eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
EAU 2020

www.ehu.eus

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2020ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek zortzi ariketa ditu. Haietako LAUri erantzun behar diezu.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketa-orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, baina, **ezin ditu izan** ezaugarri hauek:
    - pantaila grafikoa
    - datuak igortzeko aukera
    - programatzeko aukera
    - ekuazioak ebazteko aukera
    - matrize-eragiketak egiteko aukera
    - determinanteen kalkulua egiteko aukera
    - deribatuak eta integralak ebazteko aukera
    - datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene ocho ejercicios. Debes contestar a CUATRO de ellos.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:
    - pantalla gráfica
    - posibilidad de trasmitir datos
    - programable
    - resolución de ecuaciones
    - operaciones con matrices
    - cálculo de determinantes
    - derivadas e integrales
    - almacenamiento de datos alfanuméricos.
- La tabla de la distribución normal está en el anverso de esta hoja.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

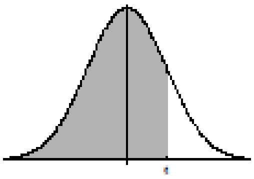
2020ko EZOHIKOA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EXTRAORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

A 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Determina el valor máximo de la función objetivo $F(x,\ y) = 5x + 4y$ restringida por las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

A 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sea la función $f(x) = ax^3 + bx + 1$.

a) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Calcula los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, -5)$.

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Para $a = 2$ y $b = -6$, estudiar los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x)$.

c) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Para $a = 2$ y $b = -6$, calcula el área comprendida entre la función y la recta $y = 2x + 1$. Realiza la representación gráfica.

A 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En un instituto, el 90 % del alumnado matriculado ha nacido en la ciudad en la que está localizado dicho centro. El 42 % del alumnado son chicos, y el 54 % son chicas nacidas en la ciudad en la que se ubica el instituto.

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto?

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ ¿Y la probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad donde se ubica el instituto?

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Se ha elegido una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad donde se ubica el instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico?

A 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Las notas obtenidas por los estudiantes de un determinado grupo en una asignatura siguen una distribución normal de media 6,2 puntos y desviación típica 2 puntos.
Se elige un estudiante al azar. Calcula:

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ La probabilidad de que su nota sea superior a 7.

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ La probabilidad de que haya obtenido una nota comprendida entre 5 y 8 puntos.

c) $[\![\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{puntos}]\!]$ Si el 25 % del alumnado con mejor nota, consiguió la calificación de “sobresaliente”, ¿cuál es la nota mínima para obtener dicha calificación?

B 1 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ Calcular la inversa de la matriz $(A \cdot A^t)$.

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ ¿Admite inversa la matriz $(A^t \cdot A)$?

c) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Calcular, cuando sea posible:

$$A \cdot B \qquad y \qquad A^t \cdot B$$

B 2 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

a) $[\![\boldsymbol{0,5\ puntos}]\!]$ Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función $y = 4 - x^2$.

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Representar gráficamente la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

c) $[\![\boldsymbol{1,25\ puntos}]\!]$ Hallar el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

B 3 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

En un centro de enseñanza de Estados Unidos hay 1000 estudiantes y 100 profesores. El 10 % de los profesores son demócratas y el resto republicanos. Entre los estudiantes las proporciones son las contrarias, es decir, el 10 % de ellos son republicanos y el resto son demócratas.

a) $[\![\boldsymbol{1,5\ puntos}]\!]$ Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea republicana?

b) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Se ha elegido al azar una persona de dicho centro y ha resultado ser republicana. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un estudiante?

B 4 $[\![\boldsymbol{hasta\ 2,5\ puntos}]\!]$

El tiempo que necesitan los alumnos de un grupo para finalizar el examen de una determinada asignatura se distribuye normalmente, con una media de 60 minutos y una desviación típica de 10 minutos.

a) $[\![\boldsymbol{1\ punto}]\!]$ Si se dan 75 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos conseguirá finalizarlo?

b) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ Si se dan 80 minutos para realizar el examen, ¿qué proporción de alumnos no conseguirá finalizarlo?

c) $[\![\boldsymbol{0,75\ puntos}]\!]$ ¿Qué tiempo hay que dar para la realización de dicho examen si se quiere que el 96 % de los alumnos consiga terminarlo?

MATEMATICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. **El examen está compuesto de cuatro ejercicios.**
2. El examen se evaluará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
3. **Cada ejercicio se valorará entre 0 y 2,5 puntos.**
4. En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc.…siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., … que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.

- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

Problema A 1 (2,5 puntos)

- Representación de las restricciones, **0,25 puntos.**
- Representar la región factible, **0,75 puntos.**
- Determinar los vértices de la región factible, **0,75 puntos.**
- Valoración de la función en los vértices, **0,5 puntos.**
- Determinar el máximo de la función, **0,25 puntos.**

Problema A 2 (2,5 puntos)

a. **0,75 puntos.**
  - **0,25 puntos**, (1, -5) es un punto de la función.
  - **0,25 puntos**, en el punto (1, -5) la función tiene un extremo relativo.
  - **0,25 puntos**, resolución del sistema.

b. **0,75 puntos.**
  - Obtención de los máximos y los mínimos relativos, **0,5 puntos.**
  - Obtención de los puntos de inflexión, **0,25 puntos.**

c. **1 punto.**
  - Representación gráfica, **0,25 puntos.**
  - Concreción del área $A = A_1 + A_2$ **, 0,25 puntos.**
  - Cálculo de la integral, **0,25 puntos.**
  - Cálculo del área del recinto aplicando la Regla de Barrow, **0,25 puntos.**

Problema A 3 (2,5 puntos)

a. **1 punto.**
  - Realizar la tabla de contingencia, **0,25 puntos.**
  - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,75 puntos.**

b. **0,75 puntos.** Cálculo de la probabilidad pedida.

c. **0,75 puntos.** Cálculo de la probabilidad pedida.

Problema A 4 (2,5 puntos)

a. **1 punto.**
  - Planteamiento, **0,25 puntos.**
  - Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
  - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. **0,75 puntos.** Cálculo de la probabilidad pedida.

c. **0,75 puntos.** Concreción del parámetro.

Problema B 1 (2,5 puntos)

a. **1,25 puntos.**
- Concretar $(\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{A}^{\mathrm{t}})$ **0,25 puntos.**
- Cálculo del determinante de la matriz $(\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{A}^{\mathrm{t}})$, **0,25 puntos.**
- Cálculo de la inversa de la matriz $(\mathrm{A}\cdot\ \mathrm{A}^{\mathrm{t}})$, **0,75 puntos.**

b. **0,75 puntos.**
- Concretar $(A^t \cdot A)$, **0,25 puntos.**
- Cálculo del determinante de la matriz $(A^t \cdot A)$, **0,25 puntos.**
- Explicación, **0,25 puntos.**

c. **0,5 puntos.**
- Explicación $A \cdot B$ **, 0,25 puntos.**
- Calcular $A^t \cdot B$, **0,25 puntos.**

Problema B 2 (2,5 puntos)

a. **0,5 puntos.** Estudio de la función $y_1 = 4 - x^2$
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, **0,3 puntos**
- Calcular el máximo, **0,2 puntos.**

b. **0,75 puntos**
- Representación de la función $y_2 = 4 - x$, **0,25 puntos.**
- Gráfico de la función definida a trozos **0,5 puntos.**

c. **1,25 puntos.**
- Concreción del área $A = A_1 + A_2$ **0,25 puntos.**
- Cálculo de las integrales.
  - ✓ A_1 **0,25 puntos.** A_2 **0,25 puntos.**
- Realizar el cálculo del área a través de la regla de Barrow:
  - ✓ A_1 **0,25 puntos.** A_2 **0,25 puntos.**

Problema B 3 (2,5 puntos)

a. Cálculo de la probabilidad total, **1,5 puntos.**

b. Cálculo de la probabilidad “a posteriori”, **1 punto.**

Problema B 4 (2,5 puntos)

a. **1 punto.**
   - a. Planteamiento, **0,25 puntos.**
   - b. Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
   - c. Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. **0,75 punto**. Cálculo de la probabilidad pedida.

c. **0,75 puntos.** Concreción del parámetro.

