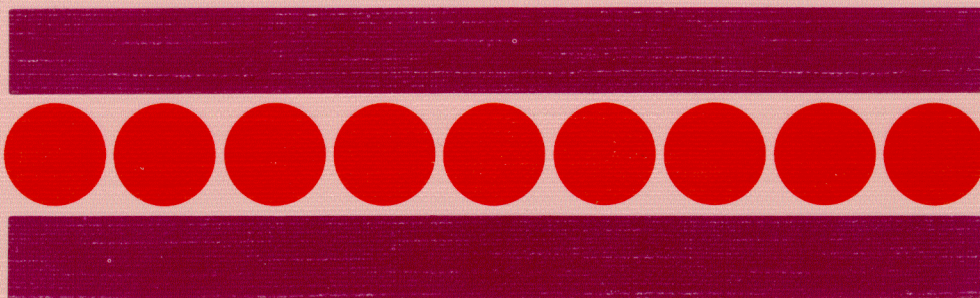


NAZIOARTEKO ESTATISTIKA
MINTEGIA EUSKADIN

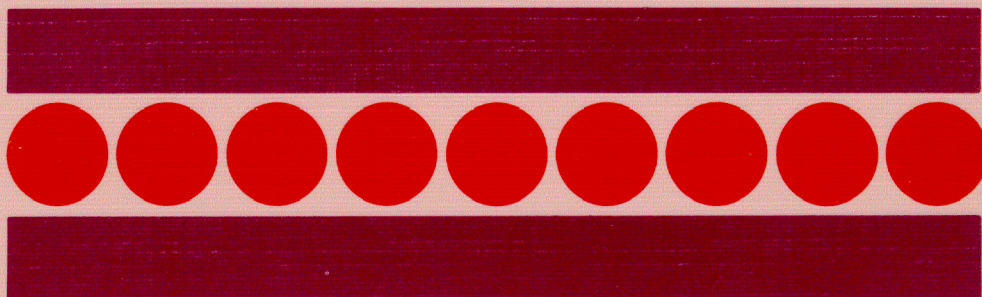
1991

SEMINARIO INTERNACIONAL
DE ESTADISTICA EN EUSKADI



RENTA Y DISTRIBUCION DE LA RIQUEZA,
DESIGUALDAD Y POBREZA:
TEORIA, MODELOS Y APLICACIONES

DR. CAMILO DAGUM



NAZIOARTEKO ESTATISTIKA **1991** SEMINARIO INTERNACIONAL
MINTEGIA EUSKADIN DE ESTADISTICA EN EUSKADI

**RENTA Y DISTRIBUCION DE LA RIQUEZA,
DESIGUALDAD Y POBREZA:
TEORIA, MODELOS Y APLICACIONES**

DR. CAMILO DAGUM

KOADERNOA 22 CUADERNO



Lanketa / Elaboración:
Euskal Estatistika-Erakundea /
Instituto Vasco de Estadística

Argitalpena / Edición:
Euskal Estatistika-Erakundea /
Instituto Vasco de Estadística
C/Dato 14-16 01005 Vitoria-Gasteiz
© **Euskadiko K.A.ko Administrazioa**
Administración de la C.A. de Euskadi

Botaldia / Tirada
500 ejemplares
IX-1991

Inprimaketa eta koadernaketa /
Impresión y encuadernación:
ITXAROPENA, S.A.
Araba kalea, 45 - Zarautz (Gipuzkoa)

Lege-gordailua / Depósito legal: S.S. 838/91

ISBN: 84-7542-127-10 Obra completa
ISBN: 84-7749-099-6

BIOGRAFIA DEL DR. CAMILO DAGUM

Camilo Dagum es Doctor en Ciencias Económicas por la Universidad Nacional de Córdoba (Argentina), Doctor Honoris Causa por la Universidad de Bologna (Italia) y por la Universidad Nacional de Córdoba, y Medalla del Colegio de Francia.

Autor de libros de econometría, economía, estadística económica y distribución del ingreso, ha escrito más de 100 artículos, publicados en varios idiomas, en revistas especializadas tales como *Metron*, *Journal of Econometrics*, etc.

Ha sido profesor titular de las Universidades de Córdoba, Iowa, México, París y Ottawa, profesor investigador de la Universidad de Roma, de la London School of Economics y del College de France, así como profesor titular invitado por la Universidad de Milán.

Ha hecho contribuciones a la teoría y modelos de distribución de la riqueza, a la medida de desigualdad, etc.

Ha participado en numerosos congresos internacionales, siendo ponente invitado por universidades de Europa, Asia, Australia y América del Norte y del Sur.

Es consultor de instituciones internacionales, nacionales y empresariales y miembro ordinario del Instituto Internacional de Estadística y del Instituto Internacional de Sociología.



INDICE

LA GENERACION Y DISTRIBUCION DE LA RENTA. LA CURVA DE LORENZ Y EL RATIO GINI	9
1.- Introducción	9
2.- La función de generación de renta doméstica	10
3.- La función de distribución de renta de la familia	13
4.- La curva de Lorenz	14
5.- El ratio Gini	18
6.- El ratio Gini y la diferencia media de Gini	20
7.- Una medida de desigualdad de renta basada en la longitud de la curva de Lorenz	22
8.- Análisis de cinco modelos de distribución de renta	22
9.- Aplicaciones	44
10.- Conclusión	52
SOBRE LA RELACION ENTRE LAS MEDICIONES DE DESIGUALDAD DE RENTA Y LAS FUNCIONES DE BIENESTAR SOCIAL	59
1.- Introducción	59
2.- Dos principios básicos que tratan de la desigualdad de renta y el bienestar social	61
3.- Ecuaciones fundamentales de renta	63
4.- Una interpretación de bienestar social de cuatro mediciones de desigualdad	65
5.- Ejemplos	70
6.- Conclusión	73

1. LA GENERACION Y DISTRIBUCION DE LA RENTA, LA CURVA DE LORENZ Y EL RATIO GINI.

1.- Introducción

En los últimos años la investigación económica sobre la distribución de la renta ha mostrado un interés creciente en la posibilidad de conseguir una base teórico-económica para la distribución de la renta personal, y una relación explicativa entre la distribución funcional y personal de la renta. Los más interesantes estudios de la primera incluyen las contribuciones de **Thurow** (1970), **Metcalf** (1972), **Beach** (1976), y **Dagum** (1978). Entre los autores que se ocupan de la segunda podemos nombrar a **Lebergott** (1964), **Tuckman** y **Brosch** (1974), y **Dagum** y **Théorét** (1978).

Con este estudio, se propone ofrecer un marco para el análisis de la distribución de la renta, empezando con el concepto de la "función de generación de renta" o "función de producción de renta" presentada en **Dagum** (1978). Aquel artículo expone un modelo macroeconómico integrado con una base microeconómica, que se caracteriza como un juego de producción y distribución de suma-no-constante para m -personas. El marco de este estudio incluye también a la formalización y análisis conceptuales de la función de la distribución de la renta, la curva de **Lorenz** y el ratio **Gini**, respectivamente. A continuación se aplica al estudio de varios modelos de la distribución de la renta. Para la evaluación del rendimiento relativo de los modelos, se utiliza el test de la bondad del ajuste de **Kolmogorov-Smirnow**, y también se examina un test de la bondad del ajuste propuesto por **Gastwirth**.

Este estudio está organizado de la siguiente manera: La Sección 2 se ocupa de la función de la generación de la renta; la Sección 3 introduce la función de la distribución de la renta como transformación de la función de la generación de la renta; la Sección 4 se ocupa de la curva de **Lorenz**, y la Sección 5 se ocupa del ratio **Gini**; la Sección 6 demuestra la relación matemática entre el ratio **Gini** y la diferencia media de **Gini**; la Sección 7 introduce una medida de desigualdad de renta en función de la longitud de la curva de **Lorenz**. Los conceptos y los resultados matemáticos obtenidos en

las secciones anteriores se usan en la Sección 8 para estudiar los modelos **Pareto y Gini**, el logarítmico normal, el gamma, la función de relación proporcional de fallos (**Singh y Maddala, 1976**), y el modelo especificado por **Dagum (1977)**. Este último se analiza en sus tres variantes: (a) el modelo de tres parámetros ($\alpha = 0$), (b) el modelo de cuatro parámetros, donde $0 < \alpha < 1$; y (c) el modelo de 4 parámetros, donde $\alpha < 0$. La Sección 9 se ocupa de las aplicaciones del modelo y la Sección 10 ofrece la conclusión del estudio.

2.- La función de generación de renta doméstica.

Dos de las variables más relevantes que explican el nivel de la renta de una familia y por unidad de tiempo son los recursos humanos h y el patrimonio total k de esa familia.

Por lo tanto:

$$y = \phi(h, k), \quad (h, k) \in (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (2.1)$$

donde ϕ se toma como una función continua y dos veces diferenciable. Se puede obtener una comprensión más profunda de la estructura de la función de generación de renta llevando a cabo una desagregación adecuada de h y k , mediante la cual se convertirían en vectores. Los componentes de h tendrían en cuenta la formación profesional, la experiencia (formación práctica in situ) y la situación de los agentes económicos. De la misma manera, los componentes de k incluirían a las categorías principales de posesiones de patrimonio y de endeudamiento, tales como activos disponibles, activos financieros no disponibles, valores de mercado estimados de vivienda ocupada por sus propietarios, viviendas de veraneo y automóviles, y participaciones familiar. Además, se puede emplear la misma representación, *mutatis mutandis*, para el estudio de la macroeconómica función de producción. En este

(1) Empleamos el concepto de la unidad familiar como concepto microeconómico útil. Podría valer cualquier otra unidad económica bien definida.

contexto, tropezaremos con el problema de la medición de los recursos humanos y de los activos físicos (patrimonio). Aunque la controversia dos-Cambridge concentró su polémica en el significado y la medición de éste último, es el significado y la medición del primero el que resulta más complejo.

Observaciones empíricas apoyan las siguientes propiedades estilizadas de la función de generación de la renta (2.1):

$$\phi_h = \partial \phi / \partial h \geq 0, \quad \phi_k = \partial \phi / \partial k \geq 0, \quad (2.2)$$

por lo tanto, es una función no decreciente de recursos humanos y patrimonio, respectivamente.

Puesto que los niveles mayores de k pueden facilitar la formación de una cartera más rentable, mejor distribución de riesgo y economías de escala en su inversión productiva, mientras los valores crecientes de h , dado k , no van seguidos necesariamente de aumentos proporcionales en y , podemos dar por sentado:

$$\phi_{hh} = \partial^2 \phi / \partial h^2 \leq 0, \quad \phi_{kk} = \partial^2 \phi / \partial k^2 \geq 0, \quad (2.3)$$

de donde ϕ sería cóncavo con respecto a h y convexo con respecto a k .

También:

$$\phi_{hk} = \phi_{kh} > 0. \quad (2.4)$$

Se deduce de (2.2) y (2.3) que, a lo largo de la función de identidad $h = k$ en el plano (h, k) , tenemos $\phi_h > \phi_k$ para valores pequeños de h (es decir, para todo h inferior a un h^* dado) y $\phi_h < \phi_k$ para valores grandes de h (es decir, para todo $h > h^*$). (*) La suposición (2.4) dice que la función de generación de renta no es desglosable. Simbolizando $y(h)$ e $y(k)$ como las funciones de renta incondicionales generadas para cada recurso individual, y $y(h/k)$ e $y(k/h)$ como las funciones condicionales de generación de renta de

cada recurso dado el nivel del otro, deducimos:

$$y(h) \neq y(h|k), \quad y(k) \neq y(k|h) \quad (2.5)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(h|k)}{\partial h} > 0, & \quad \frac{\partial y(k|h)}{\partial k} > 0, \\ \frac{\partial y(h|k)}{\partial k} > 0, & \quad \frac{\partial y(k|h)}{\partial h} > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Es decir, las funciones condicionales de generación de renta son funciones crecientes del recurso variable y se trasladan hacia arriba con respecto a los valores crecientes del recurso condicionado (vea figuras 1 y 2). Las funciones incondicionales de generación de renta $y(h)$ y $y(k)$ están entre sus respectivas funciones condicionales.

Puesto que la función de generación de renta (2.1) es una superficie en un espacio tridimensional, podemos derivar tres curvas como resultado de la intersección de la función $y=\phi(h,k)$ con un plano perpendicular a cada componente del sistema de coordenadas (h, k, y) . Los resultados de estas intersecciones son, respectivamente:

(i) La función condicional de generación de renta de k dado $h=h_i$; (fig.1)

Esto es el resultado de la intersección de $y=\phi(h,k)$ con un plano perpendicular a h en h_i .

(ii) La función condicional de generación de renta de h dado $k=k_j$; (fig.2).

Esto es el resultado de la intersección de $y=\phi(h,k)$ con un plano perpendicular a k en k_j .

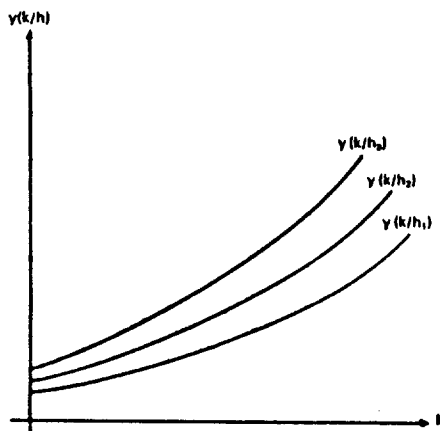


Fig. 1

Funciones condicionales de generación de renta de k dado h ($h_1 < h_2 < h_3$).

(iii) La función isorenta. Esta es la intersección de la superficie con un plano perpendicular a y en y_0 . Por lo tanto, su forma matemática implícita es $y_0 = \phi(h, k) = \text{constante}$. Se deduce de (2.2) y $\phi_{kk} \neq 0$ que la función isorenta $h = h(k)$ es una función estrictamente decreciente, pues $dh/dk < 0$, pero no necesariamente estrictamente convexa, a menos que ϕ_{kk} en (2.3) fuera también negativa.

$$y = \phi(h, k)$$

3.- La función de distribución de renta de la familia.

Se deduce de (2.2) y de la aceptación de la función continuamente diferenciable $y = (h, k)$, que la función de generación de la renta aumenta estrictamente con dominio $R_2^+ = (0, \infty) \times (0, \infty)$ y rango $R_2^+ = (0, \infty)$, es decir, el cuadrante no-negativo en el plano cartesiano y el conjunto no-negativo de números reales respectivamente. Por lo tanto:

$$\phi : R_2^+ \longrightarrow R^+. \quad (3.1)$$

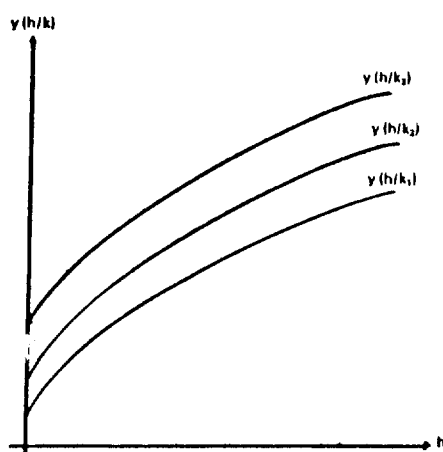


Fig. 2

Funciones condicionales de generación de renta de h dado k ($k_1 < k_2 < k_3$).

La probabilidad de observar a una familia con renta $Y \leq y$, es decir, $F(y) = P(Y \leq y)$, es la función de la distribución de la renta acumulativa de la familia, que es una aplicación de R^+ sobre el intervalo de unidad $(0, 1)$. Por lo tanto:

$$F : R^+ \longrightarrow [0, 1], \quad (3.2)$$

donde $F(y)$ es una función de distribución acumulativa, no-decreciente y continua (*cdf* = cumulative distribution function).

Puesto que todos los modelos especificados de distribución de renta son funciones diferenciales y continuas, la *cdf* de renta de la familia es continua y estrictamente creciente, y F en (3.2) es una función biunívoca (uno a uno y sobre). Por lo tanto, su inverso F^{-1} es también una función.

En general, el inverso de una función $p = F(y)$ es:

$$F^{-1}(p) = \inf_y \{y | F(y) \geq p\}, \quad (3.3)$$

y dada la aceptación de F como una función de renta continua y estrictamente creciente, tenemos:

$$F^{-1}(p) = y \text{ and } p = F \cdot F^{-1}(p) = F(y), \quad (3.4)$$

donde

$$F^{-1} : [0, 1] \longrightarrow [0, \infty). \quad (3.5)$$

4.- La curva de Lorenz.

La curva de Lorenz (Lorenz 1905) es una función de valores reales que aplica la distribución acumulativa de familias, ordenadas por tamaño creciente de sus rentas (es decir, $p = F(y)$) sobre la distribución acumulativa de su renta total correspondiente, es decir:

$$L(y) = F_1(y) = \int_0^y x dF(x) / E(Y), \quad (4.1)$$

donde $F_1(\mathbf{y})$ es la función de distribución de primer momento de $\mathbf{F}(\mathbf{y})$. En general, la función de distribución del r° momento es, por definición

$$F_r(\mathbf{y}) = \int_0^y x^r dF(x)/E(Y^r), \quad (4.2)$$

siempre que exista el r° momento.

