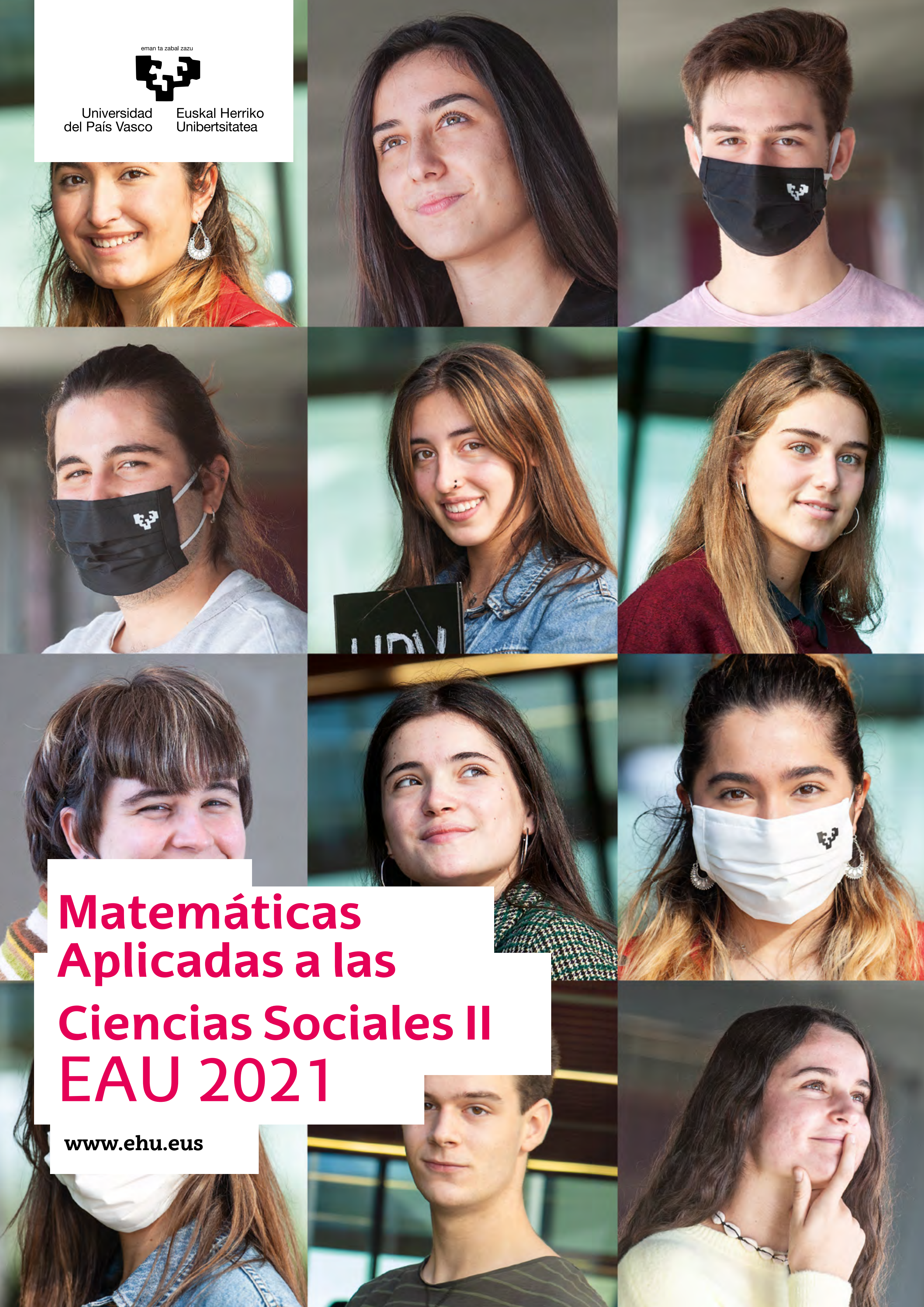


eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II EAU 2021

www.ehu.eus

- **Azterketa honek zortzi problema ditu lau bloketan banatuta.**

  Zortzi problema horietatik lauri erantzun behar diezu, eta lau horiek gutxienez hiru bloke desberdinetakoak izan behar dute.

