eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2020

www.ehu.eus

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	*EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2020ko EZOHIKOA	*EXTRAORDINARIA 2020*
MATEMATIKA II	***MATEMÁTICAS II***

Azterketa honek BOST atal ditu, bakoitza 2,5 puntukoa. Horietako LAUri erantzun behar diezu. Atal bakoitzeko galdera bati erantzun soilik.

Jarraibideetan adierazitakoei baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezaugarri hauek dituztenak ez:

- pantailla grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera,
- ekuazioak ebazteko aukera, matrize-eragiketak egiteko aukera,
- determinatzaileen kalkulua egiteko aukera,
- deribatuak eta integralak egiteko aukera,
- datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responde a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una IJnica pregunta.

En caso de responder a mĞs preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirĞn en orden hasta llegar al nIJmero necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibildad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2020ko EZOHIKOA — EXTRAORDINARIA 2020

MATEMATIKA II — ***MATEMÁTICAS II***

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | *EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD*

2020ko EZOHIKOA | *EXTRAORDINARIA 2020*

MATEMATIKA II | ***MATEMÁTICAS II***

LEHEN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A1 Ariketa

Eztabaidatu ekuazio-sistema hau, A parametroaren balioen arabera.

$$S = \begin{cases} x + y + z = & 2A, \\ 2x + 3y + 4z = & 2, \\ 4x + 4y + Az = & 4A. \end{cases}$$

Ebatzi posiblea denean.

B1 Ariketa

Izan bedi $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea. Kalkula ezazu M^{2020}, erantzuna arrozoituz.

BIGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A2 Ariketa

Izan bitez $r = \begin{cases} 3x + y - z = & 2 \\ 2x + y + 4z = & 1, \end{cases}$ zuzena eta $\pi = 3x + (\alpha + 1)(y + 1) + \alpha z = 1$ planoa.

a) Kalkula ezazu a parametroaren balioa emandako zuzena eta planoa paraleloak izan daitezen.

b) Aztertu $P(1, 1, 2)$ puntua a) atalean aurkitutako planoan dagoen ala ez.

B2 Ariketa

Kalkula ezazu $P = (1, 2, 3)$ puntuaren $x + y + z = 0$ planoarekiko Q puntu simetrikoa, eta azaldu itzazu kalkuluak egiteko jarraitutako urratsak.

HIRUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x, & x \leq 2, \\ x^2 - bx - 4, & x > 2. \end{cases}$ funtzioa.

Jakinda f zuzen errealean deribagarria dela, kalkula ezazu, arrazoituz, a eta b parametroen balioak

B3 Ariketa

Aztertu $f(x) = x^2e^{2x}$ funtzioaren gorakortasun-eta beherakortasun-tarteak. Kalkulatu muturrak.

LAUGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A4 Ariketa

Marraztu $y = 3 - x^2$ kurbak eta $y = 2x$ zuzenak mugatzen duten eremu finitua eta kalkula ezazu eremuaren azalera.

B4 Ariketa

Azaldu zertan datzan zatikako integrazio-metodoa, eta aplikatu integral hau kalkulatzeko:

$$\int x\cos(3x)dx.$$

BOSGARREN ATALA (2,5 puntu). Bietariko bati bakarrik erantzun.

A5 Ariketa

Makina batek ontziak egiten ditu eta ontzien edukierak $N(10; 0,1)$ banaketa normal bati jarraitzen dio. Fabrikatzaile batek uste du ontzi bat akastuna dela edukiera $9,8$ eta $10,1$ artekoa ez bada. Kalkula itzazu:

a) Ontzi bat akastuntzat jotzeko probabilitatea.

b) 1500 ontzi fabrikatu badira, zenbat espero dira akastunak?

B5 Ariketa

Ikastetxe jakin batean ikasleen %40k ile gaztaina-koloreko ilea du, %35ak begi urdinak ditu eta %15ak ile marroi eta begi urdinak ditu. Zoriz ikasle bat aukeratzen bada:

a) Gaztaina-koloreko ilea badu, zer probabilitatea dago begi urdinak izateko?

b) Begi urdinak baditu, zer probabilitatea dago gaztaina-koloreko ilea ez izateko?

c) Zer probabilitatea dago ez gaztaina-koloreko ilerik ez begi urdinik ez izateko?

d) Zer probabilitate dago gaztaina-koloreko ilea edo begi urdinak izateko?

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta $2,5$ puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak -kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1.

• Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuak eztabaidatzea (Puntu bat).

• $A = 4$ kasua eztabaidatzea $(0,75$ puntu).

• $A \neq 4$ kasua eztabaidatzea $(0,75$ puntu).

B.1.

• M-ren ondoz ondoko berreturak kalkulatzea $(1,25$ puntu).

• M^{2020} kalkulatzea, erantzuna arrazoituz $(1,25$ puntu).

A.2.

• Problema planteatzea, zuzenaren bektore zuzentzailea eta planoaren bektore normala lortzea (Puntu bat).