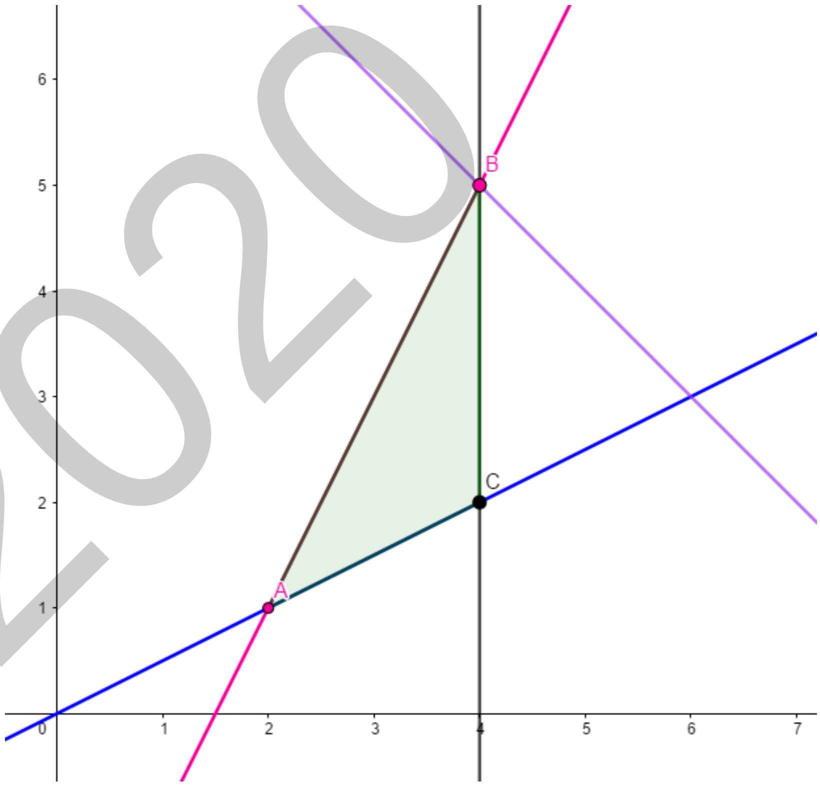
SOLUCIONES

A 1 *Problema de programación lineal con dos variables:*

- La función objetivo a maximizar es: $F(x,\quad y) = 5x + 4y$
- Las restricciones son:

$$\begin{cases} 2y - x \geq 0 \\ y \leq 2x - 3 \\ x + y \leq 9 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

- En el plano XY la región factible es:



- Por lo tanto, los vértices son:

$A(2,1)$, $B(4,5)$ y $C(4,2)$.

- $F(A) = F(2,1) = 14$

  $F(B) = F(4,5) = 40$

  $F(C) = F(4,2) = 28$

Por lo tanto, el máximo de la función se consigue en el punto $\boldsymbol{B(4,\ 5)}$ **, y el valor máximo es 40.**

A 2 *Representación gráfica de una función. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con otra función.*

a) Encontrar los parámetros a y b, $\quad f(x) = ax^3 + bx + 1$

- En el punto $(1,-5)$ hay un extremo relativo $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = -5 & (1) \\ f'(1) = 0 & (2) \end{cases}$
- $f'(x) = 3ax^2 + b$
- $(1)\ f(1) = -5 \Rightarrow a + b + 1 = -5 \Rightarrow a + b = -6$
- $(2)\ f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

- Por lo tanto: $\begin{cases} a + b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{a = 3}, \quad \boldsymbol{b = -9} \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = 3x^3 - 9x + 1}$

b) Determinar los puntos singulares de $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

- Máximos y mínimos relativos $\Rightarrow f'(x) = 0$
  - $f'(x) = 6x^2 - 6$

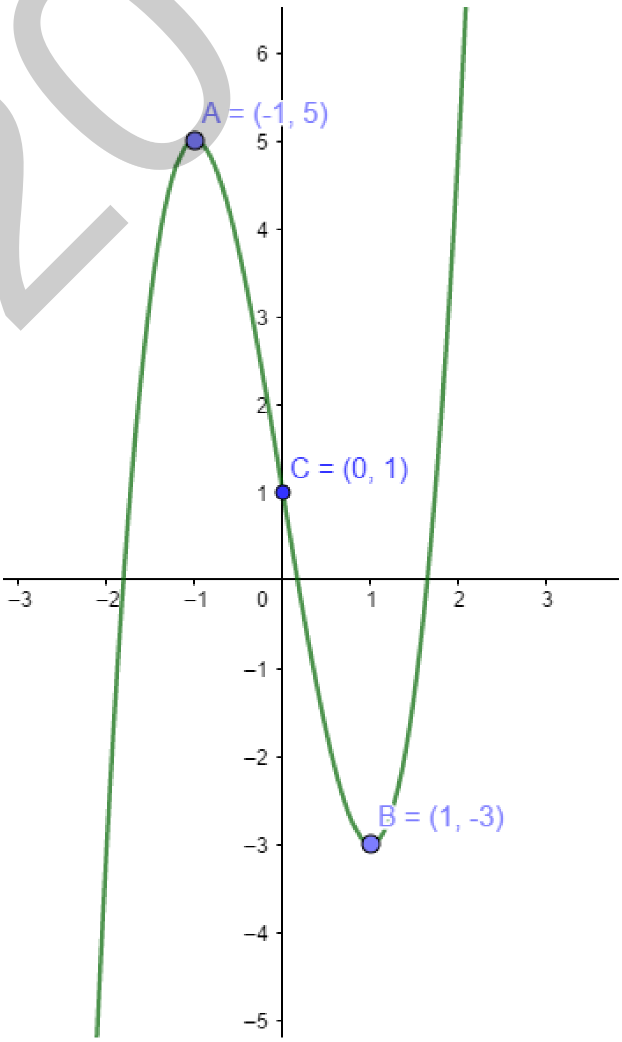
  $\Rightarrow f'(x) = 0 = 6x^2 - 6 \Rightarrow$

