2015 UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBA

Matematika II

- BATXILERGOA
- LANDIBE HEZIKETA
- GOI MAILAKO HEZIKETA ZIKLOAK

Azterketa

Kalifikazio eta zuzenketa irizpideak

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

NAZIOARTEKO BIKAINTASUN CAMPUSA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

www.ehu.es

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da.
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

A AUKERA

A1 ariketa

$A=\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ matrizea emanda, kalkulatu zer balio izan behar duen x-k A-ren alderantzizko matrizea eta A-ren aurkakoa berdinak izan daitezen (Hau da, $A^{-1}=-A$).

A2 ariketa

Har ditzagun $A(2,1,2)$ eta $B(0,4,1)$ puntuak eta *r* zuzen bat ekuazio hau duena:

$$r \equiv x = y-2 = \frac{z-3}{2}$$

a) Kalkulatu zuzenaren P puntu bat, A eta B puntuetatik distantzia berera dagoena.

b) Aurkitu ezazu A puntutik igarotzen den r zuzenarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioa.

A3 ariketa

Horma-irudi bat apaintzeko, zurezko marko angeluzuzen bat eraiki nahi dugu, bost metro karratuko azalera bat zedarrituko duena. Badakigu markoaren kostua zentimetroko 1,5 € dela alde horizontaletan eta 2,7 €, berriz, alde bertikaletan. Zehaztu zer dimentsio aukeratu behar ditugun markoa ahalik eta merkeena izan dadin.

A4 ariketa

Kalkulatu integral mugagabe hau:

$$\int \frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}\,dx \ .$$

A5 ariketa

Kutxa batek 10 zentimoko, 20 zentimoko eta 50 zentimoko txanponak dauzka. Guztira, 350 txanpon daude. 50 zentimoko txanponen kopurua 10 zentimoko txanponen kopurua halako bi da. Guztira 90 euro badaude, mota bakoitzeko zenbat txanpon daude?

B AUKERA

B1 ariketa

Eztabaidatu ekuazio-sistema m parametroaren arabera

$$\begin{aligned} mx + my &= 1 \\ 3x + mz &= m - 2 \\ -y + z &= m - 3 \end{aligned}$$

Ba al da indeterminazio-kasurik? Erantzuna baiezkoa bada, ebatzi sistema kasu horietan. Ezezkoa bada, azaldu zergatia.

B2 ariketa

a) $r:\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$ zuzena eta $2x + (a+1)(y-3) + a(z-1) = 0$ planoa emanda, zehaztu zer balio izan behar duen a parametroak planoa eta zuzena paraleloak izan daitezen.

b) Aurreko atalean lortutako planoan al dago $P(1, 0, -3)$ puntua?

B3 ariketa

Funtzio hau emanda:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Aurkitu a eta b-ren balioak, jakinik f zuzen erreal osoan deribagarria dela.

b) Kalkulatu f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 1$ abzisako puntuan.

B4 ariketa

Irudikatu grafikoki $y = 2x^3$ kurbak, koordenatu-jatorrian funtzio horren grafikoaren ukitzailea den zuzenak eta $x = 1$ zuzenak planoan mugatzen duten esparrua. Kalkulatu esparru horren azalera.

B5 ariketa

Kutxa batek (prisma angeluzuzena) dimentsio hauek ditu: A, $2A$ eta $3A$. Dimentsio horietako bakoitza % 50 murrizten badugu, bolumena ere % 50 murriztuko da? Eta azalera osoa % 50 murriztuko da? Arrazoitu erantzunak.

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2 puntu artean.
3. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
4. Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab. ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
5. Positiboki baloratuko dira ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, etab.
6. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.