• a-ren balioa lortzea $(0,75$ puntu).

• Egiaztatzea P puntua ez dagoela emandako planoan $(0,75$ puntu).

B.2.

• Problema planteatzea, planoarekiko perpendikularra den eta P barne duen zuzena kalkulatzea (Puntu bat).

• Planoaren eta aurreko atalean aurkitutako zuzenaren arteko ebakidura kalkulatzea (0,75 puntu).

• Planoarekiko P-ren simetrikoa den Q puntua kalkulatzea $(0,75$ puntu$)$.

A.3.

• $x = 2$ puntuan f jarraitua izateko baldintzak ezartzea (Puntu bat).

• $x = 2$ puntuan f deribagarria izateko baldintzak ezartzea (Puntu bat).

• a eta b parametroen balioak lortzea $(0,5$ puntu$)$.

B.3.

• Funtziaoren lehen deribatua kalkulatzea $(0,75$ puntu$)$.

• Funtzioaren tarte gorakorrak eta beherakorrak kalkulatzea $(0,75$ puntu$)$.

• Funtzioaren maximoa kalkulatzea $(0,5$ puntu$)$.

• Funtzioaren minimoa kalkulatzea $(0,5$ puntu$)$.

A.4.

• Eremua ondo marraztea parabolaren eta zuzenaren ebakidura modura, eta bi funtzioen ebaketa-puntuak kalkulatzea $(1,25$ puntu$)$.

• Eremuaren azalera kalkulatzea, Barrow-en erregela erabiliz $(1,25$ puntu$)$.

B.4.

• Zatikako integrazio-metodoa azaltzea $(0,75$ puntu$)$.

• J integrala zuzen kalkulatzea, azaldutako metodoa erabiliz $(1,75$ puntu$)$.

A.5.

• Ariketaren planteamendu egokia egitea $(0,5$ puntu$)$.

• a) atala zuzen ebaztea (Puntu bat).

• b) atala zuzen ebaztea (Puntu bat).

B.5.

- a) atala zuzen ebaztea ($0,5$ puntu).
- b) atala zuzen ebaztea ($0,5$ puntu).
- c) atala zuzen ebaztea ($0,75$ puntu).
- d) atala zuzen ebaztea ($0,75$ puntu).

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta $2,5$ puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares de cada uno de los problemas

A.1.

- Cálculo del determinante de la matriz y discusión para los casos que no anulan el determinante (1 punto).
- Discusión para el caso de $A = 4$ ($0,75$ puntos).
- Discusión para el caso de $A \neq 4$ ($0,75$ puntos).

B.1.

- Cálculo de las potencias sucesivas de M ($1,25$ puntos).
- Cálculo razonado de M^{2020} ($1,25$ puntos).

A.2.

• Planteamiento del problema, obtención del vector director de la recta y el vector normal del plano (1 punto).

• ObtenciŮn del valor de a ($0,75$ puntos).

• Verificar que el punto P no pertenece al plano dado ($0,75$ puntos).

B.2.

• Planteamiento del problema, cálculo de la ecuación de la recta perpendicular al plano y que contiene a P (1 punto).

• Cálculo del punto de intersección del plano y la recta hallada en el apartado anterior ($0,75$ puntos).

• Cálculo del punto punto simétrico a P ($0,75$ puntos). (1 punto).

A.3.

• Establecer las condiciones para que f sea continua en $x = 2$ (1 punto).

• Establecer las condiciones para que f sea derivable en $x = 2$ (1 punto1).

• Cńálculo correcto de los valores de a y b ($0,5$ puntos).

B.3.

• Cálculo correcto de la primera derivada ($0,75$ puntos).

• Cálculo correcto de llos intervalos de crecimiento y decrecimiento ($0,75$ puntos).

• Cálculo correcto del máximo ($0,5$ puntos).

• Cálculo correcto del mínimo ($0,5$ puntos).

A.4.

• Dibujo correcto del recinto como intersección de la parábola y la recta, y cálculo de los puntos de corte de ambas funciones ($1,25$ puntos).

• Cálculo correcto del área del recinto mediante la regla de Barrow ($1,25$ puntos).

B.4.

• Explicar en qué consiste el método de la integración por partes ($0,75$ puntos).

• Cálculo correcto de la integral J, utilizando el método anterior. ($1,75$ puntos).

A.5.

- Planteamiento correcto del ejercicio ($0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado a) (1 punto).
- Resolución correcta del apartado b) (1 punto).

B.5.

- Resolución correcta del apartado a) ($0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado b) ($0,5$ puntos).
- Resolución correcta del apartado c) ($0,75$ puntos).
- Resolución correcta del apartado d) ($0,75$ puntos).

ARIKETEN EBAZPENAK

A1 EBAZPENA

Koefiziente-matrizearen determinantea $A-4$ da. $A=4$ denean, determinantea nulua da; beraz, $A \neq 4$ denean sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da. $A=4$ denean, koefiziente-matrizearen heina 2 da, eta matrize hedatuarena 3; orduan sistema BATERAEZINA DA.