Como ambas coordenadas de la curva de Lorenz son funciones de distribución acumulativas, tenemos:

$$L : [0, 1] \longrightarrow [0, 1], \quad (4.3)$$

donde L es función biunívoca. Su representación paramétrica:

$$L = \{(F(y), L(y)) | y \in [0, \infty)\} \quad (4.4)$$

se deduce de (3.2) y (4.1). La representación cartesiana de la curva de Lorenz se deduce de (3.4) y (4.1), es decir:

$$L(y) = \int_0^p F^{-1}(q) dq / E(Y) = L(p). \quad (4.5)$$

Se puede hacer fácilmente esta transformación cuando $\mathbf{p}=\mathbf{F}(\mathbf{y})$ tiene una solución matemática explícita para \mathbf{y} en función de \mathbf{p} . Este es el caso para el modelo Pareto y el modelo especificado por Dagum (1977). Puesto que los modelos especificados de distribución de renta son funciones continuamente diferenciables de renta y tienen una esperanza matemática finita, se deduce que $\mathbf{F}(\mathbf{y})$ y $\mathbf{L}(\mathbf{y})$ son funciones estrictamente crecientes y continuamente diferenciables de \mathbf{y} . Por lo tanto,

$$\mathbf{F}'(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \text{ and } \mathbf{L}'(\mathbf{y}) = \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{y})/E(Y). \quad (4.6)$$

no desaparecen nunca para todo \mathbf{y} positivo. Y así, la curva de Lorenz es una curva regular para todo $\mathbf{y} > 0$.

La distancia dirigida $\mathbf{s}(\mathbf{y})$ a lo largo de la curva regular L de Lorenz con parametrización (4.4) es, por definición,

$$s(y) = \int_0^y [1 + (dL/dF)^2]^{1/2} dF.$$

Usando (3.4) y (4.6) se convierte en:

$$s(y) = \int_0^y [x^2 + (E(Y))^2]^{1/2} f(x) dx / E(Y), \quad (4.7)$$

y en el límite:

$$s = \lim_{y \rightarrow \infty} s(y) = \int_0^{\infty} [x^2 + (E(Y))^2]^{1/2} f(x) dx / E(Y). \quad (4.8)$$

Está claro por la definición de la curva de Lorenz que es una función estrictamente creciente y convexa (Fig.3). De hecho, como las unidades familiares están ordenadas por tamaño creciente de renta, a incrementos iguales de F (por ejemplo, a cada percentil de familias) corresponde cuotas crecientes de renta. Si $p_i = F(y_i)$, $i=0,1,2$, son tres percentiles consecutivos y equidistantes, entonces:

$$L(p_2) - L(p_1) > L(p_1) - L(p_0). \quad (4.9)$$

La desigualdad estricta es aplicable a menos que todas las familias tengan la misma renta. Dado que F y L son funciones continuamente diferenciables de y , la siguiente es una prueba matemática sencilla del teorema de que la curva de Lorenz es una función estrictamente creciente y convexa:

(i) **Prueba de que la curva de Lorenz es estrictamente creciente.** Aplicando a $F(y)$ el teorema de diferenciabilidad de las funciones inversas, y utilizando (4.6), deducimos:

$$\frac{dL}{dF} = \frac{dL}{dy} \cdot \frac{dy}{dF} = \frac{y}{E(Y)} > 0, y > 0. \quad (4.10)$$

(ii) **Prueba de que la curva de Lorenz es convexa.** Se deduce de la diferenciación de (4.10) y la aplicación del teorema de diferenciabilidad de funciones inversas, que:

$$\frac{d^2L}{dF^2} = \frac{1}{E(Y)} \frac{dy}{dF} = \frac{1}{E(Y)f(y)} > 0, y > 0, \quad (4.11)$$

y así se demuestra el teorema.

De (4.10) deducimos:

(a) Para cualquier renta $y \in \mathbb{R}^+$, la pendiente dL/dF de la curva de Lorenz es igual al ratio entre renta y , y su esperanza matemática.

$$(b) \lim_{F \rightarrow 0^+} dL/dF = \lim_{y \rightarrow 0^+} dL/dF = L'(0) = 0 \quad (4.12)$$

$$(c) \lim_{F \rightarrow 1^-} dL/dF = \lim_{y \rightarrow \infty} dL/dF = L'(1) = \infty \quad (4.13)$$

Se deduce de (4.12) que la abscisa es tangente a la curva de Lorenz en el origen y, de (4.13) que la paralela al eje vertical en el punto $F=1$ es tangente a la curva de Lorenz en el punto (1.1). Además:

$$DL: [0, 1) \longrightarrow [0, \infty), \quad (4.14)$$

donde D es el operador de diferenciación, por lo tanto la pendiente de la curva de Lorenz se dibuja en el intervalo de unidad sobre el grupo de números no-negativos. Mediante la aplicación del teorema de valor medio, existe un valor de F tal que $dL/dF=1$. En este punto de F la tangente a la curva de Lorenz es paralela a la línea de igualdad perfecta, es decir, la función de identificación $L = F$. De acuerdo con (4.10), este punto es la renta media $E(Y)$.

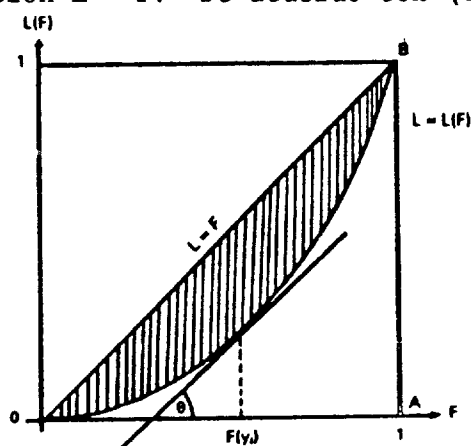


Figura 3

La curva de Lorenz, $L'[F(y_i)] = \tan \theta = y_i / E(Y)$.

5.- El ratio Gini.

Hay muchas medidas escalares de la desigualdad de renta, entre las cuales podemos mencionar el ratio **Gini** (Gini, 1912), la varianza del logaritmo de la renta, el coeficiente de variación, el índice de entropía de **Theil** (1967) y el índice de **Atkinson** (1970). Estas son medidas de desigualdad escalar de las diferencias interfamiliares (en general, entre unidades económicas) de renta dentro de una población dada de familias o, en general, unidades económicas. Estos ratios son medidas del grado relativo de desviación de una población de la situación de igualdad perfecta, es decir, cuando todas las familias tienen la misma renta. De éstos, el más empleado es el ratio **Gini**, quizás porque contiene varias propiedades intuitivas, geométricas, matemáticas y económicas. Algunas de ellas ya fueron estudiadas por **H. Dalton** (1920).

La interpretación geométrica del ratio Gini se esclarece con la ayuda de la curva de Lorenz (**Fig.3**). De hecho, es una función creciente de la zona encerrada entre la curva de Lorenz $L=L(F)$ y la función de identidad $L=F$ (la línea de equidistribución). Por lo tanto, es una función creciente del grado de desviación de la curva de Lorenz de la función equidistribución. La interpretación geométrica se da con el cociente entre la zona de concentración (la zona entre $L=F$ y $L=L(F)$) y la zona del triángulo **OAB** (**Fig.3**). Dado que la zona del triángulo **OAB** es igual a $1/2$, el ratio Gini iguala a dos veces la zona entre $L=F$ y $L=L(F)$, es decir, dos veces la zona rayada en la **Figura 3**. Ello implica que el ratio Gini toma valores en el intervalo $(0,1)$. Puesto que F y L son funciones integrables, tenemos la siguiente representación matemática para el ratio Gini G :

$$G = 2 \int_0^1 (F-L)dF = 1-2 \int_0^1 LdF. \quad (5.1)$$

Integrando por partes, deducimos:

$$G = -1 + 2 \int_0^1 FdL, \quad (5.2)$$

y, sumando (5.1) y (5.2):

$$G = \int_0^1 FdL - \int_0^1 LdF. \quad (5.3)$$

El primer término en el lado derecho de (5.3) es la zona del cuadrado de unidad a la izquierda de la curva de Lorenz, es decir, tomamos la función inversa de $L(F)$ e integramos con respecto a L ; el segundo término es la zona a la derecha de la curva de Lorenz. Por lo tanto, la diferencia es dos veces la zona entre la función de identidad y la curva de Lorenz. Las tres fórmulas (5.1), (5.2), (5.3) son representaciones equivalentes del mismo concepto. Utilizando el concepto de la integral como zona, cada una de ellas tiene una interpretación geométrica clara en la Figura 3. Por lo tanto, el coeficiente de Gini es un funcional⁽¹⁾ que aplica el conjunto $\{L(F)\}$ de curvas de Lorenz sobre el conjunto $(0,1)$ de números reales, es decir:

$$G : \{L(F)\} \longrightarrow [0,1] \quad (5.4)$$

Específicamente, a cada curva de Lorenz, se le asocia un solo número real entre $(0,1)$, pero lo recíproco no es verdad, pues cada escalar entre $(0,1)$ puede tener asociado más de una curva de Lorenz. La correspondencia biunívoca solo se verifica para el subgrupo de curvas de Lorenz $L(F)$ derivado de un modelo de distribución de renta cuyo coeficiente de Gini asociado es una función monótona de un solo parámetro. La limitación de esta familia de modelos es que no pueden explicar la intersección con las curvas de Lorenz. Este es el caso para los modelos de Pareto (véase sección 8.1), Lognormal (véase sección 8.2) y Gamma (véase sección 8.3).

(1) La transformación $f: X \longrightarrow Y$ es una función, solamente si el dominio de f es X y para cada $x \in X$, $f(x)$ es un solo elemento de Y . Un funcional es una correspondencia que asigna un número a cada función (o curva) perteneciente a un grupo. Así, se podría decir que un funcional es un tipo de función, donde la variable independiente es una función. En (5.4), el grupo de funciones es el grupo de curvas de Lorenz.

6.- El ratio Gini y la diferencia media de Gini.

No es necesario enunciar el ratio Gini en función de la curva de Lorenz, aunque es cierto que esta última permite una interpretación intuitiva y geométrica importante. Gini (1912) presentó su medida de desigualdad de renta en función de su medida de dispersión, o la diferencia media de Gini. Gini (1914) ha demostrado el notable teorema que relaciona la diferencia media de Gini con la zona de concentración (la zona entre la línea de equidistribución $I=F$ y la curva de Lorenz).

Dejemos que Δ_1 simbolice la diferencia media de Gini, definida como la esperanza matemática de la diferencia absoluta de todos los pares posibles de valores variables de renta y . De ahí,

$$\Delta_1 = E(|Y-X|) = \int_0^{\infty} dF(y) \int_0^{\infty} (|y-x|)dF(x) \quad (6.1)$$

y

$$G = \Delta_1/2E(Y) = \Delta_1/2\mu, \quad (6.2)$$

donde $\mu=E(Y)$ y X e Y son variables aleatorias de distribución idéntica.

Teorema. La diferencia media de Gini dividida entre dos veces la renta media es igual a dos veces la zona entre la curva de Lorenz y la función de equidistribución. Es decir:

$$G = \Delta_1/2\mu = \int_0^1 FdL - \int_0^1 LdF. \quad (6.3)$$

Demostración: Se deduce de (4.1) y (4.10) que:

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} yF(y)dF(y) - \int_0^{\infty} L(y)dF(y) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} ydF(y) \int_0^y dF(x) - \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} dF(y) \int_0^y xdF(x). \end{aligned} \quad (6.4)$$

De ahí deducimos:

$$\mu G = \int_0^{\infty} dF(y) \int_0^y (y-x)dF(x). \quad (6.5)$$

De (6.1) obtenemos:

$$\Delta_1 = \int_0^{\infty} dF(y) \int_0^y (y-x)dF(x) + \int_0^{\infty} dF(y) \int_y^{\infty} (x-y)dF(x) \quad (6.6)$$

y de $E(Y-X) = 0$, puesto que X e Y son variables aleatorias de distribución idéntica, tenemos:

$$\int_0^{\infty} dF(y) \int_0^y (y-x)dF(x) = \int_0^{\infty} dF(y) \int_y^{\infty} (x-y)dF(x). \quad (6.7)$$

Sustituyendo (6.7) en (6.6) y llevando este resultado a (6.5), obtenemos $\Delta_1/2\mu$ quedando demostrado el teorema. Del siguiente teorema deriva una importante nueva relación para la diferencia media de Gini.

Teorema. La diferencia media de Gini es igual a cuatro veces la esperanza matemática del producto de la variable renta Y y su cdf $F(y)$, menos dos veces la esperanza matemática de Y . Es decir,

$$\Delta_1 = 4E(YF(Y)) - 2E(Y) \quad (6.8)$$

Demostración. Se deduce de (6.1), (6.6) y (6.7) que,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2 \int_0^{\infty} dF(y) \int_0^y (y-x)dF(x) \\ &= 2 \int_0^{\infty} yF(y)dF(y) - 2 \int_0^{\infty} dF(y) \int_0^y x dF(x). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Aplicando (4.1) y la definición de esperanza matemática, deducimos:

$$\Delta_1 = 2E(YF(Y)) - 2E(Y) \int_0^{\infty} L(y)dF(y). \quad (6.10)$$

Integrando por partes el segundo término en el lado derecho de (6.10) deducimos (6.8), quedando el teorema demostrado.

7.- Una medida de desigualdad de renta basada en la longitud de la curva de Lorenz.

La interpretación geométrica del ratio Gini lo relaciona con la zona entre la línea de equidistribución y la curva de Lorenz. Como es una función creciente del grado de desviación de la curva de Lorenz de la línea de equidistribución, cuanto más grande sea la desviación de $L(F)$ de la función de equidistribución $F = L$, mayor es la longitud de la curva de Lorenz. De esto se puede deducir una medida de desigualdad de renta en función de su longitud. Observamos que cuando existe una igualdad perfecta, la curva de Lorenz coincide con la función de equidistribución y su longitud es igual a $\sqrt{2}$ (la longitud del segmento OB en la figura 3). Por otra parte, cuando existe desigualdad perfecta, se extiende de O a A y de A a B , y su longitud es igual a 2. Por lo tanto, la(s) longitud(es) de la curva de Lorenz toma(n) valores dentro del intervalo $\sqrt{2} < s < 2$. Entonces su medida normalizada en el intervalo $[0,1)$ es:

$$S = (s - \sqrt{2}) / (2 - \sqrt{2}), \quad (7.1)$$

con la forma matemática de s dada en (4.8).

8.- Análisis de cinco modelos de distribución de renta.

En esta sección explicaremos las aplicaciones de la curva de Lorenz y ratio de Gini a cinco modelos de distribución de renta: El **Paretiano**, el **lognormal**, el **gamma**, el modelo especificado por **Dagum** (1977) y el modelo propuesto por **Singh y Maddala** (1976).

8.1. El Modelo de Pareto.

Pareto (1895), 1896, 1897) empezó el análisis cuantitativo sistemático de la distribución personal de renta. Basándose en la regularidad observada y la permanencia de la elasticidad en la cola superior de la distribución de la renta, Pareto especificó su modelo (**tipo I**), que generalizó más con la especificación de tipos **II y III**. El modelo de Pareto Tipo I tiene la siguiente forma matemática:

$$G(y) = 1 - F(y) = (y/y_0)^{-\alpha}, \quad y \geq y_0 > 0, \alpha > 1, \quad (8.1)$$

donde $F(y) = P(Y \leq y)$ es el **cdf**. De ahí, la correspondiente función de densidad de probabilidad (**pdf**) se convierte en:

$$f(y) = \begin{cases} \alpha y_0^\alpha y^{-\alpha-1}, & y \geq y_0 > 0 \\ 0, & y < y_0. \end{cases} \quad (8.2)$$

La esperanza matemática es:

$$E(Y) = \alpha y_0^\alpha \int_{y_0}^{\infty} y^{-\alpha} dy = \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_0 \quad (8.3)$$

y la curva de Lorenz se da con:

$$L(F(y)) = (\alpha - 1) y_0^{\alpha-1} \int_{y_0}^y x^{-\alpha} dx = 1 - (y/y_0)^{-\alpha+1} \quad (8.4)$$

La representación paramétrica de la curva de Lorenz viene dada por (8.1) y (8.4). Por lo tanto, la representación cartesiana se convierte en:

$$L(F) = 1 - (1-F)^{\alpha-1} \quad (8.5)$$

y de (8.5), deducimos el modelo de Gini (Gini, 1909):

$$F(L) = 1 - (1-L)^\delta, \quad \delta = \alpha/(\alpha-1), \quad (8.6)$$

donde δ es la delta de Gini, que juega un papel decisivo en la interpretación del α de Pareto, resolviendo de una manera inequívoca la controversia sobre el significado de α como medida de la desigualdad de renta. Se deduce de (8.6) que, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, entonces $\delta \rightarrow 1$ y $F = L$, y por lo tanto, tenemos igualdad perfecta. Por otra parte, cuando $\alpha \rightarrow 1^+$, entonces $\delta \rightarrow \infty$ y tenemos desigualdad perfecta. En general, dado el valor de L , cuando δ aumenta, la parte de las familias con renta superior a y decrece, es decir, cuando δ crece, la curva de Lorenz se desplaza a la derecha. De esta manera, Gini invirtió la interpretación de Pareto de α como medida de la desigualdad de renta.