  $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

  - $f''(x) = 12x$

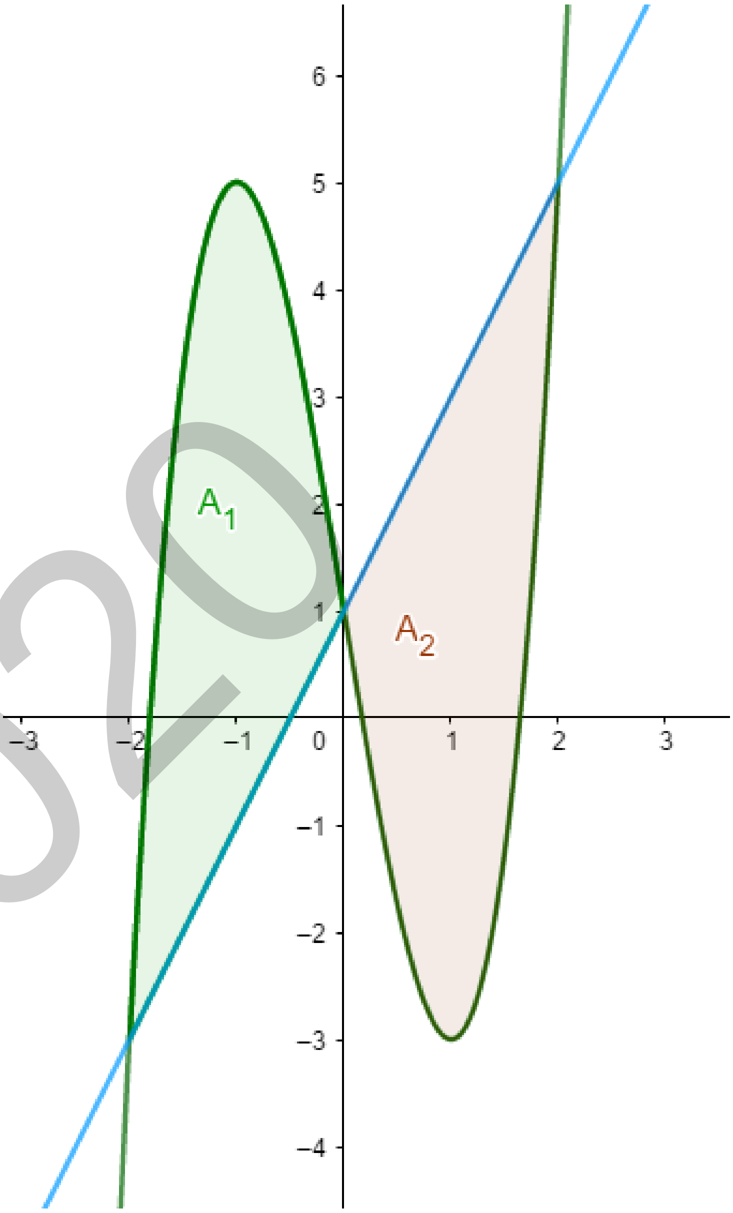
  $\Rightarrow \begin{cases} f''(1) = 12 > 0 & \Rightarrow x = 1 & \text{mínimo} \\ f''(-1) = -12 < 0 & \Rightarrow x = -1 & \text{máximo} \end{cases}$

  - $f(1) = -3 \Rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{-3})$ **mínimo**
  - $f(-1) = 5 \Rightarrow (\mathbf{-1}, \mathbf{5})$ **máximo**



- Puntos de inflexión $\Rightarrow f''(x) = 0$
  - $f''(x) = 12x \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0$
  - $f(0) = 1 \Rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ **punto de inflexión**

c) Área delimitada por $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ y $y = 2x + 1$



$f(x)$ es simétrico respecto de la recta entonces $A_1 = A_2$

Por lo tanto:

$$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot A_2 =$$

$$= 2\int_0^2 [(2x+1) - (2x^3 - 6x + 1)]dx = 2\left[\left(2\frac{x^2}{2} + x\right) - \left(\frac{2x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_0^2 =$$

$$= 2\left[x^2 + x - \frac{x^4}{2} + 3x^2 - x\right]_0^2 = 2\left[4x^2 - \frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 2(16 - 8) = \mathbf{16}\ \boldsymbol{u^2}$$

