eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco

Euskal Herriko Unibertsitatea

Matematika II

USE 2018

www.ehu.eus

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.

Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.

Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

El examen consta de cinco ejercicios.

Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.

Solamente se podrán usar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 Ariketa

Kalkulatu honako matrize honen heina a parametroaren arabera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & a & 4 & 0 \\ -1 & 3 & a & -2 \end{pmatrix}$$

A2 Ariketa

Izan bitez $A(3,3,3)$, $B(2,3,4)$, $C(0,0,4)$ eta $D(3,0,1)$ puntuak.

a) Plano berean daude? Erantzuna baiezkoa bada, eman planoaren ekuazioa. Ezezkoa bada, arrazoitu erantzuna.

b) Kalkulatu a-ren balioa $P(a,a,8)$ puntua A eta C puntuetatik pasatzen den zuzenean egon dadin.

A3 Ariketa

Izan bedi f honako funtzio hau:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2, & x \leq 1 \\ \frac{2}{ax}, & x > 1. \end{cases}$$

Aztertu f-ren jarraitutasuna eta deribagarritasuna a parametroaren arabera.

A4 Ariketa

Kalkula ezazu honako integral ez-mugatu hau:

$$\int \frac{2x-1}{x(x+1)^2} dx$$

A5 Ariketa

x eta y zenbaki positibo guztien artean, zeinetarako $x + y = 10$ den, aurki itzazu horiek non $P = x^2\, y$ biderkadura maximoa den.

B AUKERA

B1 Ariketa

$S(a)$ sistema hau emanda:

$$S(a) = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (a+1)y - az = 2a \\ x + ay + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

a) Eztabaidatu sistema a parametroaren arabera.

b) Soluziorik al dago $a = 2$ baliorako? Erantzuna baiezkoa bada, kalkulatu soluzioa. Ezezkoa bada, arrazoitu erantzuna.

B2 Ariketa

Eman $P(2, -1, 2)$ puntua eta $r \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ zuzena dituen planoaren ekuazioa.

B3 Ariketa

$f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-4}$ funtzioa emanik:

a) Kalkulatu f-ren asintotak.

b) Adierazi zer tartetan den gorakorra eta zer tartetan beherakorra.

c) Muturrik al du f funtzioak? Horrela balitz, zein puntutan?

B4 Ariketa

Marraztu $y = e^x$, $y = e^{-x}$ kurbek eta $x = 1$ zuzenak mugatzen duten planoko eremua. Kalkulatu haren azalera.

B5 Ariketa

Izenda ditzagun P, 1001 baino txikiagoak diren zenbaki bikoiti guztien batura, eta T, 1001 baino txikiagoak diren 3 zenbakiaren multiploen batura. Zenbat balio du $P - T$?

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK.

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak eta abar ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ARIKETA (2 puntu)

- Matrizearen heina aztertzea determinanteak kalkulatuz (1,5 puntu)
- Matrizearen heinaren eztabaida zuzen amaitzea eta azken emaitza idaztea (0,5 puntu)

A.2 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea: hiru puntu dauzkan planoa lortzea eta egiaztatzea beste puntua lortutako planoan dagoela (1 puntu)
- *a* parametroaren balioa zuzen kalkulatzea puntua *AC* zuzenean egon dadin (1 puntu)

A.3 ariketa (2 puntu)

- *a* parametroa eztabaidatzea funtzioa jarraitua izan dadin $x = 1$ puntuan (1 puntu)
- *a* parametroa eztabaidatzea funtzioa deribagarria izan dadin $x = 1$ puntuan (1 puntu)

A.4 ariketa (2 puntu)

- Integral arrazionala integral arrazional txikitan deskonposatzea (1 puntu)
- Hiru integralak ondo kalkulatzea (1 puntu)

A.5 ariketa (2 puntu)

- Problema planteatzea (1 puntu)
- Soluzio zuzena lortzea (1 puntu)

B AUKERA

B.1 ARIKETA (2 puntu)

- *A* matrizearen determinantea kalkulatzea, eta eztabaidatzea kasuak non determinantea ez den nulua (0,75 puntu)
- $a = 0$ eta $a = 1$ kasuak eztabaidatzea (0,75 puntu)
- $a = 2$ kasurako ebaztea (0,5 puntu)

B.2 ariketa (2 puntu)
Modu bat baino gehiago daude problema ebazteko. Ohikoena hiru puntutatik pasatzen den planoa kalkulatzea da. Dena den, emaitza zuzena ematen duen beste edozeinek balio du.