Sustituyendo (8.5) en (5.1), deducimos el ratio de Gini: ⁽ⁱ⁾

$$G = 1 - 2 \int_0^1 [1 - (1 - F)^{1/\alpha}] dF = 1/(2\alpha - 1). \quad (8.7)$$

8.2. - La Distribución Lognormal

McAlister parece haber sido la primera persona que estudió y especificó la distribución lognormal. Esta contribución fué el resultado de la sugerencia de Francis Galton a McAlister. En 1931, Gibrat publicó su contribución clásica al análisis de la distribución y desigualdad de la renta, aplicando el modelo lognormal (La contribución de Gibrat fué su disertación de Doctorado de Filosofía que presentó en "L'Ecole Nationales Supérieure des Mines". Paris).

Su función de densidad de probabilidad es:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y - \mu)^2\right), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

La **cdf** correspondiente es:

$$F(y) = \Lambda(y; \mu, \sigma^2) = N((\log y - \mu)/\sigma; 0, 1) \quad (8.9)$$

donde $\Lambda(y; \mu, \sigma^2)$ simboliza la **cdf** con parámetros μ y σ^2 , y $N((\log y - \mu)/\sigma; 0, 1)$ es la **cdf** normal con media cero y varianza uno. Se puede demostrar que μ es el logaritmo de la media geométrica, es decir, $E(\log Y)$ y que σ^2 es la varianza de $\log Y$.

La esperanza matemática es:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \exp(-(\log y - \mu)^2/2\sigma^2) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^\infty \exp(x - (x - \mu)^2/2\sigma^2) dx = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

(i) Se puede obtener el mismo resultado sustituyendo (8.6) en (5.2).

El momento de orden r sobre el origen es igual a la función de generación de momentos de la distribución normal con parámetro r , es decir:

$$E(Y^r) = E(e^{rY}) = \exp\left(r\mu + \frac{1}{2}r^2\sigma^2\right) \quad (8.11)$$

y, para $r = 1$, tenemos $E(Y)$.

La curva de Lorenz deducida de (4.1), (8.8) y (8.10) es:

$$L(F(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^y \exp\left[-\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - (\log x - \mu)^2/2\sigma^2\right] dx \quad (8.12)$$

y, tras algunas transformaciones algebraicas, deducimos:

$$\begin{aligned} L(F(y)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^y \frac{1}{x} \exp[-(\log x - \mu - \sigma^2)^2/2\sigma^2] dx \\ &= \Lambda(y; \mu + \sigma^2, \sigma^2), \end{aligned} \quad (8.13)$$

que es la **cdf** lognormal con parámetros $\mu + \sigma^2$ y σ^2 . Por lo tanto, la representación paramétrica de la distribución lognormal se da con (8.9) y (8.13). Se puede obtener la correspondiente representación cartesiana en forma implícita de la representación paramétrica. Así, deducimos de (8.9) y (8.13) respectivamente:

$$(\log y - \mu)/\sigma = N^{-1}(F), \quad (8.14)$$

$$(\log y - \mu - \sigma^2)/\sigma = N^{-1}(L), \quad (8.15)$$

y restando (8.14) de (8.15),

$$N^{-1}(L) = N^{-1}(F) - \sigma, \quad (8.16)$$

que es la representación cartesiana de la curva de Lorenz para la distribución lognormal.

El ratio Gini se deduce de (5.1) y (8.13). De ahí:

$$G = 1 - 2 \int_0^{\infty} \Lambda(y, \mu + \sigma^2, \sigma^2) d\Lambda(y, \mu, \sigma^2). \quad (8.17)$$

La integral en (8.17) es la convolución de la variable aleatoria $x/y < 1$, donde x e y se distribuyen log-normalmente con las log-medianas $\mu + \sigma^2$ y μ respectivamente, y varianza común de los logaritmos σ^2 . Por lo tanto, es también una distribución lognormal con log-mediana σ^2 y varianza de los logaritmos igual a $2\sigma^2$, es decir:

$$G = 1 - 2 \Lambda(1; \sigma^2, 2\sigma^2). \quad (8.18)$$

Llevando a cabo en (8.18) la sustitución $z = (\log v - \sigma^2) / \sigma\sqrt{2}$ deducimos:

$$G = 1 - 2 N(-\sigma/\sqrt{2}; 0, 1) = 2N(\sigma/\sqrt{2}; 0, 1) - 1. \quad (8.19)$$

Se puede obtener el mismo resultado de (8.17) y las sustituciones

$$u = (\log x - \mu - \sigma^2)/\sigma \text{ and } z = (\log y - \mu)/\sigma, \quad (8.20)$$

que dan la convolución de dos distribuciones normales correspondientes a la variable aleatoria $u-z < -\sigma$, donde u y z son $N(0, 1)$.

De ahí:

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2 \int_{-\infty}^{\infty} N(z - \sigma; 0, 1) dN(z; 0, 1) \\ &= 1 - 2 N(-\sigma/\sqrt{2}; 0, 1), \end{aligned} \quad (8.21)$$

puesto que la convolución de dos distribuciones normales es también una distribución normal con media y varianza igual a la media y la varianza de la nueva variable aleatoria que corresponde a la convolución (H. Cramer, 1946, p.212). Por lo tanto, para las variables aleatorias u y z en (8.20), que son $N(0, 1)$, e deduce que la variable aleatoria $u-z$ es también normal con $E(u-z) = 0$ y $\text{var}(u-z) = 2$, es decir, $u-z \stackrel{d}{=} N(0, 2)$. (El símbolo $\stackrel{d}{=}$ representa "igual en distribución").

8.3 La Función Gamma

La función gamma, una contribución de L. Euler (1707-1783), se define con la integral

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy, \quad n > 0. \quad (8.22)$$

La función gamma es una función continua del parámetro n y tiene derivadas continuas de todos los órdenes.

Se puede demostrar, mediante la integración parcial, la validez de la siguiente ecuación en diferencia finita:⁽¹⁾

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n), \quad n > 0. \quad (8.23)$$

La pdf gamma asociada es, para todo $(\alpha, \lambda) > 0$,

$$f(y; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} y^{\lambda-1} e^{-\alpha y}, & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

La cdf correspondiente es:

$$F(y; \alpha, \lambda) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^y x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} dx, \quad (\alpha, \lambda) > 0. \quad (8.25)$$

O. Ammon (1895) aparece como el primero en proponer la pdf gamma (8.24) como modelo descriptivo de la distribución de la renta. Fué aplicado por L. March (1898) para adaptar la distribución salarial de varias categorías profesionales en Francia, Alemania y EE.UU. Una pdf gamma generalizada fué especificada por Amoroso (1924-1925), y es:

$$f(y; \alpha, \lambda, h, s) = \frac{\alpha^\lambda}{|\lambda| \Gamma(\lambda)} (y-h)^{\lambda/s-1} \exp(-\alpha(y-h)^{1/s}), \quad (8.26)$$

$$y > h, (\alpha, \lambda) > 0, s \neq 0, \alpha + s > 0.$$

(1) Se puede demostrar que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ es válida para toda n real tal que $n \notin \{0, 1, 2, \dots\}$

Cuando $s = 1$ y $h = 0$ obtenemos, como caso concreto, la pdf gamma (8.24).

Salem y Mount (1974) utilizaron la pdf gamma (8.24) y Bartels (1977) hizo un estudio comparativo detallado de la gamma, lognormal y otras pdf como modelos de distribución de renta.

El momento de orden r sobre el origen es:

$$E(Y^r) = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{\infty} y^{r+\lambda-1} e^{-\alpha y} dy = \frac{\Gamma(r+\lambda)}{\alpha^r \Gamma(\lambda)} \quad (8.27)$$

Se deduce de (8.23) y (8.27), para $r = 1$ y $r = 2$:

$$E(Y) = \lambda/\alpha, \quad E(Y^2) = \lambda(\lambda + 1)/\alpha^2 \quad (8.28)$$

y

$$\text{var } Y = \lambda/\alpha^2. \quad (8.29)$$

La correspondiente curva de Lorenz es:

$$I(F(y)) = \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda \Gamma(\lambda)} \int_0^y x^{\lambda} e^{-\alpha x} dx = \Gamma(y; \alpha, \lambda + 1), \quad (8.30)$$

que también es una función de distribución gamma. La representación paramétrica de la curva de Lorenz es:

$$(F(y), I(y)) = (\Gamma(y; \alpha, \lambda), \Gamma(y; \alpha, \lambda + 1)). \quad (8.31)$$

El ratio de Gini se deduce de (5.2), (8.25) y (8.30):

$$G = -1 + 2 \int_0^{\infty} \Gamma(y; \alpha, \lambda) d\Gamma(y; \alpha, \lambda + 1), \quad (8.32)$$

donde la integral del lado derecho es la composición de dos distribuciones gamma correspondientes a la variable aleatoria $x \leq y$. La distribución de x se da en (8.25) y la de y en (8.30). Así que,

$$\begin{aligned}
 G &= -1 + 2P(x \leq y) = -1 + 2P\left(\frac{x}{x+y} \leq \frac{1}{2}\right) \\
 &= -1 + 2B\left(\frac{1}{2}; \lambda, \lambda+1\right),
 \end{aligned}
 \tag{8.33}$$

mediante la aplicación del siguiente:

Teorema. Si x e y son variables gamma aleatorias e independientes con el mismo parámetro α , y con los parámetros λ y $\lambda+1$ respectivamente, el cociente $x/(x+y)$ es una variable aleatoria beta con parámetro λ y $\lambda+1$.

La función beta se debe a **Euler** y se define:

$$B(m, n) = \int_0^1 y^{m-1} (1-y)^{n-1} dy, (m, n) > 0. \tag{8.34}$$

Se puede demostrar que:

$$B(m, n) = \Gamma(m)\Gamma(n)/\Gamma(m+n). \tag{8.35}$$

La **cdf** beta asociada es:

$$B(y; m, n) = \int_0^y x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx / B(m, n). \tag{8.36}$$

Cuando $m = \lambda$, $n = \lambda+1$ e $y = 1/2$, tenemos la **cdf** beta que aparece en (8.33).

8.4. Un modelo Nuevo de Distribución de la Renta.

C. Dagum (1977) especificó un nuevo modelo de distribución de renta que ofrece una adaptación excelente a las distribuciones de renta observadas tanto en los países desarrollados como en los países en vías de desarrollo. Este modelo da un alto rendimiento al aplicarlo a la partición de un conjunto de unidades económicas de acuerdo con ciertas características socio-económicas y geográficas (por ejemplo, partición por regiones económicas de un país, sexo y zonas urbano-rurales).

8.4.1. Especificación del Modelo.

La especificación del modelo es la representación teórica de las características de regularidad y permanencia de elasticidad de renta en distribuciones de renta observadas. El análisis de las distribuciones de renta observadas muestra sistemáticamente una elasticidad de renta decreciente de la cdf $F(y)$ como función de $F(y)$ (Figura 4). En general, esta elasticidad es una función cóncava de F . La especificación matemática de esta elasticidad es:

$$\epsilon(F, y) = \frac{d \log F(y)}{d \log y} = \beta_1 (1 - (F(y))^{\beta_2}), \quad y > 0, \quad (\beta_1, \beta_2) > 0. \quad (8.37)$$

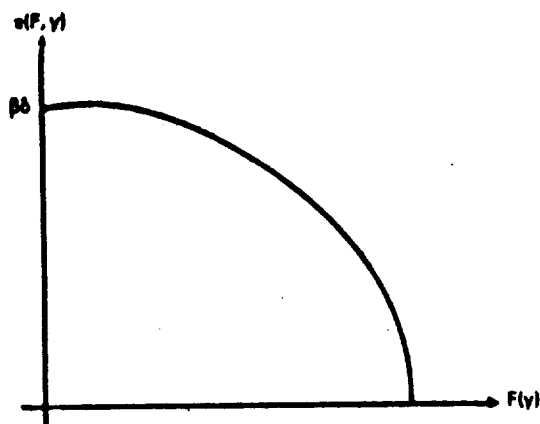


Figura 4

Elasticidad de renta de la cdf $F(y)$ en función de $F(y)$.

Al solucionar esta ecuación diferencial obtenemos el modelo de tres parámetros:

$$F(y) = \begin{cases} (1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \quad (\beta, \lambda, \delta) > 0 \quad (8.38)$$

donde $F(y)$ es la cdf de renta, λ es un parámetro de escala y positivo pues es la exponencial de una constante de integración, y:

$$\beta = 1/\beta_2, \quad \delta = \beta_1 \beta_2, \quad (8.39)$$

son parámetros de desigualdad.

Se puede demostrar, analizando la segunda derivada de orden en (8.37) que:

(i) cuando $0 < \beta < 1$, la elasticidad de renta $\epsilon(F, y)$ es una función cóncava y decreciente de $F(y)$;

(ii) cuando $\beta > 1$, la elasticidad de la renta es convexa;

(iii) cuando $\beta = 1$, la elasticidad de renta es una función lineal y decreciente de F . Este caso concreto se corresponde con las distribuciones del cuadrado de la secante hiperbólica (Fisk, 1961) y loglogística (Dagum, 1975).

Obtenemos una especificación más general cuando tomamos desviaciones de $F(y)$ de un origen $\alpha < 1$, $\alpha \neq 0$, derivando así un modelo de cuatro parámetros. El parámetro α juega un papel importante en la modelización de las distribuciones de renta observadas. Si existe un porcentaje discreto de unidades económicas con renta nulas y negativas, entonces α será significativamente mayor que cero ($0 < \alpha < 1$).

Su valor responderá de las unidades económicas desempleadas y no cubiertas por ningún sistema de seguridad (renta nula), y de los propietarios de empresas no incorporadas con pérdidas netas (renta negativa) durante el período fiscal. Si existe una renta mínima garantizada o una cobertura universal del seguro de desempleo, entonces la distribución de renta observada empieza a partir de una renta positiva y . Este es el caso también cuando la encuesta solo incluye a las unidades económicas empleadas. De ahí, $y \geq y_0 > 0$, donde y_0 es la renta mínima, por lo tanto $\alpha < 0$. En este caso, $\alpha = F(0)$, que es la extrapolación de $F(y)$, para $y = 0$, y y_0 es la solución de $F(y_0) = 0$, es decir, cuando $F(y)$ interseca la abscisa y .

La especificación matemática del modelo de cuatro parámetros es:

$$\epsilon(F-\alpha, y) = \frac{d \log (F(y)-\alpha)}{d \log y} = \beta_1 \left(1 - \left(\frac{F(y)-\alpha}{1-\alpha} \right)^{\beta_2} \right) \quad (8.40)$$

$$y \geq y_0 \geq 0, \quad \alpha < 1, \quad (\beta_1, \beta_2) > 0,$$

$$F(y_0) = 0 \text{ if } \alpha < 0, \quad \text{and } y_0 = 0 \text{ if } 0 \leq \alpha < 1.$$

Resolviendo la ecuación diferencial (8.40) obtenemos el modelo de cuatro parámetros:

$$F(y) = \alpha + (1-\alpha)(1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta}, y \geq y_0 \geq 0, \quad (8.41)$$

$$\beta = 1/\beta_2, \delta = \beta_1 \beta_2, \lambda > 0, \alpha < 1.$$

El modelo (8.41) genera tres casos importantes y altamente relevantes para describir las distribuciones de renta observadas. Estos han sido expuestos arriba, pero los repasaremos aquí.

Caso 1: $\alpha = 0$ (El modelo de tres parámetros). Este es el modelo (8.38), generado por la ecuación diferencial (8.37). El rango de renta es el intervalo infinito abierto $(0, \infty)$. Este es el caso considerado por todos los modelos alternativos de distribución de renta en sus aplicaciones, con la excepción de las distribuciones Paretianas y log-normal desplazadas.

Caso 2: $0 < \alpha < 1$ (El modelo de cuatro parámetros para tratar las rentas nulas y negativas). Este caso es relevante cuando observamos a un porcentaje finito (estimado mediante α) de unidades económicas con rentas nulas y negativas. La especificación del modelo correspondiente a este segundo caso se da con la ecuación diferencial (8.40) con la restricción añadida $0 < \alpha < 1$. Su resolución se da en (8.41) y, teniendo en cuenta que α es positivo y menor que uno, podemos expresarlo de acuerdo con el teorema de descomposición de **Jordan**, que declara que toda distribución de probabilidad es mezcla de distribución atómica⁽¹⁾ y distribución continua de la forma:

$$F(y) = \alpha F_a(y) + (1-\alpha)F_c(y), 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (8.42)$$

Si $\alpha = 1$ ($\alpha = 0$), entonces la distribución es puramente atómica (continua). Observamos que, cuando $0 < \alpha < 1$, $[F(y) - \alpha F_a(y)] / (1 - \alpha)$ es una distribución continua. Podemos extender el teorema de descomposición de **Jordan** a la formación de una función de distribución de probabilidad como combinación convexa de dos o más funciones de distribución atómicas y/o continuas.