Sistemaren soluzioa hau da:
$x = \dfrac{6A^2-30A+8}{A-4}, \quad y = \dfrac{-4A^2+26A-8}{A-4}, \quad z = \dfrac{-4A}{A-4}.$

B1 EBAZPENA

$$M^2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

,

$$M^3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$M^4 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix},$$

$$M^n = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}, \text{ beraz:}$$

$$M^{2020} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2020 & 1\end{pmatrix}.$$

A2 EBAZPENA

r zuzenaren bektore zuzentzailea $(5, -14, 1)$ da, π planoaren bektore normala $(3, a+1, a)$. Eskatutakoa betetzeko, bi bektore horiek perpendikularrak izan behar dute, hau da, haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du. Orduan: $0 = (5, -14, 1)(3, a+1, a)$; beraz: $1-13a=0$, hau da, $a = 1/13$.

$P(1, 1, 2)$ puntua π planoan egoteko, honako baldintza hau bete behar da:
$3x + (1/13+1)(y+1) + 1/13z = 1.$ Beraz, P ez dago planoan.

B2 EBAZPENA

$P(1,2,3)$ puntutik pasatzen den eta planoarekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa kalkulatzen da. Zuzenaren bektore zuzentzailea emandako planoaren bektore normala da, hau da, $(1,1,1)$.
Beraz, ekuazioa hau izango da:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + t \end{cases}$$

A3 EBAZPENA

Funtzioak $x = 2$ puntuan jarraitua eta deribagarria izan behar du. Jarraitua izateko baldintza hau da: $2a + b = -3$. Deribagarria izateko baldintza hau da: $4a + b = 1$. Orduan, f deribagarria izateko, hau bete behar da: $a = 2$ eta $b = -7$. Hau da:

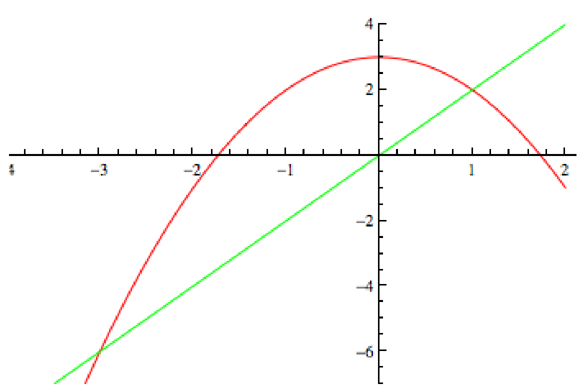
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x, & x \leq 2, \\ x^2 + 7x - 4, & x > 2. \end{cases}$$

B3 EBAZPENA

Izan bedi $f(x) = x^2e^{2x}$ funtzioa. Haren deribatua $f'(x) = 2xe^{2x}(1+x)$ da, eta $x = 0$ eta $x = -1$ denean anulatzen da. Funtzioa gorakorra da $(-\infty,\ -1) \cup (0,\ \infty)$ eremuan eta beherakorra $(-1,\ 0)$ tartean. Maximo bat du $(-1,\ 1/e^2)$ puntuan, eta minimo bat $(0,0)$ puntuan.

A4 EBAZPENA

Eskatutako eskualdea parabolak eta zuzenak mugatzen duten eremua da, $x \in (-3,1)$ izanik, zeren eta ebakitze-puntuak $(-3,-6)$ eta $(1,2)$ baitira.



Eremuaren azalera integral honen bidez kalkulatzen da:

$$\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)dx=\frac{32}{3}u^2.$$

B4 EBAZPENA

Integrala zatikako integrazio-metodoa erabiliz ebatz daiteke: $\int udv = uv - \int vdu$, non $u = x$ eta $dv = \cos(3x)dx$ diren. Aldagai-aldaketa hori aplikatuz, $du = dx$ da, eta $v = 1/3 \sin(3x)$. Beraz: $\int x\cos 3xdx = \frac{x\sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + C.$

A5 EBAZPENA

a) $P(9,8 < x < 10,1) = P((9,8-10)/0,1 < z < (10,1-10)/0,1)$
$= P(-2 < z < 1) = 0,8413 - (1-0,9772) = 0,8185.$
Ontzi bat akastuntzat jotzeko probabilitatea 1- 0,8185 = 0,1815 da.

b) $0,1815{,}1500 = 272,25$; hau da, 273 ontzi.

B5 EBAZPENA

Izan bitez gertaera hauek: C = Gaztaina-koloreko ilea izatea, C' = Gaztaina-koloreko ilea ez izatea, A = Begi urdinak izatea, eta A' = Begi urdinak ez izatea.

a) $P(A/C) = 15/40.$

b) $P(C'/A) = 20/35.$

c) $P(C' \cap A') = 40/100.$

d) $P(C \cup A) = P(C) + P(A) - P(C \cap A) = 40/100 + 35/100 - 15/100 = 60/100 = 0,6.$