- *Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.*

Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:

- pantaila grafikoa
- datuak igortzeko aukera
- programatzeko aukera
- ekuazioak ebazteko aukera
- matrize-eragiketak egiteko aukera
- determinanteen kalkulua egiteko aukera
- deribatuak eta integralak ebazteko aukera
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

- **Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques.**

  De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

- *En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.*

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de trasmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes
- derivadas e integrales
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

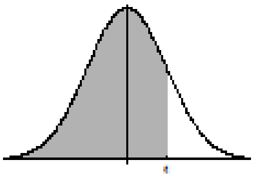
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2021 EZOHIKOA

EXTRAORDINARIA 2021

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y) = 5x + 4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + y \geq 5 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Representa el recinto mencionado.

b) $[\![\boldsymbol{1,5\ puntos}]\!]$ Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

B.1. $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A \cdot B + B^2$? Razona la respuesta.

b) $[\![\boldsymbol{1,75\ puntos}]\!]$ Resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A = 2\,B^t + I_2$$

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. $[\![\textbf{\textit{hasta 2,5 puntos}}]\!]$

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -2\le x<0 \\ -x+2 & \text{si} \quad 0\le x<2 \\ x^2-4x+4 & \text{si} \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

a) $[\![\textbf{\textit{1 punto}}]\!]$ Analiza la continuidad de la función en el intervalo $[-2,4]$.

b) $[\![\textbf{\textit{0,5 puntos}}]\!]$ Realiza la representación gráfica de la función.

c) $[\![\textbf{\textit{1 punto}}]\!]$ Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX .

B.2. $[\![\textbf{\textit{hasta 2,5 puntos}}]\!]$

El coste de producción de una empresa, $f(x)$, medido en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, x, medida en toneladas:

$$f(x)=30-9x+6x^2-x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.

a) $[\![\textbf{\textit{1,25 puntos}}]\!]$ Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de coste de producción de la empresa.

b) $[\![\textbf{\textit{0,75 puntos}}]\!]$ Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?

c) $[\![\textbf{\textit{0,5 puntos}}]\!]$ ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

a) $[\![1\ punto]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

c) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

B.3. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

a) $[\![1,25\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

b) $[\![1,25\ puntos]\!]$ En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $\mathcal{N}(24, 9)$.

a) $[\![1,25\ puntos]\!]$ Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

b) $[\![1,25\ puntos]\!]$ ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

B.4. $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es $(820,\ 830)$ con un nivel de confianza del 95 %.

Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

a) $[\![1\ punto]\!]$ Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

b) $[\![1,5\ puntos]\!]$ Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
(EXTRAORDINARIA 2021)

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen está compuesto de ocho ejercicios.
2. ***De estos ocho ejercicios se tiene que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes*.**
3. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
4. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
5. Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.
6. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, …, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

BLOQUE: ÁLGEBRA

Problema A.1. ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 1 punto. Representar la región factible.
- Representación de cada restricción 0,125, por lo tanto**, 0,5 puntos.**
- Determinar el recinto pedido, **0,5 puntos.**

b. 1,5 puntos. Determinar los máximos y los mínimos relativos, y en ellos los valores de la función.
- Determinar los vértices de la región factible, **0,75 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,5 puntos.**
- Determinar el valor de la función objetivo, **0,25 puntos.**

Problema B.1. ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,75 puntos. Comprobar la igualdad.
- Comprobar que las matrices *A* y *B* conmutan, **0,5 puntos.**
- Comprobar la igualdad razonadamente, **0,25 puntos.**

b. 1,75 puntos. Resolución de la ecuación matricial.
- Determinar X, **0,5 puntos.**
- Calcular la matriz $2\,B^t + I_2 = C$, **0,25 puntos.**
- Cálculo de la matriz inversa de A:
  - Calcular el determinante de la matriz A , **0,15 puntos.**
  - Calcular la matriz adjunta de la matriz A, **0,25 puntos.**
  - Calcular la matriz inversa de A, **0,1 puntos.**
- Cálculo de la matriz X, **0,5 puntos.**

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

BLOQUE: ANÁLISIS

Problema A.2. *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto. Continuidad de la función en el intervalo $[-2, 4]$.

- Continuidad en los intervalos $[-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4]$, **0,2 puntos.**
- Continuidad en el punto $x = 0$.
  - Definir la continuidad de una función en un punto, **0,15 puntos.**
  - Límites laterales, **0,25 puntos.**
- Continuidad en el punto $x = 2$.
  - Definir la continuidad de una función en un punto, **0,15 puntos.**
  - Límites laterales, **0,25 puntos.**

b. 0,5 puntos. Representación gráfica.

- Representación de cada recta 0,1 puntos**,** por lo tanto, **0,2 puntos.**
- Representación de la parábola, **0,3 puntos.**

c. 1 punto. Área de la región delimitada por la función y el eje de abscisas OX.