Se deduce de (8.41), (8.42) y $0 < \alpha < 1$, que

$$\begin{aligned}
F(y) &= \alpha F_a(y) + (1-\alpha)F_c(y), \quad 0 < \alpha < 1 \\
&= \alpha + (1-\alpha)(1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta}, \quad (\beta, \lambda, \delta) > 0, \\
F_a(0) &= 1, F_a(y) = 0 \quad \text{if } y < 0, \\
F_c(y) &= 0 \text{ if } y \leq 0, F_c(y) = (1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta} \text{ if } y > 0.
\end{aligned} \tag{8.42.a}$$

La pdf correspondiente a este caso es:

$$f(y) = \begin{cases} \alpha, & \text{if } y = 0 \\ (1-\alpha)\beta\lambda\delta y^{-\delta-1} (1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta-1}, & \text{if } y > 0, \\ 0, & \text{if } y < 0 \end{cases} \tag{8.43}$$

Caso 3: $\alpha < 0$ (El modelo de cuatro parámetros para tratar de la renta estrictamente positiva por encima del umbral de $y_0 > 0$). Las bases empíricas para este caso se dieron al principio de esta sección y la representación matemática se da con la ecuación diferencial (8.40), y la restricción $\alpha < 0$. Su resolución es:

$$\begin{aligned}
F(y) &= \alpha + (1-\alpha)(1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta}, \quad y \geq y_0, F(y_0) = 0, \\
\alpha &< 0, (\beta, \lambda, \delta) > 0,
\end{aligned} \tag{8.44}$$

que se puede escribir como:

$$F(y) = (1 + \lambda(y - y_0)^{-\delta})^{-\beta}. \tag{8.45}$$

La pdf correspondiente a este caso es:

$$f(y) = \begin{cases} \beta\lambda\delta(y - y_0)^{-\delta-1} (1 + \lambda(y - y_0)^{-\delta})^{-\beta-1}, & y \geq y_0, \\ 0, & y \leq y_0, \end{cases} \tag{8.46}$$

$$y_0 = \lambda^{1/\delta} [(1 - 1/\alpha)^{1/\beta} - 1]^{-1/\delta}. \tag{8.46.a}$$

(1) Un punto y es un átomo si lleva masa positiva. La distribución F es atómica si está concentrada en un conjunto de sus átomos. Una distribución sin átomos se llama continua (W. Feller, 1971, pp. 137-138).

8.4.2. Valores Modales y Percentiles de la Distribución.

Los valores modales (máximos interiores) para la función de distribución en los casos 1 y 2 se obtienen resolviendo la ecuación $F_c''(y) = 0$, como $F_c(y)$ y $F_c'(y) = F_c''(y)$ son funciones continuamente diferenciables para todo $y > 0$. Se deduce de (8.38) y (8.42.a) que $F(y)$ es unimodal (tiene máximo interior único) cuando $\beta\delta > 1$ y que es ceromodal (no tiene máximo interior) cuando $\beta\delta \leq 1$. En este último caso, el máximo está en $y = 0$, y por lo tanto, la pdf es una función estrictamente decreciente. Se puede demostrar, resolviendo la ecuación $F_c''(y) = 0$, que el máximo único Y_M de la distribución en los dos casos 1 y 2, es:

$$Y_M = \begin{cases} \lambda^{1/\beta} [(\beta\delta - 1)/(\delta + 1)]^{1/\beta}, & \beta\delta > 1 \text{ and} \\ 0, & \beta\delta \leq 1. \end{cases} \quad (8.47)$$

De la misma manera, se puede deducir que en el Caso 3 tenemos un máximo único Y_{M3} (unimodal si $\beta\delta > 1$, y ceromodal si $\beta\delta \leq 1$). Se deduce de (8.45) y (8.47) que:

$$Y_{M3} = \begin{cases} y_0 + Y_M, & \text{when } \beta\delta > 1, \text{ and} \\ y_0, & \text{when } \beta\delta \leq 1, \end{cases} \quad (8.48)$$

por lo tanto, el máximo para el Caso 3 se obtiene añadiendo las unidades y_0 al máximo correspondiente para Casos 1 y 2 dado en (8.47).

El percentil p^{α} , y_p , es la solución de la ecuación $F(y_p) = p$. Entonces se deduce de (8.38) (8.42) y (8.45),

$$y_p = \lambda^{1/\beta} (p^{-1/\beta} - 1)^{-1/\beta}, \alpha = 0 \quad (8.49)$$

$$\text{Caso 2} \quad y_p = \begin{cases} \lambda^{1/\beta} [((1-\alpha)(p-\alpha))^{1/\beta} - 1]^{-1/\beta}, & 0 < \alpha < p \\ 0, & p \leq \alpha < 1. \end{cases} \quad (8.50)$$

$$\text{Caso 3} \quad y_p = y_0 + \lambda^{1/\beta} (p^{-1/\beta} - 1)^{-1/\beta}, y_0 > 0. \quad (8.51)$$

Cuando $p = 1/2$, obtenemos la mediana de la distribución.

8.4.3. Momentos de la Distribución: Caso 1 ($\alpha = 0$)

De (8.38), la definición de momentos de orden r sobre el origen y la sustitución:

$$\begin{aligned} x &= \lambda y^{-\delta} (1 + \lambda y^{-\delta})^{-1}, \\ dy &= \frac{\lambda^{1/\delta}}{\delta} x^{-1-1/\delta} (1-x)^{-1+1/\delta} dx, \end{aligned} \quad (8.52)$$

deducimos:

$$\begin{aligned} \mu_r = E(Y^r) &= \beta \lambda^{r/\delta} \int_0^1 x^{-r/\delta} (1-x)^{\beta+r/\delta-1} dx \\ &= \beta \lambda^{r/\delta} B(1-r/\delta, \beta + r/\delta), r < \delta. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Es decir, el momento de orden r existe para todo $r < \delta$. Haciendo $r = 1$ en (8.53), obtenemos la esperanza matemática de la renta

$$\mu = E(Y) = \beta \lambda^{1/\delta} B(1-1/\delta, \beta + 1/\delta), \delta > 1, \quad (8.54)$$

donde $B(1 - 1/\delta, \beta + 1/\delta)$ es la función beta de Euler (8.34) con parámetros $m = 1 - 1/\delta$ y $n = \beta + 1/\delta$.

8.4.4. Momentos de la Distribución: Caso 2 ($0 < \alpha < 1$)

Se deduce de (8.42), (8.43) y de la definición de momentos de orden r sobre el origen, que

$$\mu_r = E(Y^r) = (1-\alpha)\beta\lambda\delta \int_0^\infty y^{r-\delta-1} (1 + \lambda y^{-\delta})^{-\beta-1} dy \quad (8.55)$$

y llevando a cabo la sustitución (8.52) obtenemos:

$$\mu_r = (1-\alpha)\beta\lambda^{r/\delta} B(1-r/\delta, \beta + r/\delta), r < \delta. \quad (8.56)$$

Haciendo $r = 1$, tenemos la esperanza matemática:

$$\mu = E(Y) = (1-\alpha)\beta\lambda^{1/\delta}B(1-1/\delta, \beta + 1/\delta). \quad (8.57)$$

8.4.5. Momentos de la distribución: Caso 3 ($\alpha < 0$)

Cuando $\alpha < 0$, el rango de la renta es $y_0 < y < \infty$, con $y_0 > 0$. Por lo tanto, comienza desde un valor positivo de renta y . De (8.46) y la definición de momentos de orden r sobre el origen, se deduce que

$$\mu_r = E(Y^r) = \beta\lambda\delta \int_{y_0}^{\infty} y^r(y-y_0)^{-\beta-1}(1 + \lambda(y-y_0)^{-\delta})^{-\beta-1} dy. \quad (8.58)$$

Llevando a cabo las sustituciones $u = y - y_0$ y (8.52) respectivamente, deducimos:

$$\mu_r = \beta \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} y_0^{-j} \lambda^{j/\delta} B(1-j/\delta, \beta + j/\delta), r < \delta. \quad (8.59)$$

Para $r = 1$:

$$\mu = E(Y) = y_0 + \beta\lambda^{1/\delta} B(1-1/\delta, \beta + 1/\delta), \delta > 1, \quad (8.60)$$

que es igual a la esperanza matemática correspondiente al Caso 1 ($\alpha=0$) deducida en (8.54) más el desplazamiento y_0 de y .

8.4.6. Enfoque econométrico al Caso 3 ($\alpha < 0$)

El siguiente es un método econométrico que utilizará los mismos programas de ordenador necesarios en Casos 1 y 2:

Paso 1: Aplicando el programa de ordenador para el Caso 2, calcular los parámetros usando la especificación (8.44) de este modelo.

Paso 2: Si α es negativo, encontrar la raíz y_0 de la ecuación $F(y) = 0$.

Paso 3: Trasladar el origen al punto $y = y_0$ y calcular el nuevo modelo de tres parámetros de la forma (8.36) con respecto a la nueva variable renta $y - y_0$.

Paso 4: Usando la fórmula (8.53), computar el momento μ_r , $r < \delta$. Simbolizando a este momento mediante $\mu(r; \alpha = 0)$, y mediante $\mu(r; \alpha < 0)$ cuando $\alpha < 0$, deducimos de (8.53) y (8.59):

$$\mu(r; \alpha < 0) = \sum_{j=0}^r (j) y_0^{j-1} \mu_j(\alpha = 0). \quad (8.61)$$

Para $r = 1$, obtenemos:

$$\mu(1; \alpha < 0) = y_0 + \mu(1; \alpha = 0), \quad (8.62)$$

es decir, son iguales a los resultados obtenidos en (8.59) y (8.60) respectivamente.

8.4.7. La curva de Lorenz: Caso 1 ($\alpha = 0$).

Resolviendo para y en (8.38), tenemos:

$$y = \lambda^{1/\beta} (F^{-1/\beta} - 1)^{-1/\beta}. \quad (8.63)$$

Sustituyendo (8.38), (8.54) y (8.63) en (4.5) y llevando a cabo la sustitución:

$$z = F^{1/\beta}, \quad dF = \beta z^{\beta-1} dz \quad (8.64)$$

$$L(F) = B(F^{1/\beta}; \beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta), \quad \delta > 1. \quad (8.65)$$

De (8.36) y (8.65) se deduce que la curva de Lorenz es una **cdf** beta con respecto a la variable $z = F^{1/\beta}$

8.4.8. La curva de Lorenz: Caso 2 ($0 < \alpha < 1$)

Resolviendo para y en (8.41) obtenemos:

$$y = \lambda^{1/\beta} [((1-\alpha)/(F-\alpha))^{1/\beta} - 1]^{-1/\beta}, \quad F \geq \alpha \quad (8.66)$$

Sustituyendo (8.41), (8.57), (8.66) en (4.5) y llevando a cabo la sustitución:

$$\begin{aligned} z &= [(F-\alpha)/(1-\alpha)]^{1/\delta} \\ dF &= (1-\alpha)\beta z^{\delta-1} dz \end{aligned} \quad (8.67)$$

tenemos:

$$L(F) = B([(F-\alpha)/(1-\alpha)]^{1/\delta}; \beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta), \delta > 1. \quad (8.68)$$

Por lo tanto, la curva de Lorenz es una cdf beta con respecto a la variable z según se especifica en (8.67).

8.4.9. La curva de Lorenz: Caso 3 ($\alpha < 0$)

Se puede demostrar de (4.5), usando (8.45), (8.60) y aplicando métodos de integración similares a los de antes, cuando $\delta > 1$, que

$$L(F) = \frac{y_0 F}{\mu} + \frac{\beta \lambda^{1/\delta}}{\mu} B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta) B(F^{1/\delta}; \beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta), \quad (8.69)$$

donde $\mu = \mu(1; \alpha < 0) = y_0 + \mu(1; \alpha = 0)$, como se deduce de (8.54), (8.60) y (8.62). Por lo tanto, para $\delta > 1$,

$$L(F) = \frac{y_0 F}{y_0 + \mu(1; \alpha = 0)} + \frac{\mu(1; \alpha = 0)}{y_0 + \mu(1; \alpha = 0)} B(F^{1/\delta}; \beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta). \quad (8.70)$$

8.4.10 El ratio de Gini $G = G(\alpha = 0)$: Caso 1.

Diferenciando (8.65), tenemos:

$$dL = \frac{F^{1/\delta} (1 - F^{1/\delta})^{-1/\delta} dF}{\beta B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta)}, \quad (8.71)$$

y sustituyendo en (5.2), deducimos:

$$G = -1 + \frac{2}{\beta B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta)} \int_0^1 F^{1/\delta} (1 - F^{1/\delta})^{-1/\delta} dF. \quad (8.72)$$

Llevando a cabo la sustitución $x = F^{1/\delta}$, obtenemos:

$$G = -1 + B(\beta, 2\beta + 1/\delta)/B(2\beta, \beta + 1/\delta). \quad (8.73)$$

Se deduce de (8.73) y (8.35) que,

$$G = G(\alpha = 0) = -1 + B(\beta, \beta)/B(\beta, \beta + 1/\delta), \quad (8.74)$$

donde el símbolo $G(\alpha = 0)$ indica que el ratio de Gini se obtiene del modelo de tres parámetros (caso 1).

8.4.11 El ratio de Gini $G = G(0 < \alpha < 1)$: Caso 2.

Diferenciando a (8.68), obtenemos:

$$dL = \frac{(F-\alpha)^{1/\delta}((1-\alpha)^{1/\delta} - (F-\alpha)^{1/\delta})^{-1/\delta} dF}{(1-\alpha)\beta B(\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta)}. \quad (8.75)$$

Sustituyendo (8.75) en (5.25) y llevando a cabo la sustitución:

$$x = (F-\alpha)^{1/\delta}/(1-\alpha)^{1/\delta}, \quad (8.76)$$

deducimos, utilizando (8.35):

$$G = G(0 < \alpha < 1) = (2\alpha - 1) + (1-\alpha)B(\beta, \beta)/B(\beta, \beta + 1/\delta). \quad (8.77)$$

Cuando $\alpha = 0$, obtenemos (8.74).

8.4.12. El ratio de Gini $G = G(\alpha < 0)$: Caso 3.

Diferenciando a (8.70) y utilizando (8.54), (8.60) y (8.62), deducimos:

$$dL = \frac{1}{y_0 + \mu(1; \alpha = 0)} \left(y_0 + \lambda^{1/\delta} F^{1/\delta} (1 - F^{1/\delta})^{-1/\delta} \right) dF. \quad (8.78)$$

De (5.2) y (8.78) y llevando a cabo la sustitución $x = F^{1/\delta}$,

$$G = G(\alpha < 0) = \frac{1}{y_0 + \mu(1; \alpha = 0)} \left[-\mu(1; \alpha = 0) + 2\beta\lambda^{1/\delta} B(2\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta) \right] \quad (8.79)$$

Al multiplicar ambos lados de (8.73) por $\mu(1; \alpha = 0)$, cuya expresión matemática se da en (8.54), tenemos:

$$\mu(1; \alpha = 0) G(\alpha = 0) = -\mu(1; \alpha = 0) + 2\beta\lambda^{1/\delta} B(2\beta + 1/\delta, 1 - 1/\delta) \quad (8.80)$$

Se deduce de (8.79) y (8.80) que

$$G(\alpha < 0) = \frac{\mu(1; \alpha = 0) G(\alpha = 0)}{y_0 + \mu(1; \alpha = 0)} \quad (8.81)$$

Se puede obtener el mismo resultado aplicando el teorema que se demostró en la sección 6, que expresa el coeficiente de Gini en función de la diferencia media de Gini, es decir:

$$G = \Delta_1/2, \quad (8.82)$$

donde G y μ simbolizan el ratio Gini y la esperanza matemática de renta para este caso.

Se deduce de la definición (6.1) de la diferencia media de Gini Δ_1 , que es invariante con respecto a los desplazamientos del origen de y . Por lo tanto:

$$\Delta_1(\alpha = 0) = \Delta_1(\alpha < 0) = \Delta_1. \quad (8.83)$$

De (6.2), (8.54), (8.60) y (8.83) se deduce que

$$G(\alpha < 0) = \frac{\Delta_1}{2\mu(1; \alpha < 0)} = \frac{\Delta_1}{2y_0 + 2\mu(1; \alpha = 0)} \quad (8.84)$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador entre $2\mu(1; \alpha = 0)$, obtenemos el resultado dado en (8.81).

Además de la importancia teórica del resultado obtenido en (8.81), éste tiene un papel clave en la estimación del ratio Gini cuando $\alpha < 0$. En este caso, aplicamos el modelo de tres parámetros a la distribución de $u = y - Y_0$.

