sucesos D^c y K^c son independientes, por lo tanto:

$$P(D^c \cap K^c) = P(D^c) \cdot P(K^c)$$

$$P(D^c \cap K^c) = P(D^c) \cdot P(K^c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35} = 0,3428 \Rightarrow \mathbf{34,28 \%}$$

- c) Probabilidad de que enceste sólo Deiene.

$$P(D \cap K^c) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{35} = 0,2286 \Rightarrow \mathbf{22,86 \%}$$

- d) Probabilidad de que al menos una haya encestado.

$$P(D \cup K) = P(D) + P(K) - P(D \cap K) = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} - \frac{6}{35} = \frac{23}{35} = 0,6571$$

$$\Rightarrow \mathbf{65,71 \%}$$



BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4 Comprensión y uso de una distribución Normal, y cálculo de probabilidades.

a) Intervalo característico para el 80 %.

$$\text{varianza} = 16 \Rightarrow \sigma = \sqrt{16} = 4$$

$$X \equiv \text{temperatura} = \mathcal{N}(10, 4)$$

$(10 - e, 10 + e)$ es el intervalo característico para el 80 %, si $P(10 - e \leq X \leq 10 + e) = 0,8$

$$P(10 - e \leq X \leq 10 + e) = 0,8 \Rightarrow P(X \leq 10 + e) - P(X \leq 10 - e) = 0,8 \Rightarrow$$

TIPIFICACIÓN:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 10}{4} \Rightarrow X = 4Z + 10$$

$$P(X \leq 10 + e) = P(4Z + 10 \leq 10 + e) = P(4Z \leq e) = P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)$$

$$P(X \leq 10 - e) = P(4Z + 10 \leq 10 - e) = P(4Z \leq -e) = P\left(Z \leq \frac{-e}{4}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)$$

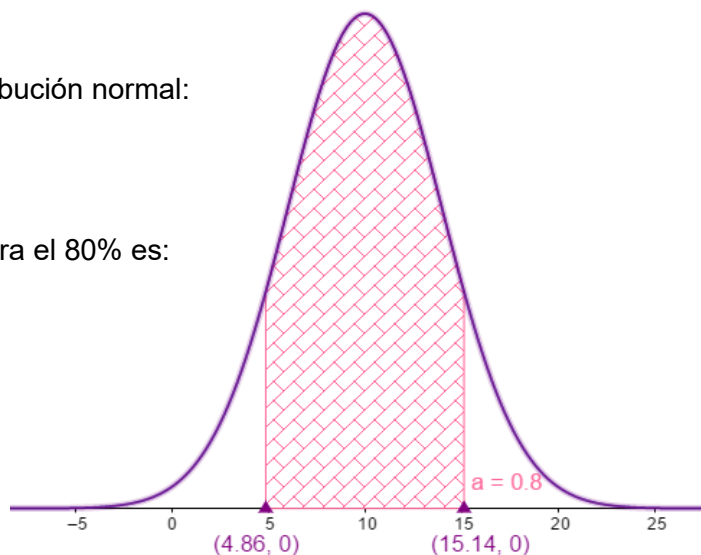
$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right)\right] = 0,8 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) - 1 = 0,8 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{4}\right) = 0,9$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

$$\frac{e}{4} = 1,285 \Rightarrow e = 5,14$$

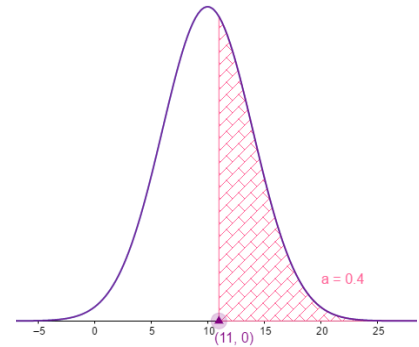
Por lo tanto, el intervalo característico para el 80% es:

$$(10 - e, 10 + e) = (4,86, 15,14)$$



b) $P(X \geq 11)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 11) &= P(4Z + 10 \geq 11) = \\ &= P(Z \geq 0,25) = 1 - P(Z \leq 0,25) \\ &= 1 - 0,5987 = 0,4013 \Rightarrow \mathbf{40,13\%} \end{aligned}$$