- Problema planteatzea, eta zuzenaren bi puntu lortzea (0,75 puntu)
- Hiru puntuetatik pasatzen den planoa lortzea (1,25 puntu)

B.3 ariketa (2 puntu)

- Funtzioaren deribatua ondo kalkulatzea (0,5 puntu)
- Puntu kritikoak eztabaidatzea eta lortzea (0,5 puntu)
- Goratze-tarteak lortzea (0,5 puntu)
- Asintotak lortzea (0,5 puntu)

B.4 ariketa (2 puntu)

- Ondo marraztea esparrua bi grafikoen eta $x = 1$ zuzenaren arteko ebakidura gisa (1 puntu)
- Esparruaren azalera lortzea Barrow-ren erregela aplikatuz (1 puntu)

B.5 ariketa (2 puntu)

- Problema metodoa arrazoituz planteatzea
- *P* ondo kalkulatzea (0,75 puntu)
- *T* ondo kalkulatzea (0,75 puntu)
- $P - T$ ondo kalkulatzea (0,5 puntu)

A AUKERA

EBAZPENA A1

Matrizearen heinak 3 edo txikiagoa izan behar du, jakina, eta, zero ez diren 2 ordenako determinante batzuk badaudenez, egiaztatuko da *A*-ren heina 2 edo handiagoa dela.

Aztertuko dugu ea 3 heinekoa izan daitekeen. Kasu honetarako, determinante hauek eratu daitezke:

$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \boldsymbol{a^2+4a-12}$, zerora berdinduta, hau emango digu: $a = -6$ eta $a = 2$

Bigarren determinantea hau da: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-2a+2a=0}$.

Hirugarren determinantea hau da: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \boldsymbol{-8+8=0}$.

Laugarren eta azken determinantea hau da: $\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \boldsymbol{a} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$; zerora berdinduta, hau

emango du:

$a = -6$ eta $a = 2$

Konklusioak:

1) Baldin eta $a = -6$ edo $a = 2$, lau determinanteak zero dira eta *A*-ren heina, berriz, 2.
2) Baldin eta a -6 eta 2 <u>ez bada</u>, *A*-ren heina 3 izango da.

EBAZPENA A2

a) eta b) Bai, plano berean daude. Kalkula daiteke *A*, *B* eta *C* puntuak dauzkan planoa hau dela: $3x - 2y + 3z = 12$; beraz, D(3,0,1) puntua plano horretakoa da, zeren eta ekuazio hori betetzen baitu. Izan ere: 3(3) – 2(0) + 3(1) = 12

c) A-tik eta C-tik pasatzen den zuzena, koordenatu parametrikotan adierazia, hau da: (–3t, –3t, t+4)

P(*a*,*a*,8) puntuak ekuazioa beteko badu, hau bete behar da:

–3t = *a* eta, gainera, *t* + 4 = 8; beraz, *t* = 4 eta *a* = –12. Puntua, horrenbestez, hau izango da: *P*(–12,–12, 8)

EBAZPENA A3

Argi denez, funtzioa ez da jarraitua a = 0 denean. a ≠ 0 bada, funtzioa *x* = 1 puntuan jarraitua izango bada (zeren eta gainerako puntuetan ez baitago arazorik), hau bete behar da: $3-a=2/a$. Hortik, hau dugu: $a^2-3a+2=0$; beraz, *a*-ren soluzioak hauek dira: *a* = 2 eta *a* = 1.

Funtzioa *x* = 1 puntuan deribagarria izango bada, jarraitua izan behar du puntu horretan; gainera, funtzioak puntu horretan eskuinetik eta ezkerretik dituen albo-deribatuek berdinak izan behar dute. Beraz, hau bete behar da:

x = 1 punturako, albo-deribatuek berdinak izan behar dute: $\frac{-2}{ax^2}=-2ax$. Eta,

ebatzita, hau ateratzen da: *a* = ±1.

Beraz, *x* = 1 puntuan deribagarria izango da baldin eta *a* = 1.

EBAZPENA A4

Integral arrazional bat da. Ebazteko, integral txikitan deskonposatu behar dugu. Hau betetzen denez:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

Sistema ebatzita, balio hauek lortzen dira: *A* = –1, *B* = 1 eta *C* = 3.

Horrenbestez, eskatutako integrala hau izango da:

$$\int\frac{2x-1}{x(x+1)^2}dx=-ln(x)+ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+C$$

EBAZPENA A5

Problema aztertuta, bi ekuazio hauek planteatzen dira:

$$x+y=10$$
$$P=y.x^2$$

Eta hortik: $\boldsymbol{P = 10x^2 - x^3}$. *P*(*x*) funtzioaren deribatuak zero balio duenean lortuko da maximoa. Hau da: $\boldsymbol{P' = 20x - 3x^2 = 0}$

Ebatzita, hau ateratzen da: *x* = 0 eta *x* = 20/3. Ikus daiteke *x* = 20/3 denean lortzen dela maximoa (horretarako, egiaztatu behar da 20/3 puntuan *P*-ren bigarren deribatua negatiboa dela). Beraz, soluzioa hau da: *x* = 20/3.