, donde $F(y_0) = 0$. El programa de ordenador estimará los valores de $G(\alpha=0)$ y $\mu(1;\alpha=0)$ para la distribución de $y - y_0$. Sustituimos estas estimaciones en (8.81) y obtenemos el cálculo del ratio de Gini cuando $\alpha < 0$.

8.5. Una función de la proporción de fracasos como modelo de distribución de renta.

Basándose en el concepto de la función de la proporción de fracasos (**PFR**), que se ha aplicado extensivamente para deducir las distribuciones en la teoría de la fiabilidad y las distribuciones de tiempo de vida, **Singh y Maddala** (1976) derivaron un modelo para la distribución de la renta que pertenece a los sistemas de funciones de distribución acumulativa desarrollados por **Burr** (1942). Por definición

$$\text{PFR} = (dF/d \log y) / (1-F).$$

La **PFR** o el modelo **Singh-Maddala** de distribución de renta es la solución de una especificación de **PFR** creciente y acotada y puede expresarse de forma equivalente como la combinación de elementos de las distribuciones de **Pareto** y de **Weibull**, es decir,

$$dF/dy = ay^b(1-F)^c, y > 0, a > 0, b > -1, c > 1, \quad (8.85)$$

mientras la distribución de **Pareto** puede representarse con la ecuación diferencial

$$dF/dy = a(1-F)^{1+1/a}, y \geq y_0 > 0, a > 0,$$

y la distribución de **Weibull** con

$$dF/dy = ay^b(1-F), y > 0, b > -1.$$

A diferencia de la especificación de **Singh-Maddala**, el modelo de **Pareto** corresponde a una constante, y el modelo de **Weibull** corresponde a una especificación **PFR** creciente.

La solución de la ecuación diferencia (8.85) es

$$F(y) = 1 - (1 + a_1 y^{a_2})^{-a_3}, \quad y \geq 0, a_1 = a(c-1)/(b+1) > 0, \quad (8.86)$$

$$a_2 = b+1 > 0, a_3 = 1/(c-1) > 0.$$

La diferenciación de (8.86) da la pdf

$$f(y) = a_1 a_2 a_3 y^{a_2-1} (1 + a_1 y^{a_2})^{-a_3-1}. \quad (8.87)$$

Para analizar las propiedades de este modelo, como se ha hecho con los cuatro anteriores, se deducen aquí los momentos de orden r sobre el origen, la curva de Lorenz y el ratio de Gini.

Por definición del momento de orden r sobre el origen, obtenemos para este modelo,

$$E(Y^r) = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty y^{a_2+r-1} (1 + a_1 y^{a_2})^{-a_3-1} dy \quad (8.88)$$

Llevando a cabo la sustitución de la variable

$$x = a_1 y^{a_2} / (1 + a_1 y^{a_2}) \quad (8.89)$$

deducimos

$$E(Y^r) = \frac{r}{a_2 a_1^{r/a_2}} B(r/a_2, a_3 - r/a_2), \quad (8.90)$$

que claramente existe para $r < a_2 a_3$.

Para $r = 1$ obtenemos la esperanza matemática

$$E(Y) = \frac{1}{a_2 a_1^{1/a_2}} B(1/a_2, a_3 - 1/a_2), \quad (8.91)$$

que existe para $a_3 a_2 > 1$.

La solución de (8.86) con respecto a y es,

$$y = a^{-1/a_2} [(1-F)^{-1/a_2} - 1]^{1/a_2} \quad (8.92)$$

Sustituyendo (8.92) en (4.1) obtenemos para la curva de Lorenz,

$$L(p) = a_1^{-1/a_2} \int_0^p [1 - (1-F)^{-1/a_2} - 1]^{1/a_2} dF/E(Y) \quad (8.93)$$

Llevando a cabo la sustitución de la variable

$$v = 1 - (1-F)^{1/a_2} \quad (8.94)$$

y utilizando (8.91) deducimos,

$$L(F) = B(1 - (1-F)^{1/a_2}; 1 + 1/a_2, a_3 - 1/a_2) \quad (8.95)$$

que demuestra que la curva de Lorenz es una función de distribución beta acumulativa con respecto a la variable dada en (8.94) y con los parámetros $1 + 1/a_2$ y $a_3 - 1/a_2$, tal que $a_2 a_3 > 1$.

De (8.93) y (8.91) se deduce que,

$$dL/dF = a_1^{-1/a_2} [1 - (1-F)^{1/a_2}]^{1/a_2} (1-F)^{-1/(a_2 a_3)} / E(Y) \quad (8.96)$$

Colocando dL según se dedujo en (8.96) en la definición del ratio Gini como se especificó en (5.2), obtenemos, después de llevar a cabo la sustitución (8.94),

$$G = -1 + 2a_3 a_1^{-1/a_2} \int_0^1 (v^{1/a_2} (1-v)^{a_3 - 1/a_2 - 1} - v^{1/a_2} (1-v)^{2a_3 - 1/a_2 - 1}) dv / E(Y) \quad (8.97)$$

La forma final del ratio de Gini para la forma paramétrica (8.86) se deduce de (8.91) y (8.97). Es,

$$G = 1 - B(a_3, 2a_3 - 1/a_2) / B(2a_3, a_3 - 1/a_2) \quad (8.98)$$

9. Aplicaciones

Las pruebas empíricas demuestran que la distribución de **Pareto** es el modelo de los grupos de renta alta. Esto tiene un apoyo aplastante en la investigación teórica y cuantitativa (**Davis**, 1941; **Mandelbrot**, 1960; y **Budd**, 1970). **Davis** (1941, p. 387) establece la necesidad de especificar un modelo más completo, el cual tendría que incorporar el de Pareto para comprender plenamente los fenómenos asociados con la distribución de la renta total. Esta circunstancia manifiesta motivó la especificación de modelos alternativos de distribución de renta.

Cuatro de éstos son: el log-normal (**Gibrat**, 1931), el Gamma (**March**, 1898, y **Salem y Mount**, 1974), el modelo especificado por **Singh y Maddala** (1976) y el modelo propuesto por **Dagum** (1977). Estos son los modelos más usados o más prometedores que ofrecen una descripción precisa de todo el rango de la renta. También cubren en distinta medida, varias propiedades importantes (**Dagum**, 1979). Con el fin de hacer análisis y evaluación comparativos, estos cuatro modelos se aplican a la misma distribución de renta observada, es decir, la distribución de la renta familiar en los EE.UU. en 1960 y 1969 (U.S. Bureau of the Census, 1962 y 1970).

Las estimaciones de los parámetros de los modelos log-normal y gamma se obtienen con **Salem y Mount** (1974), empleando el método de probabilidad máxima. **Singh y Maddala** (1976) calculan los parámetros de su modelo utilizando el método no lineal de mínimos cuadrados y aplicando el algoritmo de Davidson-Fletcher-Powell. **Dagum** (1977) calcula el parámetro de su modelo usando el método no lineal de mínimos cuadrados y aplicando un algoritmo (Birta, 1976) que busca la minimización de la suma de los cuadrados de las desviaciones de la **cdf** real de la **cdf** aplicada. Las estimaciones correspondientes aparecen en la **Tabla 1**.

La **Tabla 2** resume el análisis comparativo de la bondad del ajuste para la distribución de la renta familiar en EE.UU. en los años 1960 y 1969. Se utiliza el método de **Cramer** (1978) para comprobar la hipótesis nula entre modelos que tienen distintos grados de libertad. Si los modelos tienen los mismos grados de libertad, entonces el estadístico **F** es el cociente de las respectivas sumas de sus desviaciones al cuadrado. Adoptando un nivel de

significación de 5%, la mejora en SS es:

- (i) No significativa para el modelo gamma con respecto al log-normal.
- (ii) No significativa para el modelo Singh-Maddala con respecto al gamma.
- (iii) Significativa para el modelo Singh-Maddala con respecto al log-normal.

Tabla 1
Estimaciones de parámetros

1960, Renta de Familia de EEUU				
Lognormal	$\mu = 8.4946$	$\sigma = 0.7513$		
Gamma	$\alpha = 0.32418^*$	$\lambda = 2.06$		
Singh-Maddala	$a_1 = 0.2931^*$	$a_2 = 1.992$	$a_3 = 2.803$	
Dagum (Case 2, $\alpha > 0$)	$\alpha = 0.0209$	$\beta = 0.381$	$\lambda = 6513.9^*$	$\delta = 4.1095$
1969, Renta de Familia de EEUU				
Lognormal	$\mu = 9.0264$	$\sigma = 0.6041$		
Gamma	$\alpha = 0.23455^*$	$\lambda = 2.43$		
Singh-Maddala	$a_1 = 0.3101^*$	$a_2 = 2.131$	$a_3 = 2.611$	
Dagum (Case 1, $\alpha = 0$)	$\beta = 0.348$	$\lambda = 117785.4^*$	$\delta = 4.3734$	

* Corresponde a renta medida en 10^{-3} de dolares U.S.

Tabla 2
Análisis de varianza de sumas de cuadrados residuales
(Distribución de renta de familia en EEUU)

	SS = $\sum u^2$	df.	MSE	F
1960				
Lognormal	0.01187	7	0.001696	F(7,7) = 3.04
Gamma	0.00391	7	0.000559	
Singh-Maddala	0.00261	6	0.000435	F(6,6) = 12.0
Dagum	0.00066	5	0.000132	
Dif. Gamma-(S-M)	0.00130	1	0.001300	F(1,6) = 2.99
(S-M)-Dagum	0.00195	1	0.001950	F(1,5) = 14.8
1969				
Lognormal	0.00752	7	0.001074	F(7,7) = 3.16
Gamma	0.00238	7	0.000340	
Singh-Maddala	0.00156	6	0.000260	F(6,6) = 12.0
Dagum	0.00013	6	0.000022	
Dif. Gamma-(S-M)	0.00082	1	0.000820	F(1,6) = 3.15

Nota: SS = la suma de las desviaciones cuadradas de las frecuencias observadas de sus correspondientes probabilidades pronosticadas.

df = grados de libertad iguales al numero (n) de intervalos de clase menos el numero (k) de parámetros en el modelo menos uno (puesto que la suma de frecuencias es igual a uno).

MSE = Error Medio Cuadrático

Los estadísticos F, para un nivel de significación de 5%, son:

$F_{.95}(1,5) = 6.61$, $F_{.95}(1,6) = 5.99$, $F_{.95}(6,6) = 4.28$ and $F_{.95}(7,7) = 3.79$.

(iv) Significativa para el modelo de Dagum con respecto al modelo Singh-Maddala y, *a fortiori*, con respecto al gamma y al lognormal.

La **Tabla 3** presenta las rentas medianas y medias observadas y estimadas. No incluye los valores estimados para los modelos gamma y Singh-Maddala. Esto se debe a que en el primer caso, una ecuación de probabilidad iguala la media observada y estimada y, por lo tanto,

Tabla 3
Valores observados y estimados de la mediana y de la media
(en dolares U.S. actuales)

Año y Modelo	Renta Mediana		%	Renta Media		%	
	Observada	Estimada		de dif.	Observada		Estimada
<i>1960</i>							
Lognormal	5620	4888	13.02	6227	6482	4.10	
Dagum	5620	5592	0.50	6227	6212	0.16	
<i>1969</i>							
Lognormal	9867	8320	15.68	10577	9985	5.60	
Dagum	9867	9466	0.16	10577	10433	1.36	

son idénticas, y en el último caso no se recoge en Singh y Maddala (1976). Se deduce de (8.9), que la mediana estimada para la distribución log-normal es la solución **M** en la ecuación:

$$\Lambda(M; \mu, \sigma^2) = N((\log M - \mu)/\sigma; 0, 1) = 1/2 \quad (9.1)$$

que se verifica para $\log M - u = 0$, y de ahí:

$$M = e^u. \quad (9.2)$$

Para el modelo especificado por **Dagum**, aplicamos (8.50), dado $p = 1/2$, para obtener la mediana de la renta familiar de EE.UU. en 1960, dado que $0 < \alpha < 1$

(Caso 2), y aplicamos (8.49) dado $p = 1/2$ para obtener la mediana de la renta familiar de los EE.UU. en 1969, como $\alpha = 0$ (Caso 1).⁽¹⁾

Introduciendo los cálculos de parámetro apropiados de la Tabla 1 en las fórmulas de esperanza matemática deducidas para el log-normal, fórmula (8.10), el gamma, fórmula (8.28) y el modelo de Dagum, fórmula (8.57) cuando $0 < \alpha < 1$, y fórmula (8.54) cuando $\alpha = 0$, obtenemos las estimaciones medias de renta de los EE.UU. para 1960 y 1969.

La Tabla 4 muestra las estimaciones de los ratios Gini para cada uno de los cuatro modelos analizados y los límites propuestos por Gastwirth (1972) para la renta familiar de los EE.UU. en 1969, distribuido en 10 intervalos de clase.

Tabla 4
Los límites de Gastwirth y los coeficientes estimados de Gini
(renta familiar de EEUU en 1969)

Límites		Estimado Coeficiente de Gini			
Superior	Inferior	Log-normal	Gamma	S-M	Dagum
0.326	0.356	0.331	0.355	0.343	0.335

Gastwirth y Smith (1972, p. 320) declaran que "de cualquier distribución aplicada cuyo índice teórico de Gini cae fuera de los límites por una cantidad significativa se debe declarar que se ajusta inadecuadamente a los datos". Se deduce de esta declaración y de la Tabla 4 que los cuatro modelos aceptan la prueba de bondad del ajuste propuesto por Gastwirth (1972), por lo tanto, a todos se les debe declarar ajustados **adecuadamente** a los datos. Pero la Tabla 2 sugiere que no se puede aceptar esta conclusión. Nos dice que el modelo propuesto por Dagum se ajusta mucho mejor que el log-normal, el gamma y el Singh-Maddala, pero no nos dice todavía que estos modelos se ajustan inadecuadamente a los datos.

(1) Caso 3, cuando $\alpha < 0$, se explicará más tarde en esta sección con un caso real (Sección 9.1)

Para responder a esta pregunta, proponemos la prueba **Kolmogorov-Smirnov** de bondad del ajuste. En esta prueba, la distribución teórica es el modelo ajustado correspondiente.

La **Tabla 5** incorpora la distribución acumulativa de renta familiar observada para los EE.UU. en 1969 y las distribuciones acumulativas ajustadas correspondientes usando los modelos log-normal, gamma y Dagum, respectivamente. El límite de aceptación para la prueba **Kolmogorov-Smirnov** de bondad de ajuste, al nivel de significación de 5% y para un tamaño de muestra $n = 34665$ unidades familiares, es (en porcentaje) $100D_n(0.05) = 136/\sqrt{n} = 0.73$. Se rechaza la distribución ajustada $F(y)$ si $D_n = \sup_{\{y\}} [F_n(y) - F(y)]$ excede

al límite de aceptación para un nivel de significación dado. Se observa en la **Tabla 5** que la bondad del ajuste sólo se acepta para el modelo propuesto por **Dagum** (1977). Por lo tanto, se debe declarar que este modelo se ajusta a los datos adecuadamente, mientras se debe declarar que los modelos log-normal y gamma se ajustan a los datos inadecuadamente.

Tabla 5
Distribución de renta familiar en EEUU en 1969 y la estadística Kolmogorov-Smirnov (K-S)*

Renta (en \$ 1000)	Distribución de Renta Cumulativa (en %)			
	Observed	Lognormal	Gamma	Dagum
1	1.6	0.02	0.94	1.74
2	4.7	0.91	3.74	4.98
3	9.3	4.55	8.59	9.21
4	14.6	11.31	14.64	14.25
5	20.0	20.04	21.60	19.96
6	25.9	29.46	28.90	26.22
7	32.3	38.59	36.24	32.90
10	54.0	61.79	54.41	53.79
15	80.7	83.64	79.47	80.79
∞	100.00	100.00	100.00	100.00
K-S Statistic		$D_n = 7.79$	$D_n = 3.94$	$D_n = 0.60$

* El límite de aceptación para la prueba K-S en el nivel de significación de 5% es, en porcentaje,
 $136/\sqrt{34665} = 0.73$.

Además, los resultados obtenidos con la prueba **Kolmogorov-Smirnov** (Tabla 5) invalidan a los resultados de la prueba **Gastwirth** (Tabla 4). Esto se ve en la **Figura 5**, que muestra el histograma para la distribución observada de la renta familiar en los EE.UU. en 1969 y los modelos ajustados log-normal, gamma y Dagum. La insuficiencia de la prueba de bondad del ajuste de **Gastwirth** tiene su origen en su incapacidad para discriminar entre un buen ajuste y un ajuste malo, cuando la curva de Lorenz ajustada interseca a la curva de Lorenz observada, y el ratio de Gini permanece casi constante. La **figura 6** demuestra este caso, donde las zonas rayadas verticales y horizontales son iguales. Por lo tanto, el ratio de Gini calculado de la distribución ajustada $F(L)$ es igual al verdadero ratio de Gini asociado con $L_n(F)$, y dando por supuesto la simetría, es igual a punto central de los límites de **Gastwirth**.

