eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

EAU 2018

www.ehu.eus

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

2018ko UZTAILA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALAUCIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.

Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Kalkulagailu zientifikoak erabil daitezke, programagarriak ez badira.
- Orri honen atzealdean, banaketa normalaren taula dago.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.
- La tabla de la distribución normal está en el reverso de esta hoja.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco | Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA

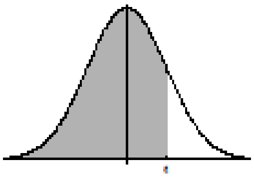
2018ko UZTAILA

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EVALAUCIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad G (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, 2/3 de la de queroseno K, donde $K \geq 0$; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

a) Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
b) La función $F(G,K) = 8G+5K$ representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función del los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

A 2 *(hasta 3 puntos)*
Dada la función $h(x) = a + Ln(x) - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, donde la función $Ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x. Responder:

a) ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1)=-1$?
b) Dada la función $f(x) = 4 + Ln(x) - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo $0.01 \leq x \leq 3$, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $xf'(x) = 0$)

A 3 *(hasta 2 puntos)*
Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90% de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70%. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

a) Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?
b) Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?
c) Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?

A 4 *(hasta 2 puntos)*
En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entre la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

a) El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94%.
b) ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea $\leq$ 0’02, con un nivel de confianza del 94%?

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

a) Calcular los parámetros *a, b, c, d* para que se cumpla la igualdad $\mathrm{F}\cdot\mathrm{G} = \mathrm{H}\cdot\mathrm{K}$, con las siguientes matrices:

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

b) Determinar el exponente *n* de la matriz A para que se cumpla:

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B 2 *(hasta 3 puntos)*

La siguiente función *f(x)*, mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número ($x \geq 1$) de antenas instaladas:

$$f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x.$$

a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.
b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

B 3 *(hasta 2 puntos)*

De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en paro.

a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?
b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?

B 4 *(hasta 2 puntos)*

Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución N= (μ, 75). Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza (188'18, 208'82) para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99%. Calcular:

a) La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.
b) El error máximo cometido en la estimación de la media μ, si se hubiese utilizado una muestra de tamaño n=500 y el nivel de confianza es del 96%.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Sistema de puntuación

La puntuación total de la prueba estará entre 0 y 10 puntos.
Cada uno de los dos primeros problemas se valorará de 0 a 3 puntos, y cada uno de los dos últimos de 0 a 2 puntos.
Cuando un problema conste de varios apartados, todos ellos se valorarán por igual.
En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.

Aspectos que merecen valoración positiva

- Los planteamientos correctos.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

Aspectos que merecen valoración negativa

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

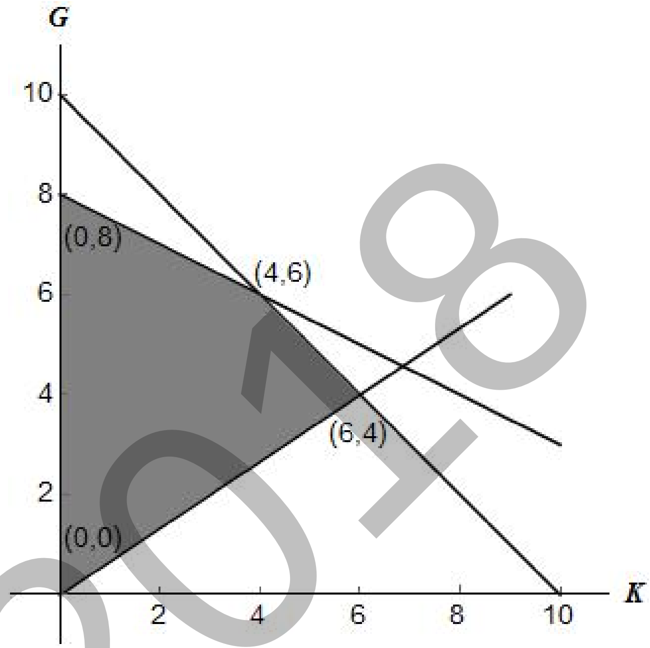
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 *Problema de programación lineal en dos variables. Interpretación:*

a) Recinto de soluciones compatibles en el plano KG:



b) El trayecto más largo que se puede realizar es de 68km eligiendo G=6 y K=4.