A 3 *Problema sobre cálculo de probabilidades. Probabilidad condicionada.*

	Nacidas en la ciudad	No nacidas en la ciudad	
CHICAS	0,54	0,04	**0,58**
CHICOS	0,36	0,06	**0,42**
	0,9	**0,1**	**1**

a) Probabilidad de que no sea nacida en la ciudad donde se ubica el instituto
$P\text{ (no nacida en la ciudad)} = \mathbf{0,1}$

b) Probabilidad de que sea chica y no haya nacido en la ciudad
$P\text{ (chica } \cap \text{ no nacida en la ciudad)} = \mathbf{0,04}$

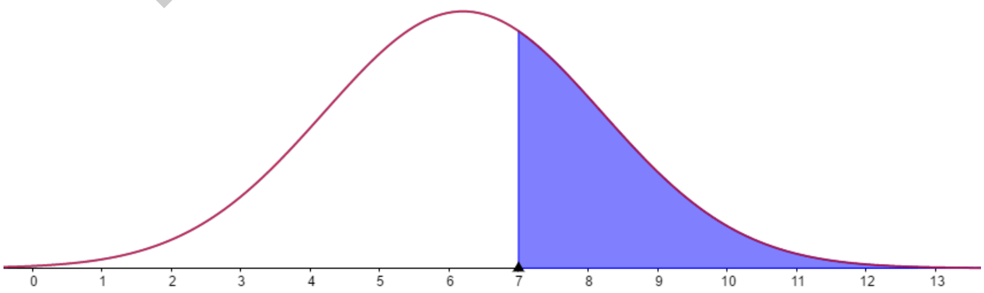
c) Se toma una persona al azar entre el alumnado y ha resultado ser nacida en la ciudad, probabilidad de que sea chico

$$P(\text{chico}|\text{ nacida en la ciudad}) = \frac{P(\text{chico} \cap \text{nacida en la ciudad})}{P(\text{nacida en la ciudad})} = \frac{0{,}36}{0{,}90} = \mathbf{0,4}$$

A 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

a) $\mathrm{X} \equiv N(\mu = 6{,}2\,,\ \ \sigma = 2)$

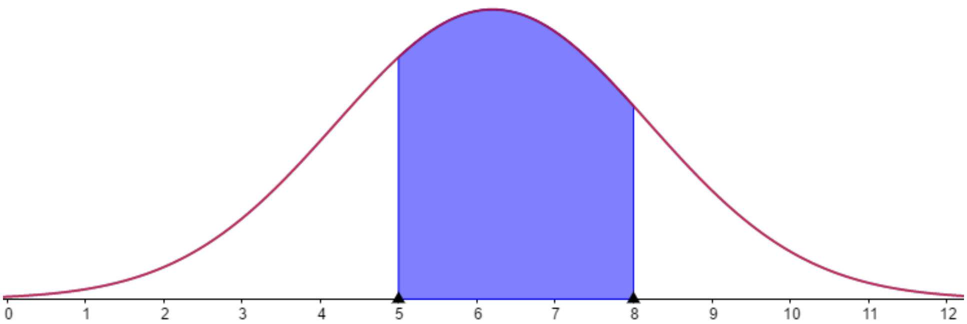
$P(X > 7) = ?$



$$P\left(\frac{X - 6{,}2}{2} > \frac{7 - 6{,}2}{2}\right) = P(Z > 0{,}4) = 1 - P(Z \le 0{,}4) = 1 - F(0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{P(X > 7)} = \mathbf{0,3446}$$

b) $P(5 \leq X \leq 8) = ?$

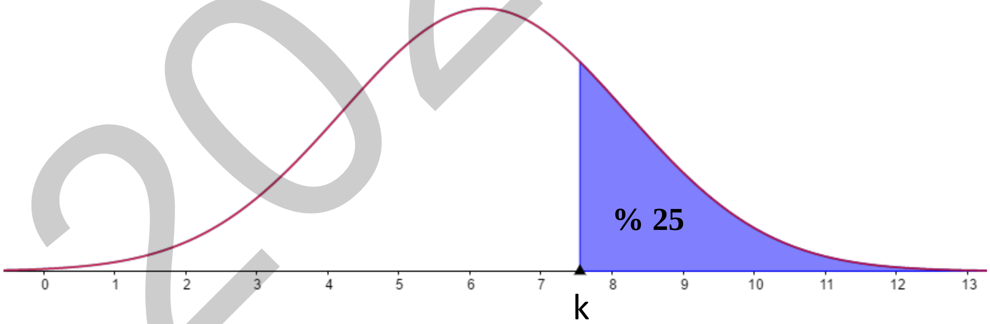


$$P(5 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{5-6{,}2}{2} \leq \frac{X-6{,}2}{2} \leq \frac{8-6{,}2}{2}\right) = P(-0{,}6 \leq Z \leq 0{,}9) = F(0{,}9) - F(-0{,}6) =$$

$$= F(0{,}9) - \left(1 - F(0{,}6)\right) = 0{,}8159 - (1 - 0{,}7257) = 0{,}5416$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(5 \leq X \leq 8) = 0{,}5416}$$

c) k tal que $P(X > k) = 0{,}25$.