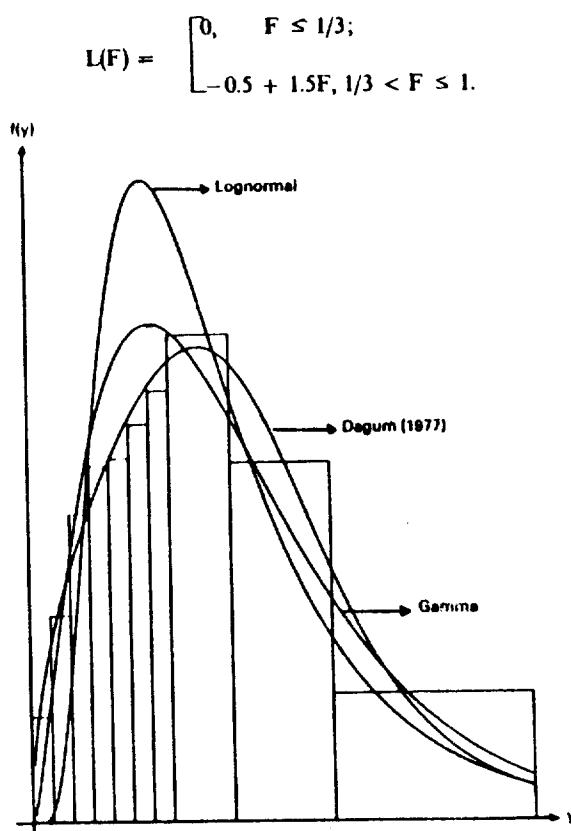


Figura 5

Distribución observada y ajustada de la renta familiar en EE.UU. para 1969

El siguiente ejemplo demuestra la insuficiencia de la prueba de **Gastwirth** de bondad de ajuste. Dando por supuesto que la verdadera curva de Lorenz es como la de la **Figura 6**, y que su ratio de Gini asociado es $G = 1/3$, entonces la siguiente curva de Lorenz falsa tiene también $G=1/3$:

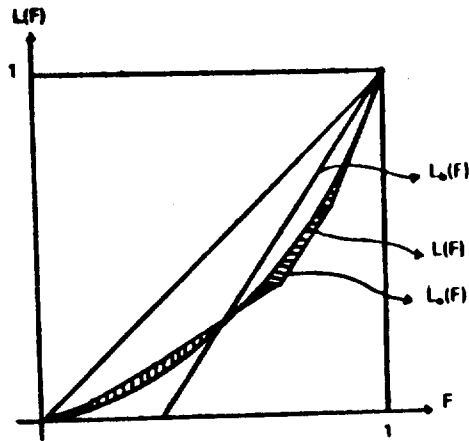


Figura 6

Curvas de Lorenz observada $L_o(F)$, ajustada $L(F)$ y falsa $L_b(F)$.

Según **Gastwirth y Smith**, se declararía que esta curva de Lorenz se ajusta adecuadamente a los datos. Se puede demostrar también que para cada ratio de Gini existe un número infinito de curvas de Lorenz (recuérdese que el ratio de Gini es un funcional; véase la nota 2), y naturalmente no se puede declarar que todas ellas se ajustan de forma adecuada a los datos.

9.1. Ajuste del modelo (8.41) cuando $\alpha < 0$ (Caso 3).

El modelo analizado en la **Sección 8.4** fué aplicado a las distribuciones de renta familiar en EE.UU. en 1960 y 1969, que corresponden al **Caso 2** y al **Caso 1** respectivamente (véase **Tabla 1**). En efecto, el modelo ajustado a los datos de 1960 dió un estimado $\alpha > 0$ (**Caso 2**), y al ajustarlo a los datos de 1969, dió un estimado $\alpha = 0$ (**Caso 1**). La siguiente aplicación ofrece un ejemplo del **Caso 3**, es decir, cuando $\alpha < 0$.

Se aplicó el modelo (8.41) a la distribución de renta de las unidades de familia en el Reino Unido en 1972/1973 (United Kingdom Central Statistics Office, 1976). El modelo estimado pertenece al Caso 3, puesto que $\alpha = -0.1318$. Aplicando (8.46.a), la estimación correspondiente de y_0 es:

$$y_0 = 0.225, \text{ in } 10^{-3} \text{ LIBRAS} \quad (9.3)$$

Llevando a cabo un traslado de ordenada, de tal manera que el origen nuevo tenga las coordenadas $(y_0, 0) = (0.225, 0)$ y aplicando el modelo (8.38), obtenemos el cálculo de (8.45):

$$F(y) = [1 + 34.945(y - 0.225)^{-4.0914}]^{-0.22267} \quad (9.4)$$

$$y \geq 0.225, \quad SS = \Sigma \mu^2 = 0.00052.$$

La mediana y la media estimadas de la distribución ajustada (9.4) son (en \mathcal{X}), aplicando (8.51) para $p = 1/2$, y (8.60) respectivamente:

$$M_d = 225 + 1126 = 1351, \quad \text{and } E(Y) = 225 + 1343 = 1568, \quad (9.5)$$

donde $\mu(1; \alpha=0) = 1343$ libras.

Aplicando (8.70), la curva de Lorenz es:

$$L(F) = 0.1435F + 0.8565B(F^{4.491}; 0.4671, 0.7556), \quad (9.6)$$

donde $B(\cdot)$ es la beta cdf

Aplicando (8.74), el ratio de Gini correspondiente a (9.4) es:

$$G(\alpha = 0) = 0.4285. \quad (9.7)$$

Esta es una sobreestimación del ratio de Gini, pues se obtuvo tras llevar a cabo una sustracción constante (absoluta) de 0.225 (en miles de libras) a la variable renta. La estimación paramétrica del ratio de Gini correspondiente a la distribución de renta original, se obtiene aplicando (8.80)

donde $\mu(1; \alpha = 0) = 1343$ es la esperanza matemática de $Y - Y_0$, $Y_0 = 225$, y $G(\alpha = 0)$ se da en (9.7). Por lo tanto:

$$G = G(\alpha < 0) = 0.8565 G(\alpha = 0) = 0.367 \quad (9.8)$$

De (9.8) se deduce que el factor de corrección para la distribución de renta de las unidades de familia en el Reino Unido en 1972/73 es igual a 0.8545.

10.- Conclusión.

Este estudio introduce la función de generación de renta como base y concepto fundamental para el análisis de la distribución de renta por tamaño. Es una función de las existencias de recursos humanos (**h**) y físicos (**k**) de las unidades familiares. Ciertas características específicas de esta función, que puede considerarse también como la **función de la producción de la renta familiar**, incluyen los conceptos de: (i) la función iso-renta; (ii) la función condicional de generación de renta de **k**, dada **h**, y (iii) la función condicional de generación de renta de **h**, dada **k**. La especificación y la estimación econométrica de la función de generación de renta y sus relaciones derivadas puede contribuir tanto a la explicación de las distribuciones y desigualdades de las rentas observadas, como al diseño de una política significativa y factible de rentas.

Empezando por la función de generación de la renta, se derivan sucesivamente la función de distribución acumulativa de la renta, la curva de Lorenz y el ratio de Gini. De éstos, tenemos el siguiente juego de representaciones:

$$\phi : R_2^+ \rightarrow R^+ \quad (10.1)$$

$$F : R^+ \rightarrow [0, 1) \quad (10.2)$$

$$L : [0, 1) \rightarrow [0, 1) \quad (10.3)$$

$$G : \{L(F)\} \rightarrow [0, 1) \quad (10.4)$$

donde (10.1)-(10.3) son funciones y (10.4) es un funcional.

De (10.1)-(10.3) obtenemos la siguiente composición de funciones:

$$L \times F \times \phi : R_+^* \rightarrow [0, 1) \quad (10.5)$$

y finalmente, a cada $L \in \{L(F)\}$ hay asociado un número real en $(0, 1)$, que es el ratio de Gini.

Se estudian y analizan cinco modelos de distribución de renta - Pareto (1896), log-normal (Gibrat, 1931), Gamma (March, 1898; y Salem y Mount, 1974), Singh y Maddala (1976), y Dagum (1977) - además de sus correspondientes curvas de Lorenz y ratios de Gini. Las aplicaciones se ocupan de los últimos cuatro modelos, ya que el modelo de Pareto sólo es eficaz cuando se trata de grupos de renta alta, es decir, las distribuciones de renta truncada.

La aplicación comparativa de estos modelos a las distribuciones de renta familiar de los EE.UU. en 1960 y 1969 demuestra que la mejora en la suma de los cuadrados de los residuos, adoptando un nivel de significación de 5% (Tabla 2) es:

- (i) No significativa para el modelo gamma con respecto al log-normal.
- (ii) No significativa para el modelo Singh-Maddala con respecto al gamma.
- (iii) Significativa para el modelo Singh-Maddala con respecto al log-normal.
- (iv) Significativa para el modelo de Dagum con respecto al Singh-Maddala y *a fortiori*, con respecto al gamma y al log-normal, pues en los dos últimos la suma de residuos al cuadrado es mayor.

Aparte de tener una mejora estadísticamente significativa en la bondad del ajuste, el modelo especificado por Dagum (1977) puede ocuparse de las tres posibles gamas de renta siguientes:

- (a) Caso 1, $\alpha = 0$: La gama de renta es el intervalo abierto $(0, \infty)$ y, tenemos un modelo de tres parámetros.

(b) **Caso 2, $0 < \alpha < 1$:** Existe un porcentaje finito de unidades económicas, α , con rentas nulas y negativas. La estimación de α da cuenta de las unidades económicas desempleadas que no están cubiertas por ningún sistema de seguridad social (renta nula) y de los propietarios de empresas no-incorporadas con pérdida neta (renta negativa) durante el período fiscal. Para este caso, el teorema de descomposición de **Jordan** es relevante.

(c) **Caso 3, $\alpha < 0$:** La gama de ingresos es el intervalo abierto (y_0, ∞) tal que $y > 0$. Esta gama de renta estrictamente positiva puede observarse cuando se implementa una política de renta mínima garantizada, o cuando el diseño de la encuesta por muestra solo incluye a las unidades económicas empleadas.

Se analizan los límites propuestos por **Gastwirth** (1972) para probar la bondad del ajuste de los modelos de distribución de renta. Se demuestra que esta prueba es inadecuada puesto que no puede discriminar entre un buen ajuste y un mal ajuste cuando la curva de Lorenz de la última interseca a la curva de Lorenz verdadera sin cambiar el tamaño de la zona de concentración (la zona entre la línea de igualdad perfecta $F = L$ y la curva de **Lorenz**). Esta valoración de la prueba de Gastwirth se **demuestra** con la aplicación de cuatro modelos a la distribución observada de la renta familiar en EE.UU. en 1969 (Tablas 1, 2 y 4). Aunque los modelos log-normal y gamma tienen ajustes muy pobres (**Tabla 2**), aprueban la prueba propuesta por Gastwirth (**Tabla 4**). Utilizando los modelos ajustados, se aplica la prueba de bondad del ajuste de Kolmogorov-Smirnov (**Tabla 5**). Esta prueba rechaza, en el nivel de significación de 5%, la bondad del ajuste para los modelos log-normal y gamma, y acepta la bondad del ajuste del modelo propuesto por Dagum.

El **Caso 3 ($\alpha < 0$)** del modelo de Dagum se demuestra con la distribución de renta de unidades de familia del Reino Unido en 1972/73.

La introducción de la función de generación de renta ofrece una especificación básica conceptual y analítica para: (i) establecer la conexión entre la distribución de renta funcional (participación del factor) y la personal (tamaño); (ii) dar una explicación coherente de la oferta y demanda de re-

cursos humanos y activos físicos, y (iii) integrar como un entero una teoría significativa de la producción y la distribución. Para esto, hay que tener en cuenta los modos observados de acción e interacciones (conflicto, colaboración y coalición) de los agentes económicos (Perroux, 1975, p.7), los métodos de producción y las relaciones sociales de la producción. Aunque esto hoy es un campo activo de investigación, pertenece todavía a la frontera de las económicas. Al contrario de las ciencias físicas, donde la búsqueda de causas finales resulta vana, las económicas, como ciencia social, tienen que integrar de una manera coherente a dos de sus dimensiones fundamentales, la explicativa (positiva), y la teleológica. Esta integración pertenece también a la frontera de las económicas.

REFERENCIAS

- AITCHISON, J., and BROWN, J.A.C. (1957), "The Lognormal Distribution: With Special Reference to Economic", Cambridge University Press, 1957.
- AMMON, O. (1895), "Die Gesellschaftsordnung und ihre Natürlichen Grundlagen", Jena.
- AMOROSO, L. (1924-1925), "Ricerche Intorno Alla Curva dei Redditi", *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, Serie 4-21, Vol. II, pp. 123-157.
- ATKINSON, A.B. (1970), "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, Vol. 2, pp. 244-263.
- BARTELS, C.P.A. (1977), *Economic Aspects of Regional Welfare*, Leiden, Martinus Nijhoff Social Sciences Division.
- BEACH, Ch. (1976), "Cyclical Impacts on the Personal Distribution of Income", *Economic and Social Measurement*, Vol. 5, No. 1, pp. 29-52.
- BIRTA, L.G. (1978), "OPTPAK, A Program Package for Unconstrained Function Minimization", Technical Report TR76-02 (1978), University of Ottawa, 22 pages.
- BUDD, E.C. (1970), "Distribution Issues: Trends and Policies. Postwar Changes in the Size Distribution of Income in the U.S.", *A.E.R.*, Vol. 60, No. 2, pp. 247-260.
- BURR, I.W. (1942), "Cumulative Frequency Functions", *Annals of Mathematical Statistics*, V. 13, N. 1, pp. 215-232.
- CRAMER, H. (1946), "Mathematical Methods of Statistics", Princeton, Princeton University Press.
- CRAMER, J.S. (1978), "A Function for Size Distribution of Incomes: Comment", *Econometrica*, Vol. 46, No. 2, pp. 459-460.
- DAGUM, C. (1975), "A Model of Income Distribution and the Conditions of Existence of Moments of Finite Order", *Proceedings of the 40th Session of the International Statistical Institute*, Vol. XLVI, Book 3, Warsaw, pp. 196-202.
- DAGUM, C. (1977), "A New Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation", *Economie appliquée*, Vol. XXX, No. 3, pp. 413-436.
- DAGUM, C. (1978), "Toward a General Model of Production and Distribution", *Hommage à François Perroux*, Presses Universitaires de Grenoble, pp. 539-553.
- DAGUM, C. (1979), "Generating Systems and Properties of Income Distribution Models", Paper presented at the Conference on Canadian Incomes, May 10-12, 1979, 24 pages.
- DAGUM, C., and THEORET, C. (1978), "The Impact of the Composition of Income Upon the Size Distribution of Income", *Studi in Onore di G. Demaria*, Padova, CEDAM, pp. 907-926.
- DALTON, H. (1920), "The Measurement of the Inequality of Incomes", *Economic Journal*, Vol. 30, pp. 348-361.
- DAVIS, H.T. (1941), "The Analysis of Economic Time Series", Bloomington (Indiana), The Principia Press.
- FELLER, W. (1971), "An Introduction to Probability Theory and its Applications", Vol. 2, New York, John Wiley and Sons.
- FIKSK, P.R. (1961), "The Graduation of Income Distribution", *Econometrica*, Vol. 29, No. 2, pp. 171-185.
- GASTWIRTH, J.L. (1972), "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", *Review of Economics and Statistics*, 54, pp. 306-316.