Ariketa bakoitzari dagozkion irizpide bereziak

A AUKERA

A.1 ariketa (2 puntu)
- A-ren alderantzizko matrizea kalkulatzea (0,5 puntu)
- x-ren balioak lortzea bi matrizeak berdintzean (1,5 puntu)

A.2 ariketa (2 puntu)
- Problema modu egokian planteatzea eta puntua zuzen lortzea (1,25 puntu)
- Planoa modu egokian lortzea (0,75 puntu)

A.3 ariketa (2 puntu)
- Problema modu egokian planteatzea eta optimizazio-funtziora iristea (1 puntu)
- Dimentsio optimoak lortzea, aplikatuz (1 puntu)

A.4 ariketa (2 puntu)
- Zatiki arrazional inpropioa polinomio baten eta zatiki arrazional propio baten batuketa gisa deskonposatzea (0,5 puntu)
- Lehen integrala kalkulatzea, polinomioari dagokiona (0,5 puntu)
- Integral arrazional propioa kalkulatzea frakzio sinple egokietan deskonposatuz (1 puntu)

A.5 ariketa (2 puntu)
- Problema modu aljebraikoan planteatzea eta hiru ekuazioko sistema ebaztea. Onargarria litzateke, halaber, saiakuntza-errore metodoa edo beste eraikitze-metodoren bat erabiliz ebaztea (2 puntu).

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

B AUKERA

B.1 ariketa (2 puntu)
- Matrizearen determinantea modu egokian ebaztea eta *m* parametroaren arabera eztabaidatzea (1,25 puntu)
- Bai, badira indeterminazio-kasuak $m = 3$ kasurako. Beraz, kasu hori da aztertu beharrekoa (0,75 puntu)

B.2 ariketa (2 puntu)
- Problema modu egokian planteatzea eta *a* parametroa lortzea (1,25 puntu)
- Argi adieraztea *P* puntua lortutako planoari dagokion ala ez, eta arrazoitzea (0,75 puntu)

B.3 ariketa (2 puntu)
- Jarraitutasunaren baldintza ezartzea $x = 2$-rako (0,5 puntu)
- Deribagarritasunaren baldintza ezartzea $x= 2$-rako (0,5 puntu)
- $x = 1$ kasuan funtzioaren ukitzailea den zuzena kalkulatzea (1 puntu)

B.4 ariketa (2 puntu)
- Eskatutako esparrua marraztea (1 puntu)
- Integral mugatua kalkulatzea Barrow-ren metodoa modu egokian aplikatuz (1 puntu)

B.5 ariketa (2 puntu)
- Bolumenaren formula planteatzea dimentsioak % 50 murriztu ondoren, eta, gero, arrazoitzea (1 puntu).
- Azalera osoaren formula planteatzea dimentsioak % 50 murriztu ondoren, eta, gero, arrazoitzea (1 puntu).

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

EBAZPENAK

A.1 ariketa

Behar diren kalkuluak egin ondoren, hauek dira bi matrizeak:

$$-A=\begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}.$$

Berdintasunaren baldintza ezarrita, hau izango dugu:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{-x}{-x^2+10} & \dfrac{2}{-x^2+10}\\ \dfrac{-5}{-x^2+10} & \dfrac{x}{-x^2+10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}.$$

Matrizearen elementuak berdinduta, hau lortuko dugu: $-x^2+10=1$; eta, horrenbestez: $x=\pm 3$

A.2 ariketa

a) Emandako zuzena parametrikoetara aldatzen badugu, zuzenaren edozein puntuk $P(t,\ 2+t,\ 3+2t)$ adierazpena izango du, eta distantziakidetasunaren baldintza ezarrita —hau da, $PB = PA$—, hau izango dugu:

$$\sqrt{t^2+(t-2)^2+(2+2t)^2}=\sqrt{(t-2)^2+(1+t)^2+(1+2t)^2}$$

Ekuazioa ebatzita, $t = -1$ lortuko dugu. Beraz, puntua P (-1, 1, 1) da.

b) Bila gabiltzan planoaren bektore normala zuzenaren bektore zuzentzailea da; hau da: $v(1, 1, 2)$. Planoa $A(2,1,2)$ puntutik pasatzen denez, ekuazio hau izango du:

$$(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0.$$

Sinplifikatuz, hau lortuko dugu: $x+y+2z = 7$

A.3 ariketa.