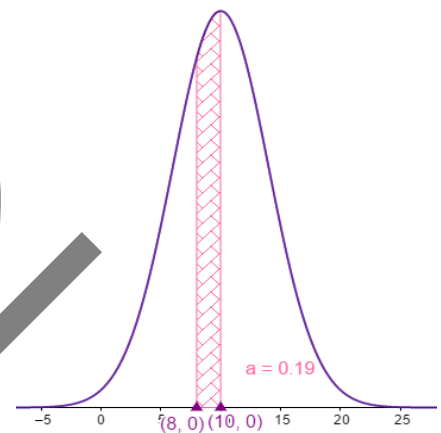
c) $P(8 \leq X \leq 10)$

$$P(8 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 8)$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 10) &= P(4Z + 10 \leq 10) = \\ &= P(Z \leq 0) = 0,5 \end{aligned}$$

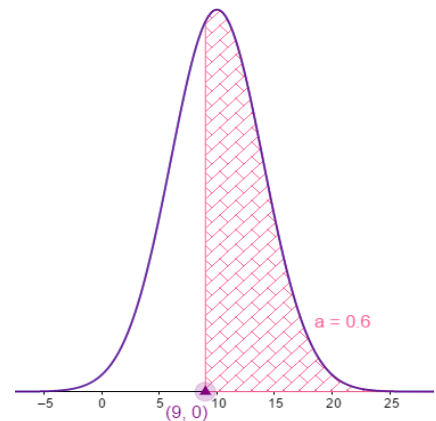
$$\begin{aligned} P(X \leq 8) &= P(4Z + 10 \leq 8) = \\ &= P(Z \leq -0,5) = P(Z \geq 0,5) = \\ &= 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = 0,3085 \end{aligned}$$

Por lo tanto; $P(8 \leq X \leq 10) = 0,5 - 0,3085 = 0,1915 \Rightarrow \mathbf{19,15\%}$



d) Proporción de días con más de 9° C.

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(4Z + 10 \geq 9) = \\ &= P(Z \geq -0,25) = P(Z \leq 0,25) = 0,5987 \\ &\Rightarrow \mathbf{59,87\%} \end{aligned}$$



e) En un mes de 30 días, ¿cuántos días la temperatura no ha alcanzado los 12° C?

$$P(X \leq 12) = P(4Z + 10 \leq 12) = P(Z \leq 0,5) = 0,6915 \Rightarrow 69,15\%$$

Entonces, el 69,15 % de 30 es 20,74 y como el número de días tiene que ser un número natural, podemos decir que **en 20 días** la temperatura ha sido inferior a 12° C.

B.4 Ejercicio de distribución de la media muestral. Valor de la media muestral y error máximo admisible.

- En la estimación por intervalo de confianza de la media, conocemos la fórmula del error máximo admisible, que es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- e_m es la mitad de la amplitud del intervalo.

Por lo tanto: $e_m = \frac{54-51}{2} = 1,5$

- El valor de la desviación típica σ , se estima a partir del valor muestral obtenido, $s = 5,3$.

- Sabemos que el tamaño muestral es $n = 100$

Entonces, calculamos el valor de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1,5 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{5,3}{\sqrt{100}} \Rightarrow 15 = 5,3 \cdot Z_{\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,83$$

- A partir de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$, obtenemos el nivel de confianza $1 - \alpha$:

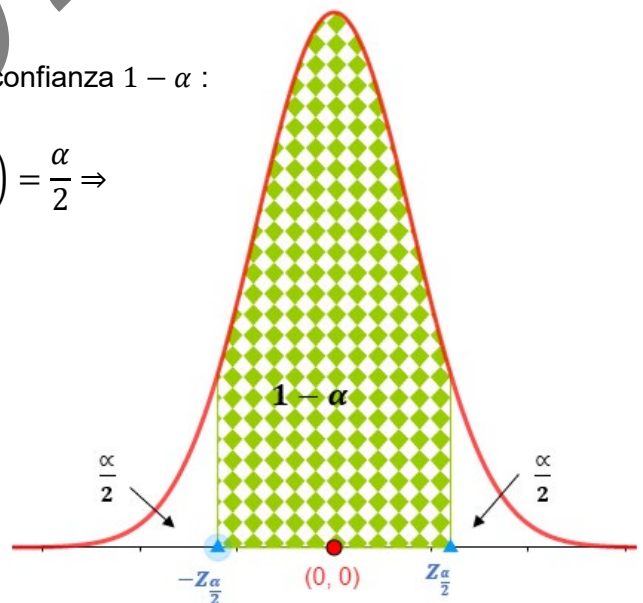
$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - P(Z \leq 2,83) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 0,9987 = 0,0023 = \frac{\alpha}{2}$$

Entonces:

$$\frac{\alpha}{2} = 0,0023 \Rightarrow \alpha = 0,0046 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,9954$$



Por lo tanto, **podemos decir con un nivel de confianza del 99,54 %**, que el peso medio de las chicas de 16 años de esa ciudad está entre 51 y 54 kg.