- GIASIWIRTH, J.L., and SMITH, J.T. (1972), "A New Goodness of Fit Test", *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics*, pp. 320-322.
- GIORAI, R. (1931), "Les inégalités économiques", Paris, Sirey.
- GINI, C. (1909), "Il diverso accrescimento delle classi sociali e la concentrazione della ricchezza", *Giornale degli Economisti, Serie II, Vol. XXXVII*.
- GINI, C. (1912), "Variabilità e mutabilità", *Studio Economicogiuridici, Università di Cagliari, Anno III, Parte 2a*, Reprinted in C. Gini (1955), pp. 211-382.
- GINI, C. (1914), "Sulla Misura della Concentrazione e della Variabilità dei Caratteri", *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, Reprinted in C. Gini (1955), pp. 411-459.
- GINI, C. (1955), "Memorie di Metodologia Statistica", V. I: *Variabilità e Concentrazione*, Edizioni aggiornata a cura di E. Pizetti e T. Salvemini, Roma, Libreria Eredi Virgilio Veschi.
- JOHNSON, N.L., and KOZS S. (1970), "Continuous Univariate Distributions", New York, John Wiley & Sons.
- LEBERGOTT, S. (1964), "Factor Shares in the Long Term: Some Theoretical and Statistical Aspects", in *Studies in Income and Wealth*, Princeton University Press, Vol. 27, pp. 53-86.
- LORENZ, M.O. (1905), "Methods of Measuring the Concentration of Wealth", *American Statistical Association, New Series, No. 70*, pp. 310-319.
- MANDELBROT, B. (1960), "The Pareto-Lévy Law and the Distribution of Income", *International Economic Review*, 1. May, pp. 79-106.
- MARCHI, L. (1898), "Quelques exemples de distribution de salaires", *Journal de la Société Statistique de Paris*, pp. 193-206 and 241-248.
- METCALF, Ch. (1972), "An Econometric Model of the Income Distribution", Chicago: Markham Publishing Company.
- MCAULISTER, D. (1879), "The Law of the Geometric Mean", *Proceedings of the Royal Society*, Vol. 29, p. 367.
- PARETO, V. (1895), "La Legge della domanda", *Giornale degli Economisti*, Gennaio 1895, pp. 59-68.
- PARETO, V. (1896), *Ecrits sur la Courbe de la Répartition de la Richesse*, Œuvres complètes de Vilfredo Pareto publiées sous la direction de Giovanni Busino, Genève, Librairie Droz, 1965.
- PARETO, V. (1897), *Cours d'Economie politique*, Lausanne, Rouge. New Edition by G.H. Bousquet et G. Busino (1964), Genève, Librairie Droz.
- PERROUX, François (1975), *Unités actives et Mathématiques nouvelles* (Révision de la théorie de l'équilibre économique général), Paris, Dunod.
- SALEM, A.B.Z., and MOUNT, T.D. (1974), "A Convenient Descriptive Model of Income Distribution", *Econometrica*, Vol. 42, No. 6, pp. 1115-1127.
- SINGH, S.K., and MADDALA, G.S. (1976), "A Function for Size Distribution of Incomes", *Econometrica*, Vol. 44, No. 5, pp. 969-970.
- THEIL, H. (1967). "Economics and Information Theory" Amsterdam, North-Holland Publishing Company.
- THURLOW, L. (1970), "Analyzing the American Income Distribution", *American Economic Review*, Vol. 48, pp. 261-269.
- TUCKMAN, H.P., and BROSCHE, G. (1974), "Changes in Personal Income and Their Effect on Income Shares", *Southern Economic Journal*, pp. 78-96.
- United Kingdom Central Statistical Office (1976), "National Income and Expenditure 1965-75", London, Her Majesty's Stationery Office.
- U.S. Bureau of the Census: "Income of Families and Persons in the United States", Current Population Reports, Series P-60, No. 37 (1962), and No. 75 (1970), Washington, U.S. Government Printing Office.

**SOBRE LA RELACION ENTRE LAS MEDICIONES DE DESIGUALDAD
DE RENTA Y LAS FUNCIONES DEL BIENESTAR SOCIAL**

Camilo Dagum

UNIVERSIDAD DE OTAWA, OTAWA, CANADA K1N 6N5

Los principios de aversión a la desigualdad y aversión a la pobreza de la sociedad se presentan como asunciones primitivas, a partir de los cuales se deduce el principio de transferencias de **Pigou-Dalton**. Dichos principios también comprueban la cuasiconcavidad de la función de utilidad (incremento de bienestar social) y la cuasiconvexidad de la función de desutilidad (disminución de bienestar social) de cada unidad económica, que permite dividir esta renta en (1) incremento de bienestar social y (2) disminución de bienestar social. Se usa el resultante marco analítico para discutir y analizar las bases del bienestar social de desigualdad de renta y a la inversa. Se consideran cuatro mediciones de desigualdad de renta y las funciones implicadas del bienestar social: **Theil, entropía generalizada, Atkinson y Gini**.

1. Introducción

Con su importante contribución, **Dalton (1920)** discute la evaluación de bienestar social (**BS**) de las distribuciones de la renta, que proporciona una base de BS para la clasificación de distribuciones alternativas de renta. **Atkinson (1970)** sigue el método de **Dalton** y además asume 'una función aditiva, separable y simétrica de rentas individuales' (pág. 244). Sin embargo, las funciones de utilidad individualísticas, como especifican **Dalton** y **Atkinson**, no concordarían con los valores sociales porque su especificación ignora la renta de otros miembros de la sociedad. No es el caso con la interpretación de BS del ratio de **Gini**, lo cual está respaldado por una función de utilidad social dado que cada unidad económica toma en consideración tanto su propia renta como la renta de otras unidades económicas.

Varios otros autores han discutido las relaciones entre funciones de BS y los ratios de desigualdad de renta. Entre ellos, **Blackorby** y **Donalson (1978)** deducen la función de BS para las mediciones de desigualdad y los coeficientes de variación de **Gini**, **Theil**, **Atkinson** y **Pearson**. Para el ratio de **Gini**, **Sen (1974)** y **Kakwani (1980)** obtienen resultados parecidos. **Benedetti (1980, 1986)** discute la interpretación de BS de **Gini** y otros ratios de desigualdad por medio de la especificación de un ratio de desigualdad de BS. **Ferreri (1978 a,b)** y **Giorgi (1984)** también tratan de este tema.

Este papel presenta y analiza una ecuación fundamental de renta que respalda una doble relación entre las funciones de BS y las mediciones de desigualdad de renta. Se tratan del espacio de funciones de utilidad o incrementos de bienestar social en BS y el espacio de funciones de desutilidad o disminución de bienestar social en la desigualdad de renta (I). Este enfoque hace hincapié en el hecho de que a cada función de BS la corresponde una medición de desigualdad de renta y a la inversa.

Dada una población de unidades económicas y comenzando a partir de la renta y_i del *iésimo* miembro, se mostrará que se puede deducir tanto una medición de desigualdad de renta a partir de una función de BS, también como una función de SB a partir de una medición de desigualdad de renta. Como consecuencia, ya no se puede aplicar la importante clasificación de **Sen (1973, p. 24)** de mediciones de desigualdad de renta, basada en fundamentos (i) estadísticos, (ii) informacionales, y (iii) de bienestar social. Se debería reemplazar la clasificación de **Sen** por una que toma en consideración el tipo de base lógica que respalda las especificaciones de la desigualdad de renta, por ejemplo, (a) existencia de fundamentos económicos y estadísticos, (b) por analogía, y (c) especificaciones ad hoc.

Se organiza esta investigación de la siguiente manera. La sección 2 presenta dos principios básicos para tratar los temas de desigualdad de renta y bienestar social. La sección 3 especifica y analiza una ecuación fundamental de renta por la cual la renta de cada unidad económica se divide en dos componentes básicos: incremento de bienestar social y disminución de bienestar social. La sección 4 presenta una interpretación de BS de mediciones de desigualdad de **Theil**, **atropía generalizada**, **Atkinson** y **Gini**. En la sección 5, se dan tres ejemplos para demostrar el desarrollo teórico de este estudio, y la sección 6 presenta las conclusiones.

2. Dos principios básicos que tratan de la desigualdad de renta y el bienestar social

En esta sección demostraremos que una medición de desigualdad de renta que satisface el principio de transferencia de **Pigou-Dalton** es la esperanza matemática de una función convexa de renta, $V(y) = V(F(y))$.

Para una medición de desigualdad normalizada, el operador I es una funcional que dibuja el conjunto de funciones $\{V(\cdot)\}$ en el intervalo de unidad $[0,1]$, es decir,

$$I: \{V(F(y))\} \rightarrow [0,1] \quad \text{and} \quad I(F) = I(F(y)) = E(V(\bar{y})), \quad (1)$$

donde el símbolo $V(F(y))$ enfatiza la dependencia de V sobre la distribución de renta $F(y)$. Para una especificación de V utilitaria (individualística) tenemos $V = V(y)$, es decir, una función solamente de la renta de la unidad económica.

$V(F(y))$ representa la función de desutilidad o disminución de bienestar social de una renta y , dada la distribución de la renta $F(y)$, donde la masa de la renta iguala la masa de la unidad. Entonces I y V no tienen dimensión. Para la masa de renta igual que la media $\mu = E(Y)$, la disminución de BS de y es $\mu V(F(y))$ y tiene la misma dimensión de renta.

La contrapartida doble de $V(F(y))$ es la función de utilidad o incremento de BS $U(F(y))$ especificado como parte de la masa de renta μ . Entonces, $U(\cdot)$ tiene la dimensión de renta y el operador BS dibuja el conjunto de funciones de utilidad en el intervalo $(0, \mu]$. En símbolos,

$$SW: \{U(F(y))\} \rightarrow (0, \mu] \quad \text{and} \quad SW(F(y)) = E(U(F(y))), \quad (2)$$

donde BS en la ecuación (2) significa el bienestar social medio.

Se respalda un estudio integrado y consistente de BS y desigualdad de renta con la introducción de los dos principios siguientes para el análisis y asesoramiento de las distribuciones de renta:

(a) **El principio de la aversión a la desigualdad (AIP)** declara que la sociedad prefiere menos desigualdad. Dada la AIP, deducimos como una propuesta derivada, el principio **Pigou-Dalton** de transferencia. Declara que una

transferencia (regresiva) de una unidad de renta desde una unidad económica a_i a una unidad económica a_j de tal forma que $y_i \leq y_j$ incrementará la desigualdad de renta. Así que una sociedad preferirá la distribución anterior que la posterior.

(b) **El principio de la aversión a la pobreza (APP)** declara que la sociedad prefiere una renta media mayor. Un incremento de una unidad de renta de cualquier agente económico incrementará, **ceteris paribus**, su utilidad sin disminuir la utilidad de cualquier otro agente económico. Sin embargo, quizá no incrementará el bienestar social, particularmente cuando la función de utilidad sea no individualística y, **a fortiori**, no utilitaria, es decir, cuando sea una función de la distribución total de renta. Esto podría ocurrir cuando el incremento de renta se localiza en el grupo con la renta más alta, por lo cual el **efecto de desigualdad** que resulta de AIP dominaría el **efecto de renta** que resulta de la aplicación de APP.

Hay que respaldar las investigaciones cuantitativas sobre el bienestar de la sociedad con funciones de utilidad y desutilidad no individualísticas (interpersonal) relevantes, si no, estaríamos tratando la adición de utilidades y desutilidades de una colección de unidades económicas, constituyen o no una sociedad organizada. La investigación en psicología, sociología y ciencia política establece el hecho de que las funciones de utilidad $U(\cdot)$ y desutilidad $V(\cdot)$ de una unidad económica dependen de (i) su propia renta y , (ii) la renta de todas las demás unidades económicas, particularmente aquellas con una renta mayor que la suya, [es decir, $1 - L(F(y))$], y (iii) la frecuencia de las unidades económicas con una renta mayor o menor que la suya [es decir, $S(y) = 1 - F(y)$]. Entonces U y V son funciones de la distribución de renta de la sociedad en cuestión.

Con la aplicación de APP, la función de utilidad $U(F(y))$ es una función de incremento de renta y , con la aplicación de AIP es cuasiconcava. Si U es continua y dos veces diferenciable, entonces es una función creciente y estrictamente concava. De hecho, aplicando APP tenemos $U' > 0$ y, aplicando AIP $U'' < 0$, porque AIP implica que $U'(y_i) > U'(y_j)$ para todas $y_i < y_j$.

Similarmente, aplicando AIP, la función de desutilidad $V(F(y))$ es una función de renta cuasiconvexa. Si $V(F(y))$ es continua y dos veces diferenciable, entonces es una función estrictamente convexa porque, dada la renta media μ , la desutilidad de una unidad adicional de renta es una función creciente de y , entonces $V'' > 0$.

3. Ecuaciones fundamentales de renta

Dada la distribución de renta $F(\mathbf{y}) = P(\mathbf{Y} \leq \mathbf{y})$ con la media $\mu = E(\mathbf{Y})$ y aplicando tanto el principio de la aversión a la desigualdad como el de la aversión a la pobreza, podemos dividir la renta \mathbf{y} de cualquier unidad económica en dos componentes:

(1) la contribución de \mathbf{y} al bienestar de la sociedad, es decir, el incremento de bienestar social o la función de utilidad **social** de renta \mathbf{y} ,

$$U(F(\mathbf{y})) = U(\mathbf{y}; F, \mu), \quad (3)$$

(2) la disminución de bienestar **social** o desutilidad de una renta \mathbf{y} .

Para una unidad de masa de renta, la disminución de bienestar social de una renta \mathbf{y} es

$$V(F(\mathbf{y})) = V(\mathbf{y}; F, \mu), \quad (4)$$

y para una masa de renta μ es $\mu V(F(\mathbf{y}))$.

Al definir las funciones de incremento y disminución de bienestar social como una división de una renta \mathbf{y} , obtenemos la ecuación fundamental:

$$\mathbf{y} = U(\mathbf{y}; F, \mu) + \mu V(\mathbf{y}; F, \mu). \quad (5)$$

Según la ecuación (5) si U es cuasiconcava, entonces V es cuasiconvexa.

Tomando la esperanza matemática de las dos partes de la ecuación (5) y usando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos una segunda ecuación fundamental:

$$\mu = SW(F) + \mu I(F). \quad (6)$$

Mientras la ecuación (5) divide la renta \mathbf{y} de una unidad económica, la

ecuación (6) divide la renta media μ en el bienestar social medio y la disminución media de bienestar de una sociedad con una distribución de renta $F(y)$. Entonces,

$$SW(F) = \mu[1 - I(F)] \quad \text{and} \quad I(F) = 1 - SW(F)/\mu. \quad (7)$$

Tanto **Atkinson (1970)** como **Blackorby y Donalson (1978)** dan la ecuación (7) en relación a su medición de desigualdad. Sin embargo, ninguno de ellos la deduce a partir de las funciones de utilidad y desutilidad social de la unidad económica.

La ecuación (5) también se puede escribir de la siguiente manera:

$$y = yu(y; F, \mu) + \mu yv(y; F, \mu), \quad (8)$$

donde $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ son funciones de ponderación de y . Al dividir por y conseguimos una tercera ecuación fundamental, la ecuación de la función de ponderación:

$$1 = u(y; F, \mu) + \mu v(y; F, \mu). \quad (9)$$

Al aplicar **AIP** y **APP** deducimos que la función de ponderación $u(y; F, \mu)$ es una función decreciente no negativa y monotónica de y . Si la función de utilidad social $U(\cdot)$ es continua y dos veces diferenciable, entonces $U' > 0$ y $U'' < 0$, y al aplicar los teoremas de diferenciabilidad de un producto de funciones continuas y diferenciables, deducimos que:

$$u(y; F, \mu) > 0 \quad \text{and} \quad u'(y; F, \mu) < 0. \quad (10)$$

La contribución importante de **Sen (1974)** sobre las bases informacionales de enfoques alternativos de bienestar, introduce una función de ponderación $u(y)$ para proporcionar una interpretación de bienestar del ratio de Gini. **Kakwani (1980)** añade aún más agudeza al enfoque de **Sen**.

4. Una interpretación de bienestar social de cuatro mediciones de desigualdad

El marco teórico desarrollado en las secciones 2 y 3 conduce a la especificación de las ecuaciones fundamentales (5), (6) y (9), y respalda el análisis de las bases de bienestar social de mediciones de desigualdad de renta. En esta sección discutimos: (i) el ratio entrópico de **Theil (T)**, (ii) el ratio de entropía generalizada (**I(β)**), (iii) el ratio de **Atkinson (A)**, y (iv) el ratio de **Gini (G)**.

Usando la integral de **Stieltjes-Riemann** para cubrir tanto las distribuciones continuas como las discretas, tenemos [**Dagum (1983)**]:

$$T = \int_0^{\infty} (y/\mu)(\log y/\mu) dF(y). \quad (11)$$

$$A(r) = 1 - (1/\mu) \left[\int_0^{\infty} y^r dF(y) \right]^{1/r} = 1 - M(r)/\mu, \quad r \leq 1. \quad (12)$$

$$G = \Delta/(2\mu) = 2 \int_0^{\infty} [F(y) - L(y)] dF(y) \\ = (2/\mu) \int_0^{\infty} y \left[F(y) - \frac{1}{2} \right] dF(y). \quad (13)$$

donde el ratio de **Theil** es un miembro de la clase de mediciones de entropía generalizada

$$I(\beta) = (1/\beta(\beta+1)) \int_0^{\infty} (y/\mu) \left[(y/\mu)^{\beta} - 1 \right] dF(y), \quad \beta \text{ real}. \quad (14)$$

Se puede probar que

$$T = \lim_{\beta \rightarrow 0} I(\beta).$$

$M(r)$ en el ratio de Atkinson es la media de potencia de Gini [Gini et al. (1957), Dagum (1979, 1980)],

$$M(r) = \left[\int_0^{\infty} y^r dF(y) \right]^{1/r}, \quad r \text{ real.} \quad (15)$$

$M(r)$ también se llama la función de generación de media de Gini porque genera la media de cualquier orden. Para $r = -1, 1, 2$ y para r con tendencia a cero, $M(r)$ es igual a las medias armónicas, aritméticas, cuadráticas y geométricas, respectivamente. Para $r < 1$, $M(r)$ define la media armónica generalizada, y para $r > 1$, la media cuadrática generalizada.