Markoaren dimentsioak (metrotan) x eta y izendatuz gero, hau izango dugu:

$$x\cdot y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{x}$$

Hau izango da alde horizontalen kostua:

$$H= 2x.100.1{,}5= 300x$$

eta alde bertikalena, berriz, hau:

$$V= 2y.100.(2.7)= 540y$$

Hau da minimoa izan behar duen funtzioa:

$$P=300x+540y=300x+\frac{2700}{x}$$

$$P'=300-\frac{2700}{x^2}=0 \Rightarrow 300x^2-2700=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=3$$

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

Egiazta daiteke minimo bat dela. Eskatutako balioak y = 5/3 metro eta x = 3 metro dira.

A.4 ariketa.

a) Izendatzailearen gradua zenbakitzailearena baino handiagoa denez, zatikia bi zatikiren batuketa gisa deskonposatuko dugu:

$$\frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}=2x+10+\frac{51x-1}{x^2-5x}$$

Beraz, honela adierazi ahal izango dugu integrala:

$$\int\frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}dx=\int 2xdx+\int 10dx+\int\frac{51x-1}{x^2-5x}dx=\frac{2x^2}{2}+10x+\int\frac{51x-1}{x^2-5x}dx$$

Izendatzailea 2. graduko polinomio bat denez, bere erroetan deskonposatuko dugu

$$x^2-5x=x(x-5),$$

Beraz:

$$\frac{51x-1}{x^2-5x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-5}$$

Eta A = 1/5 eta B = 254/5 lortuko ditugu. Beraz:

$$\int\frac{2x^3+x-1}{x^2-5x}dx=x^2+10x+\frac{1}{5}\ln|x|+\frac{254}{5}\ln|x-5|+C$$

A.5 ariketa

x, y, z izanik 10, 20 eta 50 zentimoko txanponen kopurua, hurrenez hurren, sistema hau plantea dezakegu:

$$x+y+z=350$$
$$z=2x$$
$$10x+20y+50z=9.000$$

Eta, ebatzita: x = 40 , y = 230 , z = 80

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

B.1 ariketa

Koefizienteen matrizearen sistemaren determinantea aztertu eta zerora berdinduta, hau izango dugu: $m^2 - 3m = 0$, non m = 0 edo m = 3

Kasuak aztertuta, hau izango dugu:

- $m \neq 0{,}3$ denean, matrizearen heina eta haren zabalduarena 3 denez (ezezagunen kopurua), sistema bateragarria eta determinatua izango da.
- m = 0 denean, erraz ikus dezakegu matrizearen heina 2 dela eta zabalduarena, berriz, 3 dela, zeren eta $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; beraz, sistema bateraezina da.
- m = 3 denean, bi heinak (matrizearena eta haren zabalduarena bat datoz) 2 dira; beraz, kasu honetan, sistema bateragarri indeterminatua da.

Sistema azken kasu horretan ebazteko eskatu digute, hau da, m = 3 denean.
Hau da sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 1 \\ 3x + 3z &= 1 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}$$

Garbi ikusten da lehenengo eta hirugarren ekuazioekin bigarren ekuazioa lor dezakegula (lehenengo eta bigarren ekuazioak ere har genitzake); beraz, honekin geldituko gara:

$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 1 \\ -y + z &= 0 \end{aligned}.$$

y = z denez, hau izango dugu: $x = \frac{1-3y}{3}$. Hau da, beraz, sistemaren soluzioa: $(\frac{1-3y}{3}, y, y)$, $y \in R$ izanik.