$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-6{,}2}{2} \leq \frac{k-6{,}2}{2}\right) = 0{,}75$$

Entonces,

$$\frac{k-6{,}2}{2} = 0{,}675 \Rightarrow \boldsymbol{k = 7{,}55}$$

Por lo tanto, el 25 % de los alumnos y alumnas ha sacado más de **7,55 puntos** en el examen, y por lo tanto la nota mínima para obtener la calificación de sobresaliente en el examen es 7,55.

B 1 *Dimensión de una matriz. Cálculo matricial. Matriz inversa de una matriz.*

a) $(A \cdot A^t)^{-1} = ?$

- $(A \cdot A^t) = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$
- $(A \cdot A^t)^{-1} = C^{-1}$
- $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$
- $|C| = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 14 \end{vmatrix} = 6$

Entonces;

$$C^{-1} = \frac{Adj(C^t)}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-4}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{C^{-1} = (A \cdot A^t)^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\frac{7}{3}} & \boldsymbol{\frac{-4}{3}} \\ \boldsymbol{\frac{-4}{3}} & \boldsymbol{\frac{5}{6}} \end{pmatrix}$$

b) ¿La matriz ($A^t \cdot A$) tiene inversa?

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{vmatrix} = 0$ **Por lo tanto, no existe la matriz inversa.**

c) Calcular $A \cdot B$ y $A^t \cdot B$

- $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}_{2x3}}$ **y** $\boldsymbol{B \epsilon \mathcal{M}_{2x2}}$ **por lo tanto no existe** $\boldsymbol{A \cdot B}$ **.**
- $\boldsymbol{A^t \cdot B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

B 2 *Análisis de las características de una función. Representación gráfica. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas.*

a) Análisis de la función $y = 4 - x^2$.

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento

  $f(x)$ es creciente si $f^{\prime}(x) > 0$

  $f^{\prime}(x) = -2x \;\Rightarrow\; -2x > 0 \;\Leftrightarrow\; x < 0 \;\Rightarrow$ Por lo tanto, la función es creciente en el intervalo $(-\infty, \;\; 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \;\; \infty)$.
- Máximos y mínimos relativos.

- $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, en el intervalo $(-\infty, 0)$ creciente y en el intervalo $(0, \infty)$ decreciente, por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en el punto de abscisas $x = 0$.
- $f(0) = 4 \Rightarrow (0, \quad 4)$ es un máximo relativo.

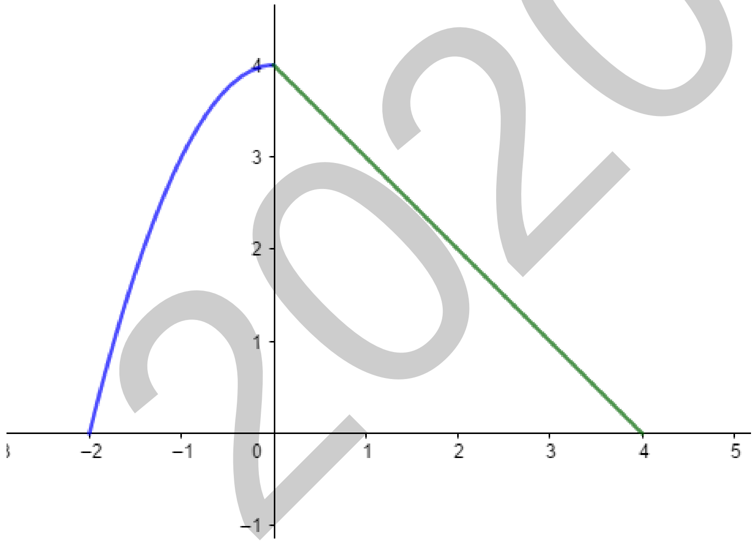
OTRA MANERA:

- $f'(x) = -2x \Rightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f''(x) = -2 \Rightarrow f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow$ En el punto de abscisas $x = 0$ hay un máximo relativo.

Por lo tanto, $(0, \quad 4)$ es un máximo relativo.