A 2 *Cálculo de los parámetros de una función. Cálculo de valores de una función y de sus máximos y mínimos:*

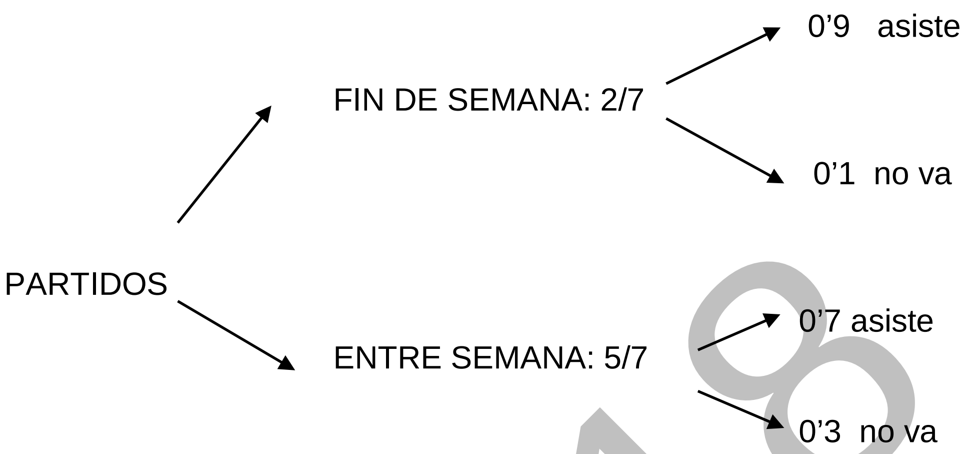
a) $h(1) = -1 \Rightarrow a + Log(1) - 6 + 2 = -1 \Rightarrow a = 3.$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - 6 + 4x \Rightarrow 0 = xf'(x) = 1 - 6x + 4x^2 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.19, \\ x = 1.31. \end{cases}$

$f(0.19) = 1.271$ (máximo local), $f(1.31) = -0.158$ (mínimo local).

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

A 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional:*



a) P = 0’1
b) P= 2/7 · 0’9 +5/7 · 0’7 =5’3/7 = 0’757
c) P= 2/7 · 0’9 / (2/7 · 0’9 + 5/7 · 0’7)= 1’8 / 5’3 = 0’339

A 4 *Cálculo de un intervalo de confianza para la proporción de una población:*

a) n = 500 175 hembras y $n_c = 0'94$

$$\hat{p} = \frac{175}{500} = \frac{7}{20} = 0'35 \qquad \hat{q} = \frac{13}{20} = 0'65$$

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'94}{2} = 0'970 \Rightarrow \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'885$

$$\text{I.C.} \equiv \left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$\left(0'35 - 1'885 \cdot \sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{500}}, 0'35 + 1'885 \cdot \sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{500}}\right) = (0'31, 0'39)$$

b) error = 0’02 por tanto, $0'02 = 1'885 \cdot \sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{n}} \Rightarrow n = 2021$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

OPCIÓN B

B 1 *Ejercicio de cálculo matricial:*

a) $\mathrm{F}\cdot\mathrm{G}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{K}$: $\begin{pmatrix} -6-2a+2b & -2+a-b+d \\ -2b & 5+b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2a-b & -2+4a \\ -2b-c & -6+2c \end{pmatrix}$

Ordenando las igualdades adecuadamente: $\begin{cases} -6-2a+2b=-2-2a-b \rightarrow b=1, \\ -2b=-2b-c \rightarrow c=0, \\ 5+b-d=-6+2c \rightarrow d=12, \\ -2+a-b+d=-2+4a \rightarrow a=11/3. \end{cases}$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{A}^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow (\mathrm{A}^2)^k=\begin{pmatrix} -2^k & 0 \\ 0 & -2^k \end{pmatrix}$

$-2^k=-2048 \Rightarrow k=11$ luego n =22.