- Determinar las integrales definidas $A_1 + A_2 + A_3$, **0,25 puntos**.
- Cálculo de las integrales definidas.
  - Cálculo de la integral definida A_1, **0,3 puntos.**
  - Cálculo de la integral definida A_2, **0,15 puntos.**
  - Cálculo de la integral definida A_3, **0,3 puntos.**

Problema B.2. *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,25 puntos. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

- Cálculo de la primera derivada, **0,25 puntos.**
- Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento,**1 punto.**

b. 0,75 puntos.

- Cálculo de los extremos de la función, **0,4 puntos.**
- Determinar el mínimo de la función, **0,2 puntos.**
- Calcular el coste mínimo, **0,15 puntos.**

c. 0,5 puntos.

- Determinar el máximo de la función de modo razonado, **0,35 puntos.**
- Determinar el valor máximo del coste de producción, **0,15 puntos**.

BLOQUE: PROBABILIDAD

Problema A.3. *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto.
- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,5 puntos**.
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. 0,75 puntos.
- Indicar el teorema de la probabilidad total, **0,25 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

c. 0,75 puntos.
- Indicar la probabilidad a posteriori, teorema de Bayes, **0,25 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

Problema B.3. *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,25 puntos.
- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,5 puntos**.
- Cálculo de la probabilidad de Lucía, **0,375 puntos**.
- Cálculo de la probabilidad de Nerea, **0,375 puntos.**

b. 1,25 puntos.
- Hacer un diagrama de árbol o algún esquema, **0,5 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,75 puntos.**

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

Problema A.4. *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1,25 puntos.

- Tipificación de la variable, **0,5 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,75 puntos.**

b. 1,25 puntos.

- Planteamiento del problema, **0,25 puntos**.
- Darse cuenta de que es negativo, **0,2 puntos.**
- Concretar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,45 puntos.**
- Determinar el valor x_0 pedido, **0,35 puntos.**

Problema B.4. *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto.

- Indicar qué es la media muestral, **0,5 puntos.**
- Determinar la media muestral, **0,5 puntos.**

b. 1,5 puntos.

- Determinar $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,3 puntos**
- Indicar qué es el error máximo, **0,3 puntos.**
- Determinar el error máximo admisible, **0,3 puntos.**
- Indicar la fórmula del error máximo admisible, **0,3 puntos.**
- Determinar el tamaño de la muestra, **0,3 puntos.**

SOLUCIONES

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. *Problema de programación lineal con dos variables:*

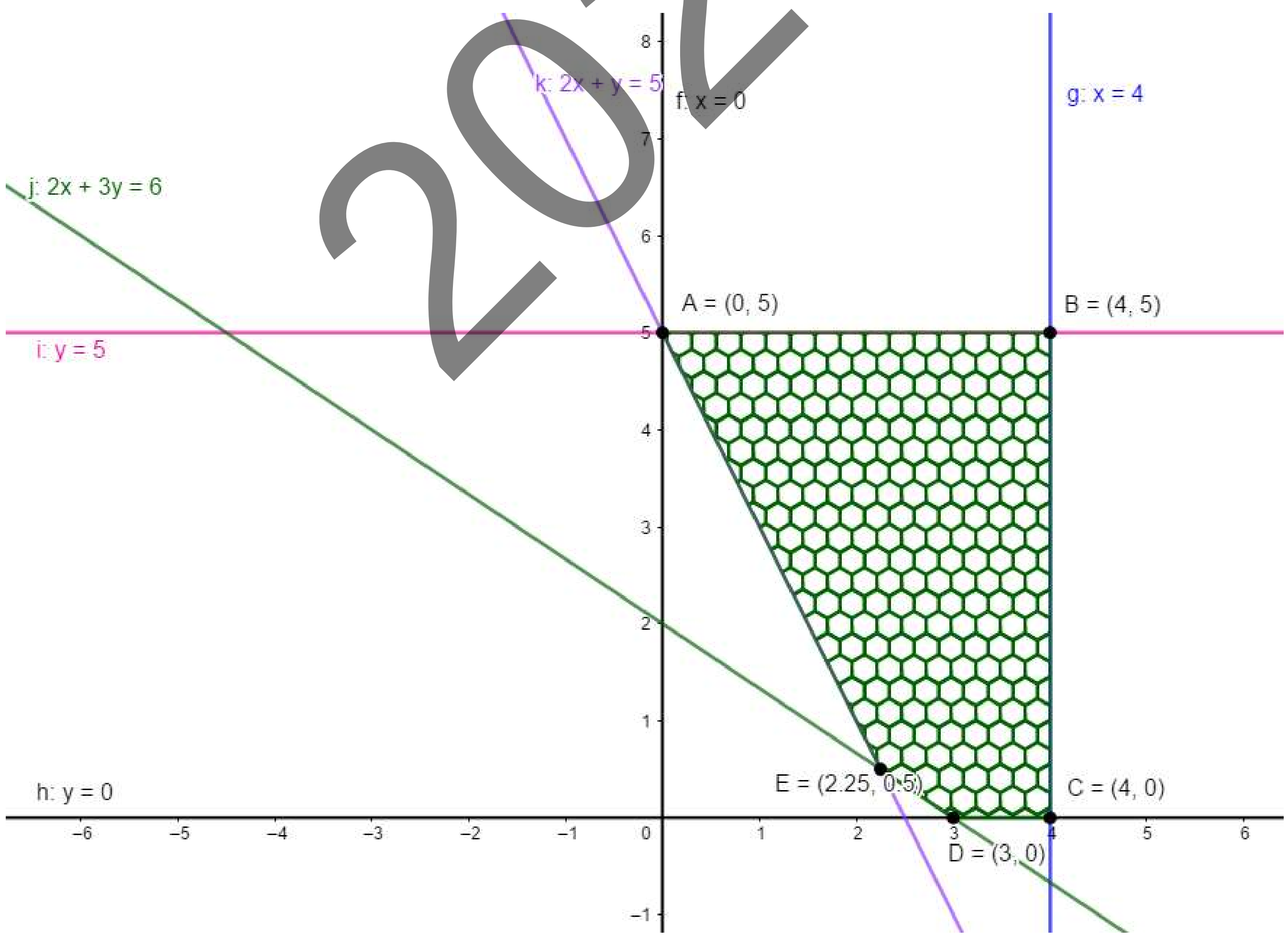
a) Representa gráficamente dicho recinto.

- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 5\,x + 4y$$

- Las restricciones son: $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 5 \\ 2x + 3y \ge 6 \\ 2x + y \ge 5 \end{cases}$

- En el plano XY la región factible es:



b) Máximo y mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

- Los vértices son:
  - $A(0,5)$, $B(4,5)$, $C(4,0)$, $D(3,0)$
  - $E = ?$
    - $E = \begin{cases} 2x+3y=6 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{6-3y}{2}=\frac{9}{4} \Rightarrow E\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$

$$\Longrightarrow A(0,5)\,,\ B(4,5),\ C(4,0),\ D(3,0),\ E\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)$$

- $f(A) = f(0,5) = 20$
  $f(B) = f(4,5) = 40$
  $f(C) = f(4,0) = 20$
  $f(D) = f(3,0) = 15$
  $f(E) = f\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{53}{4} = 13{,}25$

- Por lo tanto, el valor mínimo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{E\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)}$**,** siendo el valor de la función en dicho punto **13,25**.
  El valor máximo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{B\ (4,\ \ 5)}$**,** siendo el valor de la función en dicho punto **40**.

B.1. *Cálculo matricial. Propiedades de las matrices. Resolución de una ecuación matricial.*

Sean $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\cdot B + B^2$?

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$
- $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, las matrices conmutan, es decir, $A \cdot B = B \cdot A \;\Rightarrow$

$$(A+B)^2 = A^2 + A\cdot B + B\cdot A + B^2 = A^2 + 2\,A\cdot B + B^2$$

Y concluimos que, **en este caso, sí se verifica la igualdad**.

b) Resolver $X \cdot A = 2\,B^t + I_2$

- $X \cdot A = 2\,B^t + I_2 = C \;\Rightarrow\; X \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot A^{-1} \;\Rightarrow X \cdot I = C \cdot A^{-1} \;\Rightarrow$

$$\boxed{X = C \cdot A^{-1}}$$

- $C = 2\,B^t + I_2 \;\Rightarrow\; C = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj\;A)^t = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2/7 \\ 0 & -1/7 \end{pmatrix}$

  - ✓ $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7$
  - ✓ $A_{11} = -7 \qquad A_{21} = -2$
    $A_{12} = 0 \qquad A_{22} = -1$

Por lo tanto:

- $X = C \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -35 & -10 \\ -14 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10/7 \\ -2 & -3/7 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{-10/7} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3/7} \end{pmatrix}$$