Para cualquier distribución de renta no degenerada (una renta no distribuida de forma igual), se puede probar [Dagum (1979)] que $M(r)$ es una función estrictamente creciente de r , es decir, $dM(r)/dr > 0$. Considerando a una población de n unidades de renta, para que $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$, tenemos

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad F(y_i) = i/n, \quad f(y_i) = 1/n, \quad (16)$$

$$\min_{(r)} M(r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} M(r) = y_1, \quad (17)$$

$$\max_{(r)} M(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} M(r) = y_n. \quad (18)$$

El símbolo Δ en la ecuación (13) es la diferencia de media de Gini entre dos variables de renta idénticamente distribuidas, y $L(y) = (1/\mu) \int_0^y x dF(x)$ es la curva Gini-Lorenz, es decir, la función de distribución de renta de primer momento.

Aunque las mediciones de desigualdad (11)-(14) tienen una dimensión de cero, tanto los ratios de entropía generalizada como los ratios de Theil toman valores no negativos, pero no en el intervalo de unidad $[0, 1]$. Para $\beta \geq 0$, la medición de entropía generalizada se aumenta.

Dada una población de n unidades de renta de tal forma que una unidad recibe la masa total $n\mu$ de renta y todas las demás tienen una renta de cero, es decir, según la ecuación (16), $y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0$ y $y_n = n\mu$, deducimos de las ecuaciones (11) y (14)

$$\max_{(y)} T = \max_{(y)} \lim_{\beta \rightarrow 0} I(\beta) = \log n, \quad (19)$$

$$\max_{(y: \beta > 0)} I(\beta) = (n^\beta - 1)/\beta(\beta + 1). \quad (20)$$

Entonces las formas discretas y normalizadas de estas mediciones son

$$T = (1/n \log n) \sum_{i=1}^n (y_i/\mu) \log(y_i/\mu). \quad (21)$$

$$I(\beta; \beta > 0) = [1/n(n^\beta - 1)] \sum_{i=1}^n (y_i/\mu) [(y_i/\mu)^\beta - 1]. \quad (22)$$

Aplicando las ecuaciones (1), (2) y (5) a las ecuaciones (12), (13), (21) y (22) obtenemos para cada una de las cuatro mediciones de desigualdad sus correspondientes funciones de utilidad y desutilidad, es decir:

(i) Ratio de **Theil**:

$$U(y) = y - (1/\log n) y \log(y/\mu). \quad (23)$$

$$V(y) = (1/\log n)(y/\mu) \log(y/\mu). \quad (24)$$

(ii) Medición de entropía generalizada ($\beta > 0$):

$$V(y) = [1/(n^\beta - 1)](y/\mu) [(y/\mu)^\beta - 1]. \quad (25)$$

$$U(y) = y - [1/(n^\beta - 1)] y [(y/\mu)^\beta - 1]. \quad (26)$$

(iii) Ratio de **Atkinson** ($r \leq 1$):

$$V(y) = [y - \psi(y^r)]/\mu. \quad (27)$$

$$U(y) = \psi(y^r), \quad (28)$$

donde el operador ψ se define de la siguiente forma:

$$E[\psi(y^r)] = \psi E(y^r) = [E(y^r)]^{1/r} = M(r). \quad (29)$$

(iv) Ratio de **Gini**:

$$V(y, F) = 2[F(y) - L(y)] = 2(y/\mu)[F(y) - \frac{1}{2}], \quad (30)$$

$$U(y, F) = y - 2\mu[F(y) - L(y)] = 2y[1 - F(y)]. \quad (31)$$

Es evidente, por la forma matemática de las funciones de utilidad y desutilidad **U** y **V**, deducidas de los ratios de **Theil**, de entropía generalizada y de **Atkinson**, que a estas tres mediciones de desigualdad corresponden las funciones individualísticas de utilidad y desutilidad. Son funciones solamente de la renta de la unidad económica correspondiente e ignoran (implicando una independencia de) la renta de otros miembros de la sociedad.

Por otra parte, el ratio de **Gini** corresponde a la especificación de las funciones interpersonales de utilidad y desutilidad porque dependen no sólo de la renta de la unidad económica sino también de la renta de todas las demás unidades económicas, y por eso de la distribución de renta **F(y)**.

Una representación más exacta de las funciones interpersonales de utilidad y desutilidad que aquellas dadas en las ecuaciones (30) y (31) se puede especificar como una función de un ratio de desigualdad de renta, por ejemplo, **G**, la renta **y** de cada unidad económica, y la masa de renta $1-L(\mathbf{y})$

de las unidades económicas con una renta mayor que y , como

$$U(y, F, L) = 2[(1 - G)/(1 + G)]y[1 - L(y)]. \quad (32)$$

$$V(y, F, L) = (y/\mu)[1 - 2(1 - G)(1 - L(y))/(1 + G)]. \quad (33)$$

Usando la ecuación (7) deducimos la función de BS correspondiente a cada ratio de desigualdad de renta y a la inversa. Llamaremos a las ecuaciones (30) y (31) funciones de utilidad y desutilidad **Gini tipo I** y a las ecuaciones (32) y (33) funciones de utilidad y desutilidad **Gini tipo II**, respectivamente. Una combinación convexa de Gini tipo I y Gini tipo II da **Gini tipo III**. Tomando la esperanza matemática de ambos lados de las ecuaciones (30)-(33) tenemos:

(i) De la ecuación (30), el ratio de **Gini G** dado en la ecuación (13), y de la ecuación (31) el bienestar social de Gini tipo I es

$$SW(G(I)) = \mu(1 - G). \quad (34)$$

(ii) De las ecuaciones (32) y (33) el bienestar social y ratio de desigualdad de Gini tipo II, respectivamente, son

$$SW(G(II)) = \mu(1 - G)/(1 + G). \quad (35)$$

$$I(G(II)) = 2G/(1 + G). \quad (36)$$

Las combinaciones convexas de (34) y (35) y de (13) y (36) dan la función de bienestar social y el ratio de desigualdad de Gini tipo III, es decir,

$$SW(G(III)) = \mu(1 - G)(1 + \lambda G)/(1 + G), \quad (37)$$

$$I(G(III)) = G(2 - \lambda + \lambda G)/(1 + G), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (38)$$

Las funciones de bienestar social de Gini (34), (35) y (37) son funciones crecientes de la renta media μ (aversión a la pobreza) y funciones decrecientes del ratio de desigualdad de renta G (aversión a la desigualdad). Tienden a μ cuando G tiende a cero, y ellas tienden a cero cuando G tiende a 1. Así que toman en consideración tanto el efecto de renta como el efecto de desigualdad. Los ratios de Gini de desigualdad (13), (36) y (38) son mediciones sin dimensión, toman los valores en el intervalo $[0,1)$, y satisfacen el principio de aversión a la desigualdad.

5. Ejemplos

Las funciones interpersonales de utilidad y desutilidad correspondientes a las funciones de bienestar social y a los ratios de desigualdad de Gini tipos I, II y III permiten una interpretación mucho más realista, tanto del bienestar social como de la desigualdad de renta social, que la que se puede obtener de U y V individualísticas, tales como las funciones y ratios de desigualdad de bienestar social de Theil, entropía generalizada, y Atkinson.

Entre las mediciones de desigualdad de renta discutidas en la literatura, solamente aquellas relacionadas con el ratio de Gini, y entonces con la curva Gini-Lorenz, por ejemplo, Bonferroni (1940, pp. 72-75) y Zenga (1984), son respaldados por funciones de utilidad y desutilidad no individualísticas. La sensibilidad del ratio de Zenga a cambios en la desigualdad de renta está rigurosamente analizada por Dancelli (1988) con respecto al modelo paramétrico especificado por Dagum (1977) y Fattorini y Lemmi (1979).

Tabla 1
Ratios de desigualdad de renta

Income distribution	Theil	Atkinson		Gini		
		$r = 0$	$r = -1$	Type I	Type II	Type III
x	0.834	0.862	0.939	0.949	0.973	0.961
y	0.837	0.865	0.940	0.950	0.974	0.962
z	0.771	0.678	0.889	0.915	0.956	0.935

Las funciones individualísticas de utilidad llegan hasta el bienestar social al añadir la función de utilidad de cada unidad económica $U(y)$ que depende solamente de su correspondiente renta. Entonces, un incremento en la renta de una unidad económica aumentará su propio nivel de utilidad sin cambiar el nivel de utilidad de las demás unidades, que **siempre** implica una **mejora de Pareto** en la distribución anterior. En general, el bienestar social aumentará independientemente de lo que podría pasar a la desigualdad de renta. Como resultado de la cuasiconcavidad de la función de utilidad, la cantidad del incremento del bienestar social dependerá de si la unidad o unidades económicas que reciben el incremento de renta se encuentran entre los grupos de renta baja, mediana o alta. Entonces, para esta clase (individualística) de funciones de bienestar social, el **efecto de renta**, en general, dominará al **efecto de desigualdad**.

Por otra parte, la especificación interpersonal de las funciones de utilidad y desutilidad en los ratios de desigualdad y bienestar social de **Gini tipos I, II y III** refuerzan la interacción entre la **APP** y la **AIP**. Así que, un incremento de renta de la unidad económica más rica disminuirá la media y el total del bienestar social cuando el efecto de desigualdad domina al efecto de renta. Dado que el principio de **optimalidad de Pareto** se concierne exclusivamente a la **APP**, entonces con cambios en los niveles de renta, un incremento de renta en la unidad económica más rica da una distribución de renta de **Pareto superior**. Sin embargo, si el efecto de desigualdad correspondiente que resulta de la **AIP** de la sociedad es mayor que el efecto de renta, el bienestar social de la población disminuye a causa de la interacción conjunta de **APP** y **AIP**. Esto es un resultado lógico tanto de la función de bienestar social de **Gini** como del ratio de desigualdad de **Gini** a causa de la especificación interpersonal de sus correspondientes funciones de utilidad y desutilidad.

Tabla 2
Funciones de bienestar social

Income distribution	Theil	Atkinson		Gini		
		$r = 0$	$r = -1$	Type I	Type II	Type III
x	6.492	5.364	2.393	2.0	1.026	1.513
y	6.524	5.393	2.394	2.0	1.025	1.512
z	9.160	12.885	4.456	3.4	1.775	2.588

Los siguientes ejemplos demuestran el impacto sobre las funciones de bienestar social y los ratios de desigualdad de **Theil**, **Atkinson** y **Gini** que resulta de un incremento de renta de algunas unidades económicas.

Vamos a denotar con x , y , y z las distribuciones de renta de una población de $n = 5$ unidades de renta. Es decir,

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 2, 3, 4, 185),$$

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (1, 2, 3, 4, 190),$$

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = (3, 3, 4, 5, 185).$$

Se puede ver que y y z **Pareto**-dominan a x , dado que en y y z cada unidad económica es tan rica como la otra, con al menos una siendo más rica que cualquier de los miembros de la distribución de renta x . Aunque ni y **Pareto**-domina a z , ni z **Pareto**-domina a y . Además, x es menos desigual que y , y z es menos desigual que x y y . Estas son afirmaciones ordinales (cualitativas) y no son muy comprensivas porque realizan comparaciones ordinales de rentas individuales bajo distribuciones alternativas y no se preocupan en absoluto de la desigualdad asociada con cada distribución.

La tabla 1 muestra los ratios de desigualdad de renta propuestos por **Theil** [ecuación (21)], normalizados en el intervalo de unidad $[0, 1]$, **Atkinson** [ecuación (12)], correspondiente a la media geométrica ($r=0$) y la media armónica ($r=-1$), **Gini** tipo I [ecuación (13)], **Gini** tipo II [ecuación (36)], y **Gini** tipo III [ecuación (38)], para $\lambda = 1/2$.

La tabla 2 presenta las estimaciones de bienestar social correspondientes a los ratios de desigualdad de renta dados en la tabla 1.

Los resultados expuestos en la tabla 1 son consistentes con la AIP y todos los ratios se sensibilizan a cambios en las distribuciones de renta. Por otra parte, la tabla 2 presenta unos resultados interesantes y opuestos. El BS de Theil y de Atkinson para $r=0$ incrementan, y para $r=-1$, el BS de Atkinson muestra un ligero incremento al pasar de x a y . La distribución y tiene la media más desigual y más rica que x . El BS de Gini tipo I es indiferente entre x y y (las dos estimaciones son iguales). Sin embargo, el BS de Gini tipo II y tipo III presenta valores de BS ligeramente más altos para x , indicando que la Pareto-dominación de y sobre x se compensa con un incremento de la desigualdad debido al incremento de renta de la unidad más rica pasando de $x_5 = 185$ a $y_5 = 190$. Estos resultados se aumentan con la especificación no individualística de las funciones de Gini de utilidad y desutilidad. Entonces, tomando en consideración tanto la AIP como la APP, el BS de Gini tipo II y tipo III concuerdan al afirmar que se prefiere x a y , y el BS de Gini tipo I presenta a estas distribuciones como indiferentes.

Finalmente, z domina tanto a x como a y por lo que a la desigualdad de renta se refiere (aplicando AIP), domina solamente a x en cuanto se refiere a la renta media (aplicando APP), y es indiferente respecto a y por la aplicación de APP. En consecuencia, la tabla 2 demuestra que z domina claramente tanto a x como a y en las seis estimaciones de BS por la aplicación conjunta de AIP y APP.

6. Conclusión

La ecuación fundamental presentado en la sección 3 que divide la renta y de cada unidad económica en incremento de BS (función de utilidad) y disminución de BS (función de disutilidad) proporciona una base sencilla de BS para cualquier medición de desigualdad normalizada y , recíprocamente, una base de desigualdad de renta para cualquier función de BS. Así que, la importante clasificación de Sen de mediciones de desigualdad de renta basada en fundamentos (i) estadísticos, (ii) informacionales, y (iii) de bienestar social ya no se puede aplicar.

El marco analítico proporcionado por los principios de aversión a la desigualdad y aversión a la pobreza junto con la ecuación fundamental de renta especificada en la sección 3 respaldan el análisis comparativo de los ratios de desigualdad de **Theil**, **entropía generalizada**, **Atkinson**, y **Gini**, y las correspondientes funciones de BS. Entre ellos, solamente los de Gini tipo I, II y III especifican funciones interpersonales (no individualísticas) de utilidad y desutilidad. Por consiguiente, se respaldan con el comportamiento observado de las unidades económicas.

Referencias

- Atkinson, A.B., 1970, On the measurement of inequality, *Journal of Economic Theory* 2, 244-263.
- Benedetti, C., 1980, Di alcuni indici di disuguaglianza del benessere, *Statistica* 40, 7-11.
- Benedetti, C., 1986, Sulla interpretazione benessere di noti indici di concentrazione e di altri, *Metron* 44, 421-429.
- Blackorby, C. and D. Donaldson, 1978, Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare, *Journal of Economic Theory* 18, 59-80.
- Bonferroni, C.E., 1940, *Elementi di statistica generale* (Università Commerciale Bocconi, Milano).
- Dagum, C., 1977, A new model of personal income distribution: Specification and estimation, *Economie Appliquée* 30, 413-426.
- Dagum, C., 1979, A mean generating function for the assessment of estimator biases, *Economie Appliquée* 32, 81-93.
- Dagum, C., 1980, Inequality measures between income distributions with applications, *Econometrica* 48, 1791-1803.
- Dagum, C., 1983, Income inequality measures, in: S. Kotz and N.L. Johnson, eds., *Encyclopedia of statistical sciences*, Vol. IV (Wiley, New York) 34-40.
- Dalton, H., 1920, The measurement of the inequality of incomes, *Economic Journal* 30, 348-361.
- Dancelli, L., 1988, Confronti fra le curve di concentrazione $Z(p)$ e $L(p)$ nel modello di Dagum-Fattorini-Lemmi, Research paper (Università di Brescia, Brescia).
- Fattorini, L. and A. Lemmi, 1979, Proposta di un modello alternativo per l'analisi della distribuzione personale del reddito, in: *Atti delle giornate di lavoro AIRO (Associazione Italiana di Ricerca Operativa, Bologna)* 89-117.
- Ferri, C., 1978a, Su un sistema di indicatori di concezione daltoniana del grado di benessere economico individuale del reddito, *Statistica* 38, 13-39.
- Ferri, C., 1978b, Significato e possibilità di taluni indicatori di concentrabilità economica dei redditi per una misura delle variazioni nel benessere economico, in: *Scritti in onore di Giuseppe de Meo (Università di Roma, Roma)* 365-395.
- Gini, C., in collaboration with G. Barbensi, L. Galvani, E. Pizzetti, and S. Gatti, 1957, *Le medie* (UTET, Torino).
- Giorgi, G.M., 1984, Alcune considerazioni teoriche su di un vecchio ma pur sempre attuale indice: Il rapporto di concentrazione del Gini, *Metron* 42, 25-40.
- Kakwani, N.C., 1980, *Income inequality and poverty: Methods of estimation and policy applications* (Oxford University Press, Oxford).
- Sen, A.K., 1973, *On economic inequality* (Oxford University Press, Oxford).
- Sen, A., 1974, Informational bases of alternative welfare approaches: Aggregation and income distribution, *Journal of Public Economics* 4, 387-403.
- Zenga, M., 1984, Proposta per un indice di concentrazione basato sui rapporti fra quantili di popolazione e quantili di reddito, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, 301-326.