B.2 ariketa

a) Zuzenaren bektore zuzentzailea zuzena definitzen duten planoen bektore normalen biderkadura bektoriala da. Hauek dira bektore horiek: **a(3, 1,-1)** eta **b(2, 1, 4)**.
Beraz, **a x b** = (5, -14, 1) bektorea *r*-ren bektore zuzentzailea da.
Emandako planoa eta zuzena paralelo izango badira, planoaren bektore normalak eta zuzenaren bektore zuzentzaileak perpendikularrak izan behar dute. Hau da, haien biderkadura eskalarrak zero izan behar du.

$$2.\ 5+(a+1)(-14)+ a = 0$$

Eta, ebatziz, hau izango dugu: a = -4/13

Planoa, beraz, hau izango da : $2x + \frac{9}{13}y - \frac{4}{13}z = \frac{23}{13}$

b) P puntua planokoa izango bada, haren ekuazioa bete behar du. Baina hau betetzen denez:

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

$$2.1+\frac{9}{13}0-\frac{4}{13}(-3)=\frac{18}{13}\neq 0,$$

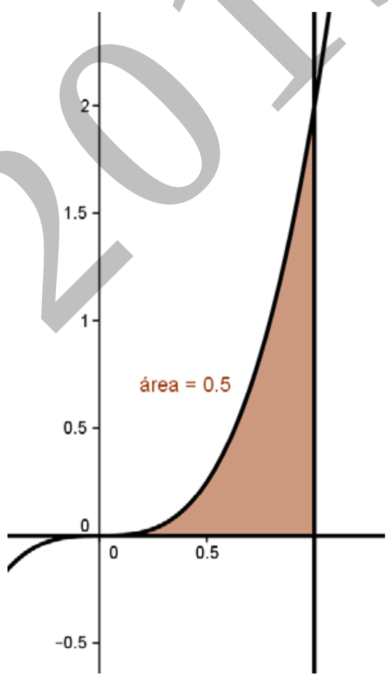
P puntua ez dagokio planoari.

B.3 ariketa

a) Bi funtzioak deribagarriak dira x = 2 ez diren puntu guztietan; beraz, x = 2 puntua soilik aztertu behar dugu. Deribagarria izango bada, bete behar da, lehenik, x = 2 balioan jarraitua izatea. Jarraitutasunaren baldintza ezarrita, hau lortuko dugu:
4a+6= - 2b
Orain x = 2 balioan deribagarria izan beharra baldintza gisa ezarriz gero, hau lortuko da:
4a+b = 1. Sistema ebatzita, hau izango dugu: a = 2; b = -7.
b) Ukitzailea eskatzen diguten puntua (1, 5) da, eta puntu horretan ukitzaile den zuzenaren malda 7 da. Beraz, hau da zuzen ukitzailearen ekuazioa: y-5 =7(x-1)

B.4.ariketa

Zuzen ukitzailearen ekuazioa, x = 0 puntuan, hau da: y = 0. Beraz, hau da grafikoa:



Eskatutako azalera, Barrow-ren erregela aplikatuta, hau izango da:

$$\int_0^1 2x^3dx=\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

B.5 ariketa

Murrizketaren aurreko bolumenari V deituz gero, hau izango dugu: $V=6A^3$.
Bolumen berria (dimentsioak % 50 murriztu ondoren) hau izango da:

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK

$$V' = 6A^3(0,5)^3 = 0,125V^3 = \frac{1}{8}V^3;$$

beraz, % 50 baino gehiago murriztu da. Izan ere, jatorrizko bolumenaren zortzirena baino ez du izango.
Azalera osoarekin era berean arrazoituz, hasieran balio hau izango du:

$$Azalera = 2(3A^2 + 2A^2 + 6A^2) = 22A^2$$

Dimentsioak % 50 murriztuta, hau izango da azalera berria:

$$Azalera' = 2\left(0,5\right)^2 (3A^2 + 2A^2 + 6A^2) = 0,25Azalera\,.$$

Kasu honetan ere, % 50 baino gehiago murrizten da: hasierako azaleraren laurdena izango da.