BLOQUE: ANÁLISIS

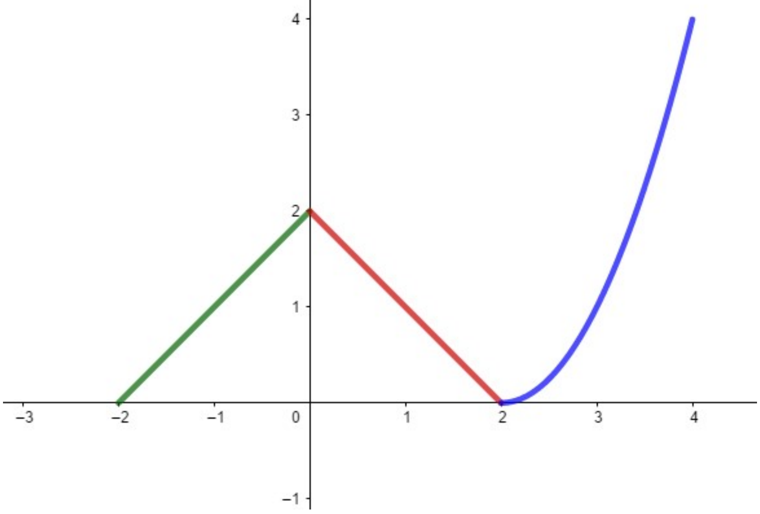
***A.2**. Analizar la continuidad de una función. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas.*

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } -2\le x<0 \\ -x+2 & \text{si } \quad 0\le x<2 \\ x^2-4x+4 & \text{si } \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$$

a) Continuidad en el intervalo $[-2,4]$.

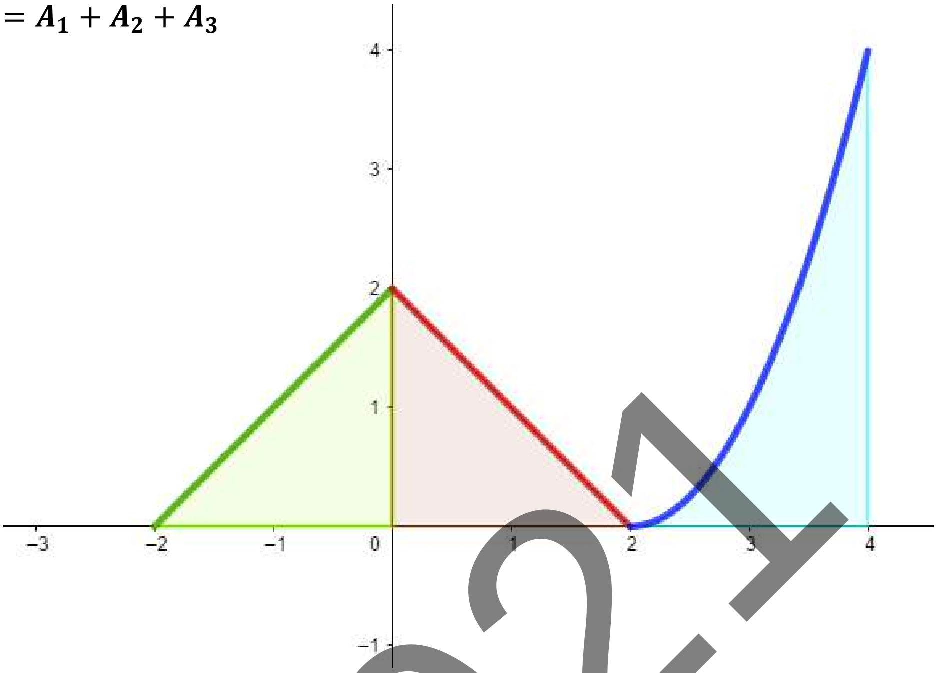
- $f(x)$ es continua en los intervalos $[-2,0)\cup(0,2)\cup(2,4]$ por estar definida como polinomios.
- $f(x)$ continua en $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2$
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x+2)=2$
  - $f(0)=2$
  - Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x=0$
- $f(x)$ continua en $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$
  - $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-x+2)=0$
  - $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-4x+4)=0$
  - $f(2)=2^2-4\cdot 2+4=0$
  - Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x=2$
- Por lo tanto $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2,4]$.

b) Representación gráfica.



c) Área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

- $\boldsymbol{A = A_1 + A_2 + A_3}$



- $A_1 = \int_0^2 [(-x+2) - 0]dx = \int_0^2 (-x+2)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = (-2+4) - 0 = \mathbf{2\ u^2}$

- $A_2 = A_1 = \mathbf{2\ u^2}$

- $A_3 = \int_2^4 [(x^2 - 4x + 4) - 0]dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^4 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 =$

$$= \left(\frac{64}{3} - 32 + 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) = \frac{56}{3} - 16 = \mathbf{\frac{8}{3}\ u^2}$$