B AUKERA

EBAZPENA B1

a) *A* eta *A´* matrizeak hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & a+1 & -a \\ 1 & a & a+1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & a+1 & -a & 2a \\ 1 & a & (a+1) & 1 \end{pmatrix}$$

A-ren determinantea 2a(a-1) da; zerora berdinduta: *a* = 0, *a* = 1. Beraz:

- 0 edo 1 <u>ez den</u> edozein *a* zenbaki errealetarako, sistema bateragarri determinatua da.
- *a* = 0 denean, hein(A)≠ hein(A´); beraz, BATERAEZINA da
- *a* = 1 denean, hein(A)= hein(A´), eta sistema bateragarri indeterminatua da.

b) *a* = 2 denean, sistemak soluzio bakarra du: *x* = –7/4, *y* = 7/4, *z* = –1/4.

EBAZPENA B2

r zuzena, parametrikotan adierazia, hau da: (2t, 3+t, 1-t)

Planoa kalkulatzeko, lerrokatu gabeko hiru puntu behar dira. Garbi dago *P* puntua ez dagokiola zuzenari. Kalkula ditzagun zuzenaren bi puntu; adibidez, *t* = 0 denean, zuzenaren puntu bat lortuko dugu. Kalkulatuz: *A*(0,3,1). *t* = 1 kasurako, *B*(2, 4, 0) puntua lortuko dugu.

Beraz, eskatutako planoa *A*, *B* eta *P*(2,-1, 2) puntuetatik pasatzen dena izango da.

Hau da: 3*x* + 4*y* + 10*z* = 22.

EBAZPENA B3

a) Asintota bertikalak *x* = 2 eta *x* = –2 dira.

Asintota horizontalak $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3}{x^2-4} = 1}$ kalkulatuz lortzen dira. Beraz, asintota horizontala *y* = 1 izango da.

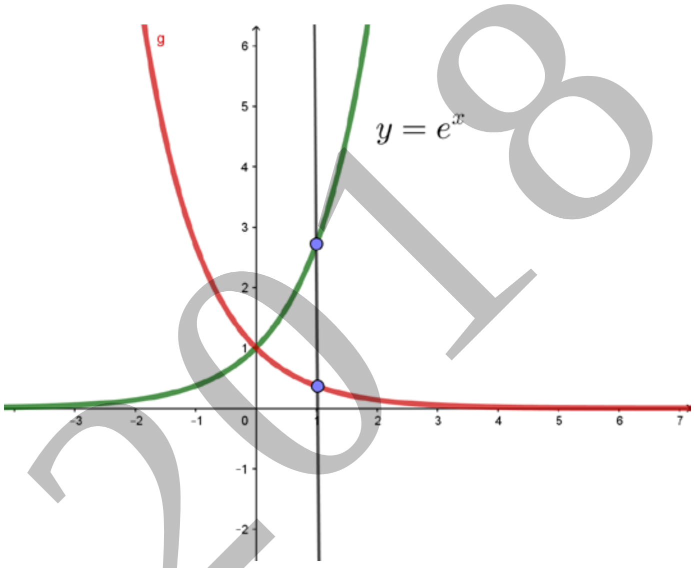
Ez du asintota zeiharrik.

b) Goratze- edo beheratze-tarteak kalkulatzeko funtzioa deribatua behar da eta $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$ lortzen da. Beraz, gorakorra izango da $(-\infty,-2)$ eta $(-2,0)$ tarteetan, eta beherakorra $(0,2)$ eta $(2,\infty)$ tarteetan.

c) $x = 0$ puntuan, funtzioak maximo erlatibo bat du; P(0,3/4) puntua da.

EBAZPENA B4

Marrazkiko bi funtzioek eta $x = 1$ zuzenak mugatuta dago eskualdea.



Azalera kalkulatzeko, Barrow-ren formula erabiliko dugu.

$A = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = \left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$, unitate karratutan.

EBAZPENA B5

Hauek dira batuketak:

- Bikoitiena hau da: P = 2 + 4 +…+ 1000 (500 zenbaki dira) = 250.500
- Hiruren multiploena hau da: T = 3 +…+ 999 (333 zenbaki dira) = 166.833.

Beraz, P – T = 83.667.