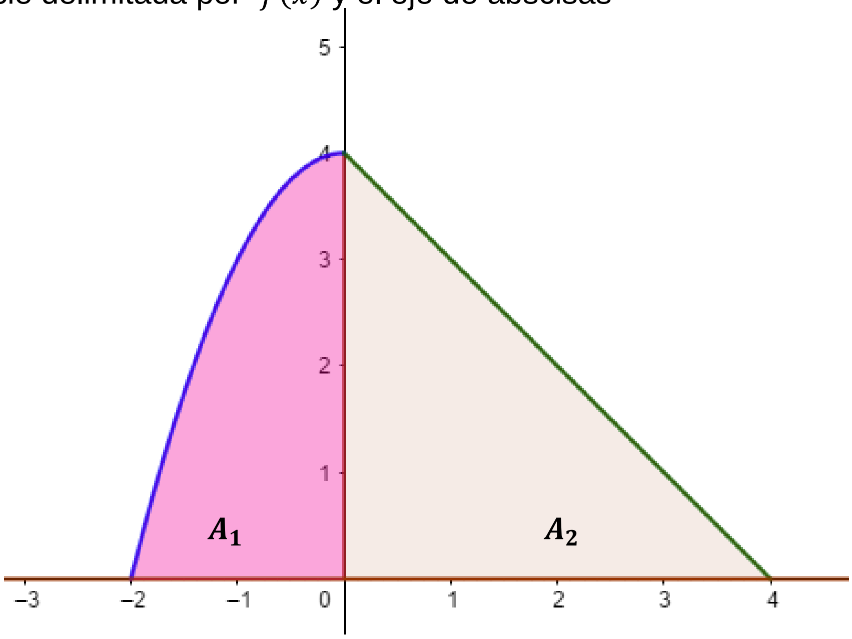
b) Representación gráfica

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si} \quad -2 \le x < 0 \\ 4 - x & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \end{cases}$$



c) Área de la superficie delimitada por $f(x)$ y el eje de abscisas

$A = A_1 + A_2$

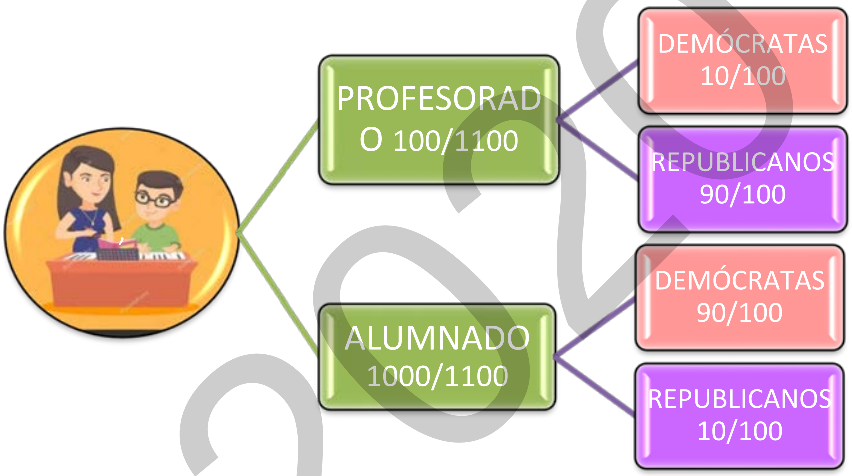


$$A_1 = \int_{-2}^{0} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left(-8 - \frac{-8}{3}\right) = \frac{16}{3}\, u^2$$

$$A_2 = \int_0^4 (4 - x)dx = \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = (16 - 8) = 8\, u^2$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{A = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + 8 = \frac{40}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A = {}^{40}\!/_{3}\ u^2}$

B 3 *Cálculo de probabilidades*; *probabilidad total y probabilidad a posteriori.*



a) A través de la probabilidad total:

$$P(\text{repub.}) = P(\text{ profesor}) \cdot P(\text{repub.}|\text{profesor}) + P(\text{alumno}) \cdot P(\text{repub.}|\text{alumno}) =$$

$$= \frac{100}{1100} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100} = \mathbf{0,1727}$$

b) Probabilidad "a posteriori"

$$P(\text{alumno}|\text{republicano}) = \frac{P(\text{ alumno} \cap \text{repub.})}{P(\text{republicano})} = \frac{P(\text{alumno}) \cdot P(\text{repub.}|\text{alumno})}{0{,}1727} = \frac{\frac{1000}{1100} \cdot \frac{10}{100}}{0{,}1727} =$$

$$= \frac{0{,}0909}{0{,}1727} = \mathbf{0,5263}$$

OTRA MANERA (tabla de contingencia)