- Por lo tanto: $\boldsymbol{A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}\ u^2}$

B.2. *Problema de análisis de una función. Cálculo de máximos, mínimos, puntos de inflexión y representación gráfica.*

a) Estudiamos el signo de la primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f\ (x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3 \ \Rightarrow\ f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 \ \Rightarrow\ f'(x) = -3\ (x-1)(x-3)$$

$1 \qquad 3$

	0	2	4
$(x-1)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$-$	$+$
$\boldsymbol{f'(x) = -3(x-1)(x-3)}$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto, es decreciente en los intervalos $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ y creciente en $(1, 3)$.

Pero como la capacidad de producción máxima es de 2 toneladas, la función está definida en $0 \leq x \leq 2 \ \Rightarrow$ **es decreciente en $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1})$ y creciente en $(\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$.**

b) Calculamos los máximos y mínimos

- $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = 0 \ \Longrightarrow x = 1\ ,\ x = 3$ puntos singulares,

  pero $3 \notin\ [0,2]$

- $f''(x) = -6x + 12$

  $f''(1) = -6 + 12 = \ 6\ > 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 26 \ \Rightarrow$ **(1, 26) mínimo**

Luego para $\boldsymbol{x = 1}$ **el coste de producción es mínimo y vale 26 000 €**.

c) ¿Con qué cantidad la empresa tiene un coste de producción máximo?

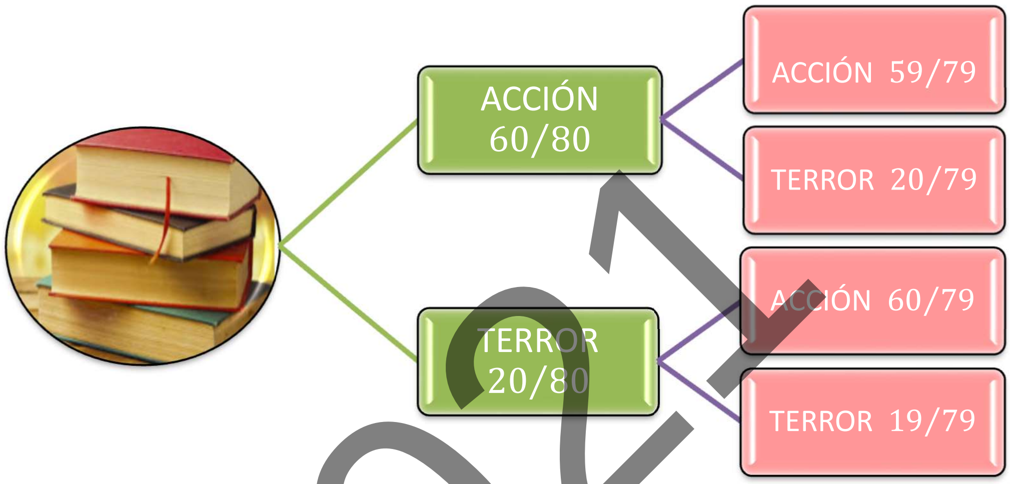
- $\boldsymbol{f(0) = 30}$ y la función es decreciente en el intervalo $(0, 1)$

- $\boldsymbol{f(1) = 26}$, $\boldsymbol{f(2) = 28}$ y la función es creciente en el intervalo $(1, 2)$

Entonces **el coste de producción máximo se consigue en $\boldsymbol{x = 0}$ y vale 30 000 €.**

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse***,** *a través de un diagrama de árbol o a través de la fórmula de la probabilidad total.*



a) Probabilidad de que tanto Janire como Eneko elijan novelas de acción.

$$P(J.acción \cap E.acción) = P(J.acción) \cdot P(E.acción \mid J.acción) =$$

$$= \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} = \frac{177}{316} = \mathbf{0,56} \Rightarrow \mathbf{56}\,\%$$

b) Probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción.

$$P(E.acción) =$$

$$= P(J.acción) \cdot P(E.acción \mid J.acción) + P(J.terror) \cdot P(E.acción \mid J.terror) =$$

