

eman ta zabal zazu



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

Matematika II

USE 2019

www.ehu.es





***Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.***

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Kalkulagailuak erabil daitezke baina ezin ditu izan ondoko ezaugarriak:
pantaila grafikoa, datuak igortzeko aukera, programatzeko aukera, ekuazioak ebazteko aukera, matrize eragiketak egiteko aukera, determinanteen kalkulua egiteko aukera, deribatuak eta integralak egiteko aukera, datu alfanumerikoak gordetzeko aukera.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:
pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.



A AUKERA

A1 Ariketa

Eztabaidatu honako ekuazio-sistema hau, A -ren balioen arabera.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + Az = A \end{cases}$$

A2 Ariketa

Aurkitu $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$ planoarekiko paraleloa den eta $P(1, 0, 0)$ puntutik pasatzen den zuzen **baten** ekuazioa. Zuzen bakarra al da? Erantzuna arrazoitu.

A3 Ariketa

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ funtzioa,

- Aurkitu A , B eta C parametroen balioak, $P(0, 1)$ puntua f -ren grafikoan egon dadin eta f -k minimo lokal bat izan dezan $Q(2, 0)$ puntuan.
- Atera duzun funtzioak ba al du beste maximo edo minimo lokalik?

A4 Ariketa

Izan bedi $y = x(3 - x)$ eta $y = x^2$ kurbek mugatzen duten R eremua. Marraztu R , eta kalkula ezazu haren azalera.

A5 Ariketa

Kutxa batek 3 txanpon ditu: R , L eta M . R txanpona arrunta da, L txanponak aurpegia du bi aldeetan, eta M txanpona trukatuta dago: aurpegia ateratzeko probabilitatea $1/5$ da. Zoriz aukeratutako txanpona jaurtitzen dugu.

- Kalkula ezazu aurpegia ateratzeko probabilitatea.
- Gurutzea atera bada, zein da R txanpona izateko probabilitatea?



B AUKERA

B1 Ariketa

Izan bedi 3×3 dimentsioko matrize bat, zeinaren determinateak 5 balio duen. Matrize horretan honako eragiketa hauek egiten ditugu:

- lehengo eta bigarren errenkadak beren artean aldatzen ditugu,
- hirugarren zutabea -2 -rekin biderkatzen dugu,
- matrize osoa 2 -rekin biderkatzen dugu eta
- matrizea iraultzen dugu.

Kalkula ezazu, arrazoituz, lortutako matrizearen determinantea.

B2 Ariketa

Izan bitez

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

zuzena, eta r zuzenaren parte ez den $P(1, 2, 5)$ puntua. Aurkitu r eta P hartzen dituen planoaren ekuazioa.

B3 Ariketa

Aztertu $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak eta f -ren muturrak. Egin ezazu f -ren adierazpen grafikoa.

B4 Ariketa

Kalkula ezazu $\int \frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} dx$ eta azaldu kalkulurako erabili duzun metodoa.

B5 Ariketa

500 ikasleen artean egindako froga baten emaitzek banaketa normal bati jarraitzen diote batez bestekoa 40 puntu izanik eta desbideratze tipikoa 10 puntu.

- Ikasleen zer portzentajeak du 30 eta 60 bitarteko puntuazioa?
- Zenbat ikaslek izango dute 60 puntu baino gehiago?



MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
4. Zenbakizko akatsak -kalkuluetan egindakoak eta abar- ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikustarazten dituzten ideiak, eske-mak, grafikoak, aurkezpenak etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1.

- Matrizearen determinantea kalkulatzea eta determinantea nulua ez den kasuetan eztabaidatzea (puntu bat).
- $A = -18$ kasua eztabaidatzea (puntu bat).

A.2.

- Problema planteatzea eta planoaren zuzen paraleloa lortzea (puntu bat).
- Eskatutako galderari zuzen erantzutea (puntu bat).

A.3.

- Baldintza guztiak planteatzea eta A , B eta C parametroen balio zuzenak lortzea (puntu bat).
- Eskatutako galderari zuzen erantzutea (puntu bat).



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

A.4.

- Eremua bi parabolaren ebakidura gisa modu egokian marraztea eta parabola horien ebakipuntuak kalkulatzeko (puntu bat).
- Eremuaren azalera kalkulatzeko Barrow-en erregela erabiliz (puntu bat).

A.5.

- Problema ondo planteatzea (0,5 puntu.)
- a) atala ebaztea (0,75 puntu.)
- b) atala ebaztea (0,75 puntu.)

2019



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B AUKERA

B.1.

- Determinanteen propietateak zuzen erabiliz, eskatutako atal bakoitzari modu egokian erantzutea (0,5 puntu atal bakoitza).

B.2.

- Problema planteatzea: zuzenaren norabide-bektorea eta planoaren bektore normala lortzea (puntu bat).

- P puntua eta r zuzena hartzen dituen planoaren ekuazioa lortzea (puntu bat).

B.3.

- Gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak modu egokian lortzea (0,75 puntu).

- Puntu kritikoak lortzea (0,5 puntu).

- Funtzioaren grafikoak zuzen marraztea (0,75 puntu).

B.4.

- Integral arrazionala integral txikitan deskonposatzea (puntu bat).

- Bi integralak ondo kalkulatzeko (puntu bat).

B.5.

- a) atala ebaztea (puntu bat).

- b) atala ebaztea (puntu bat).



A AUKERA

EBAZPENA A1

Koefiziente-matrizearen determinantea $-A - 18$ da. $A \neq -18$ rako sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da. Bestalde, $A = -18$ denean, koefiziente-matrizearen heina 2 da eta matrize zabalduarena 2 ere bai; beraz sistema BATERAGARRI IN-DETERMINATUA da.