	DEMÓCRATAS	REPUBLICANOS	
ALUMNADO	900	100	**1000**

PROFESORADO	10	90	**100**
	910	**190**	**1100**

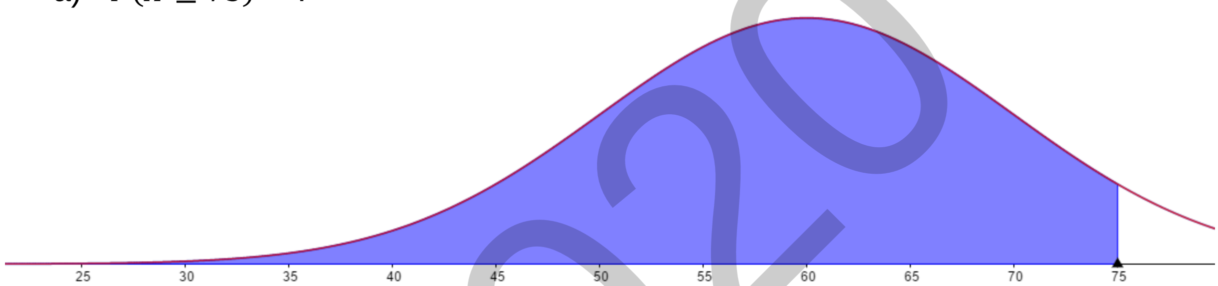
$$P(\text{republicano}) = \frac{190}{1100} = \mathbf{0,1727}$$

$$P(\text{alumno}|\text{republicano}) = \frac{P(\text{alumno} \cap \text{repub.})}{P(\text{republicano})} = \frac{100}{190} = \mathbf{0,5263}$$

B 4 *Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.*

$$X \equiv N(\mu = 60\,,\ \sigma = 10)$$

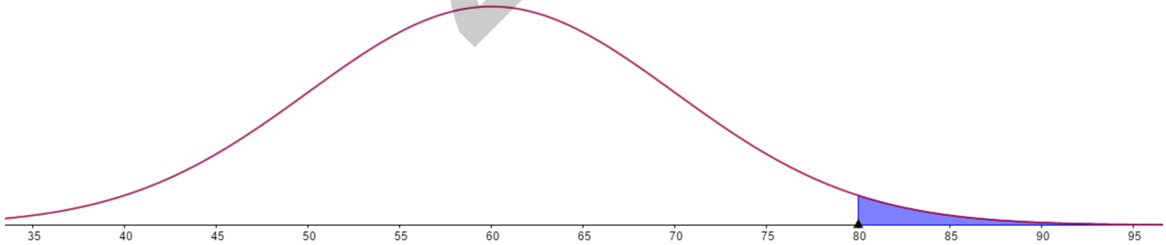
a) $P(X \leq 75) = ?$



$$P(X \leq 75) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{75-60}{10}\right) = P(Z \leq 1{,}5) = F(1{,}5) = 0{,}9332 \Rightarrow \boldsymbol{P(X \leq 75) = 0,9332}$$

Por lo tanto, el 93,32 % del alumnado terminará a tiempo el examen.

b) $P(X \geq 80) = ?$

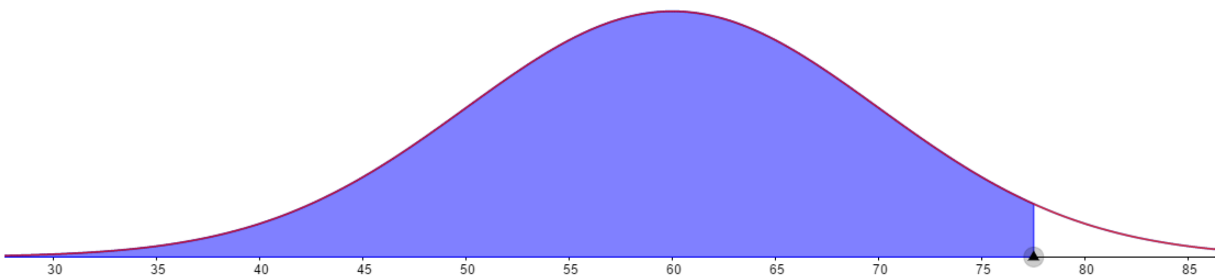


$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X-60}{10} \geq \frac{80-60}{10}\right) = 1 - P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{80-60}{10}\right) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F(2) =$$

$$= 1 - 0{,}9772 = \mathbf{0,0228}$$

Esto es, **el 2,28 % del alumnado no terminará a tiempo el examen.**

c) k tal que $P(X \leq k) = 0{,}96$.



% 96

$$P(X \leq k) = P\left(\frac{X-60}{10} \leq \frac{k-60}{10}\right) = 0{,}96 \quad \Rightarrow \frac{k-60}{10} = 1{,}75 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = 77{,}5}$$

Esto es, se tienen que dar **77,5 minutos** si se quiere que el 96 % del alumnado acabe el examen a tiempo.