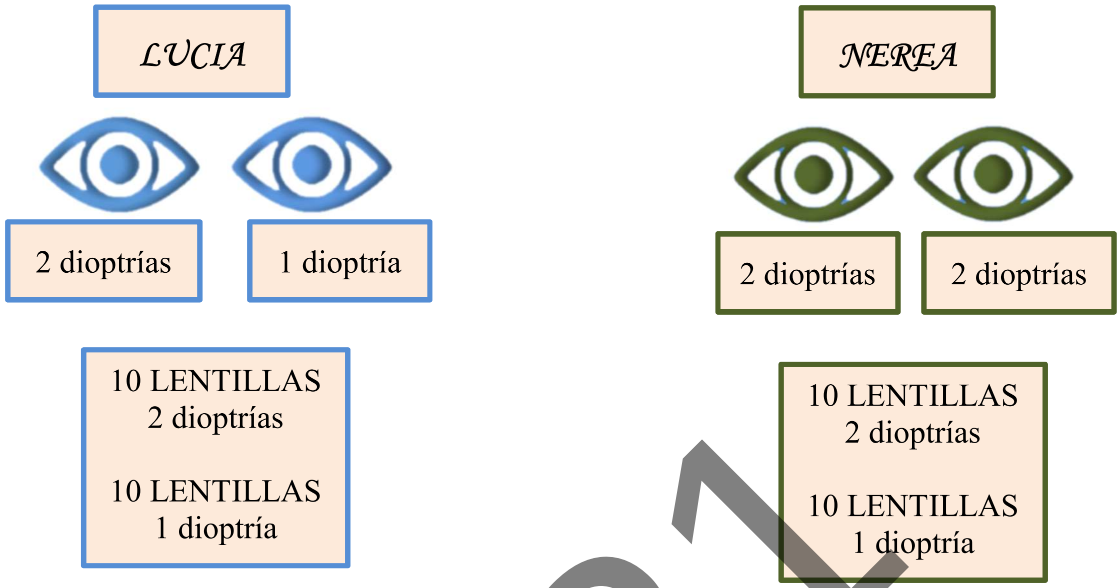
$$= \frac{60}{80} \cdot \frac{59}{79} + \frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79} = \frac{3}{4} = \mathbf{0,75} \Rightarrow \mathbf{75}\,\%$$

c) Si ha sido una novela de acción la elegida por Eneko, calcular la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror.

$$P(J.terror \mid E.acción) = \frac{P(J.terror \cap E.acción)}{P(E.acción)} =$$

$$= \frac{P(J.terror) \cdot P(E.acción \mid J.terror)}{0{,}75} = \frac{\frac{20}{80} \cdot \frac{60}{79}}{0{,}75} = \frac{0{,}18987}{0{,}75} = \mathbf{0,2532} \Rightarrow \mathbf{25,32}\,\%$$

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*

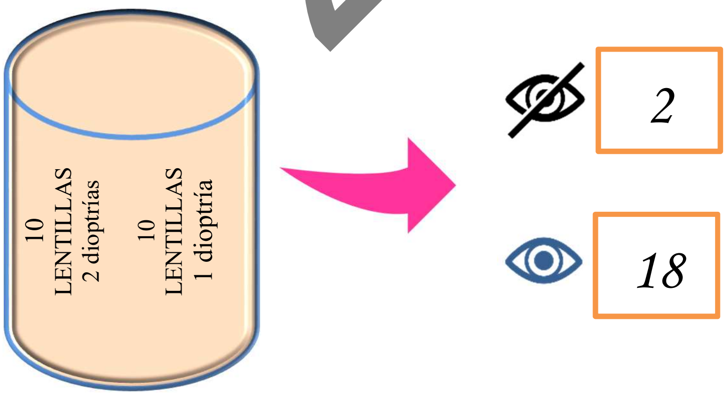


a) Probabilidad de cada una de acertar con las lentillas que necesita.

$$\boldsymbol{P(LUCIA)} = P(2_d \cap 1_d) + P(1_d \cap 2_d) = 2 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{200}{380} = \mathbf{0,526} \Rightarrow \mathbf{52,6}\ \%$$

$$\boldsymbol{P(NEREA)} = P(2_d \cap 2_d) = \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} = \frac{90}{380} = \mathbf{0,237} \Rightarrow \mathbf{23,7}\ \%$$

b) Probabilidad de que Lucía consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento.