EBAZPENA A2

Eskatutako zuzenak bi baldintza bete behar ditu: lehen, $P(1, 0, 0)$ puntutik pasatzea eta bigarrena, zuzen horren norabide-bektorea emandako planoaren bektore normalaren perpendikularra izatea. Planoaren bektore normala $(1, 2, 3)$ da, eta bektore normal horren bektore perpendikular bat $v = (2, -1, 0)$ izan daiteke. Orduan, eskatuako zuzenaren ekuazioa $z = 1 + 2t, y = 0 - t, z = 0$ da.

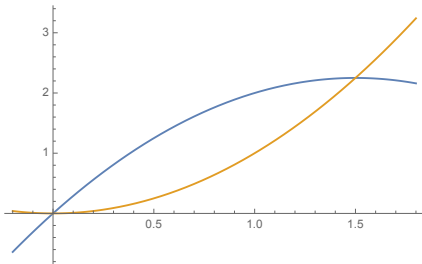
$(1, 2, 3)$ -rekiko infinitu bektore perpedikular existitzen direnez, infinitu zuzen existitzen dira. Hau da, $x + 2y + 3z = 1$ planoan dauden eta $P(1, 0, 0)$ puntutik pasatzen diren zuzen guztiak dira.

EBAZPENA A3

Emandako baldintzak kontuan hartuta, $A = -\frac{15}{4}$, $B = 3$ eta $C = 1$ izango dira, eta orduan $f(x) = x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 3x + 1$. $f(x)$ -ren deribatua $3x^2 - \frac{15}{2}x + 3$ nulua da $x = 2$ eta $x = 1/2$ denean. Funtzioak $x = 2$ -an minimoa du eta $x = 1/2$ denean maximoa.

EBAZPENA A4

Parabolen ebakipuntuak $(0, 0)$ eta $(3/2, 9/4)$ dira. Eskatutako eremua honako hau da:



Eremuaren azalera integral definitu hau da:

$$\int_0^{3/2} (x(3-x) - x^2) dx = 9/8.$$



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

EBAZPENA A5

Probabilitate baten kalkulua, zuhaitz diagramaren bidez eta probabilitate baldintzatuaren bidez ebazten dena.

Gertaerak honako hauek dira:

- R , R txanpona ateratzea,
- L , L txanpona ateratzea,
- M , M txanpona ateratzea,
- C , Aurpegia izatea eta + gurutzea izatea.

Orduan :

a)

$$P(C) = P(R)P(C/R) + P(L)P(C/L) + P(M)P(C/M) = 1/6 + 1/3 + 1/15 = \frac{17}{30}$$

b)

$$P(R/+) = \frac{P(R)P(+/R)}{P(+)} = \frac{1/6}{13/30} = \frac{5}{13}$$



B AUKERA

EBAZPENA B1

- 1) Matrize baten bi errenkada (edo zutabe) trukutzen baditugu, determinanteak zeinua aldatuko du.
- 2) Matrize baten zutabe bateko (edo errenkada bateko) elementu bakoitza zenbaki batekin biderkatzen badugu, matrize horren determinantea ere bider zenbaki horrekin biderkatu behar dugu.
- 3) Aurreko propietatea erabiliz eta 3×3 matrizea izanik, determinantea $2^3 = 8$ -rekin biderkatu behar dugu.
- 4) Matrize baten determinantea bat dator bere matrize irauliarekin.

Orduan, azken matrizearen determinantea 80 da.

EBAZPENA B2

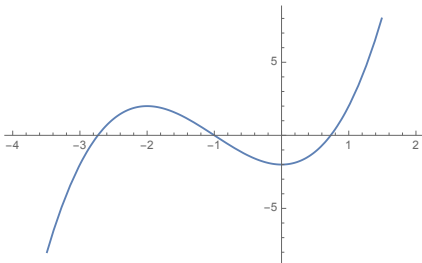
Eskatutako zuzena plano sorta honetan dago:

$$(2x - y) + \lambda(3y - 2z) = 0$$

$(1, 2, 5)$ puntutik pasatzeko, $\lambda = 0$ izan behar da; beraz, eskatutako planoaren ekuazioa $2x - y = 0$ da.

EBAZPENA B3

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ izanik, haren deribatua $f'(x) = 3x^2 + 6x$ nulua da $x = 0$ eta $x = -2$ denean. Funtzioa gorakorra da $(-\infty, -2)$ eta $(0, \infty)$ tartean eta beherakorra $(-2, 0)$ tartean. Funtzioak $x = -2$ -an minimoa du eta $x = 0$ -n maximoa.



EBAZPENA B4

Funtzioa honela deskonposatu dugu: $\frac{8x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$.

Azken adierazpenean eragiketak eginda: $A = -1/2$ eta $B = 17/2$ balioak lortzen ditugu.



Universidad
del País Vasco

Euskal Herriko
Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

Azkenik,

$$\int \frac{8x + 7}{(x + 1)(x + 3)} dx = -1/2 \ln(x + 1) + 17/2 \ln(x + 3) + C.$$

EBAZPENA B5

a)

$$P(30 < x < 60) = P((30 - 40)/10 < z < (60 - 40)/10) = \\ P(-1 < z < 2) = 0,9772 - (1 - 0,8413) = 0,8185$$

b)

$$P(x > 60) = P(z > (60 - 40)/10) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Hau da, ehuneko 2,28 edo balio horren baliokidea $(0,0228) \cdot (500) \equiv 12$ ikasle.