B 2 *Cálculo de valores y de máximos y mínimos de una función. Interpretación:*

a) $f(x)=100-\frac{98}{x}-2x \Rightarrow f'(x)=\frac{98}{x^2}-2.\ f'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt{49}=7$

x=7 es el máximo ya que $f''(7)<0.\ f(x)=72$

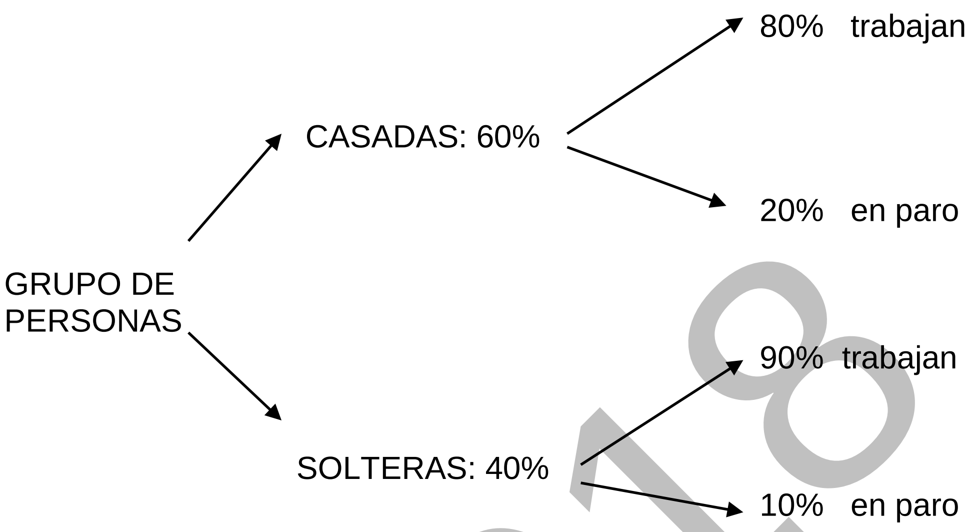
b) Puntos de corte entre $f(x)$ y el eje OX: $f(x)=100-\frac{98}{x}-2x=0.$

Multiplicando la ecuación por (–x) y dividiendo entre 2: $x^2-50x+49=0$

$x=\frac{50\pm\sqrt{50^2-4\cdot 50}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ x=49. \end{cases}$ Luego si 1 ≤ x ≤ 49 entonces $f(x)$ ≥ 0.

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

B 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional:*



a) P(Trab/casada) = 0’6 · 0’8 / (0’6 · 0’8 + 0’4 · 0’9) = 0’48 /(0’48 + 0’36) = 4/7 = 0’571

b) P(parada/casada) = 0’6 · 0’2 / (0’6 · 0’2 + 0’4 · 0’1) = 0’12 /(0’12 + 0’04) = 3/4 = 0’75

B 4 *Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal:*

a) σ= 75 I.C.= (188’18, 208’82) n_c= 99%

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'99}{2}$ = 0’9950 => $Z_{\frac{\alpha}{2}} =$ 2’575

$$(188'18,\ 208'82) = \left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN
ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 188'18 \\ \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 208'82 \end{array}\right\} \quad 2\,\bar{x} = 397'00 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 198'5$$

Cálculo del tamaño de la muestra: de la expresión $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 208'82$, obtenemos:

$$\sqrt{n} = 2'575 \cdot 75 / (208'82 - 198'5) \Rightarrow n = 350$$

b) $n = 500$ $\quad n_c = 96\%$ $\quad \sigma = 75$

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'96}{2} = 0'9800 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$

$$\text{Error: } Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'055 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} = 6'876 \text{ min}$$