$D = \{defectuosa\}$

$D^c = \{no\ defectuosa\}$

$$P(\,2\ defectuosas\ en\ el\ tercer\ intento) = P(D \cap D^c \cap D) + P(D^c \cap D \cap D) =$$

$$= \frac{2}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{1}{18} + \frac{18}{20} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{18} = 2 \cdot \frac{36}{6840} = \mathbf{0,0105} \Rightarrow \mathbf{1,0526\%}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

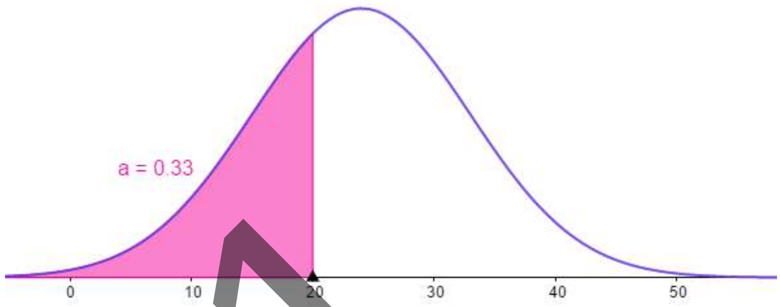
A.4. *Comprensión y uso de una distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

a) Probabilidad de obtener el permiso con menos de 20 horas de prácticas

$$X \equiv N(\mu, \quad \sigma) = \mathcal{N}(24, 9)$$

- Tipificación de la variable X :

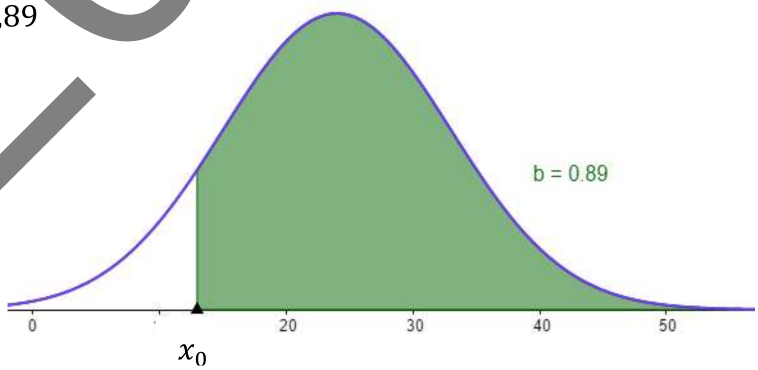
$$Z = \frac{X-24}{9} \Rightarrow \quad X = 9Z + 24$$



- $P(X < 20)$

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X-24}{9} < \frac{20-24}{9}\right) = P\left(Z < \frac{20-24}{9}\right) = P\left(Z < \frac{-4}{9}\right) =$$
$$= P(Z < -0{,}444) = P(Z \geq 0{,}444) = 1 - P(Z \leq 0{,}444) = 1 - 0{,}67 =$$
$$= 0{,}33 \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(X < 20) = 0{,}33} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{33}\ \%$$

b) x_0? tal que $P(X > x_0) = 0{,}89$



- $P(X > x_0) = 0{,}89 \ \Rightarrow P(X \leq x_0) = 1 - 0{,}89 \ \Rightarrow P(X \leq x_0) = 0{,}11 \ \Rightarrow$

$$P(9Z + 24 \leq x_0) = 0{,}11 \Longrightarrow P\left(Z \leq \frac{x_0 - 24}{9} = k\right) = 0{,}11$$

  ✓ $\frac{x_0-24}{9} = k$ (es negativo porque la probabilidad es menor que 0,5);

  entonces, por simetría:

$$P(Z \leq -k\ ) = 0{,}89 \quad \Rightarrow \ -k = -\frac{x_0-24}{9} = 1{,}23 \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{x_0 = 12{,}93}$$

B.4. *Ejercicio de distribución de la media muestral. Valor de la media muestral. Tamaño de la muestra y error máximo admisible.*

El gasto medio anual que hacen las familias en hostelería: $X \equiv \mathcal{N}(\mu, 80)$

a) Calcular la media obtenida a partir de la muestra, es decir, el valor de la media muestral: $\boldsymbol{\bar{x}}$

- Sabemos que el intervalo de confianza para la media μ con un nivel de confianza del 95 % es $(820,\ 830)$.
- El valor de la media muestral es el punto medio del intervalo de confianza.

Por lo tanto:

$$\bar{x} = \frac{820 + 830}{2} = 825 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\bar{x} = 825}$$

b) Calcular el número de familias que han formado parte de la muestra

- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

Nivel de confianza: $n_c = 0{,}95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}025 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}025 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

- El error máximo admisible para la media es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{e} = \frac{830 - 820}{2} = \mathbf{5}$$

Aplicando la fórmula del error máximo admisible calculamos el tamaño de la muestra:

$$e = 5 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{80}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1{,}96\ \frac{80}{5} = 31{,}36 \quad \Rightarrow \ n = \mathbf{983{,}45}$$

Por lo tanto, el tamaño de la muestra es **984 familias**.