Edukiak

Matematika II irakasgaiaren curriculumak, batxilergoko beste irakasgaienak bezala, konpetentzia jakin batzuk erdiestea du helburu, honako hauek hain zuzen:

- Eguneroko bizitzako eta zientziako eta teknologiako problemak modelizatzea eta ebaztea, hainbat estrategia eta arrazoitzeko modu aplikatuz, soluzio posibleak lortzeko.
- Problema baten soluzio posibleen baliozkotasuna egiaztatzea, arrazoiketa eta argudiaketa erabiliz, horien egokitasuna egiaztatzeko.
- Aieruak edo problemak formulatzea eta ikertzea, arrazoiketa eta argudiaketa erabiliz, tresna teknologikoen laguntzarekin, ezagutza matematiko berria sortzeko.
- Pentsamendu konputazionala modu efikazean erabiltzea, matematika erabiliz algoritmoak aldatuz, sortuz eta orokortuz, eguneroko bizitzako eta zientziaren eta teknologiaren esparruko egoerak modelizatzeko eta ebazteko.
- Ideia matematikoen arteko loturak ikertzea eta erabiltzea, kontzeptuen, prozeduren, argudioen eta ereduen arteko loturak ezarriz, ikuspegi matematiko integratua sortzeko.
- Matematikak beste jakintza-arlo batzuekin dituen erlazioak ezagutzea eta horietan sakontzea, kontzeptuak eta prozedurak hainbat egoeratan erlazionatuz, problemak ebazteko eta konpetentzia kritikoa, sortzailea eta berritzailea garatzeko.
- Informazio, kontzeptu eta prozesu matematikoak irudikatzea, hainbat teknologia hautatuz ideiak bistaratzeko eta arrazoibide matematikoak egituratzeko.
- Ideia matematikoak banaka eta taldean komunikatzea, euskarri, terminologia eta zorroztasun egokiak erabiliz, pentsamendu matematikoa antolatzeko eta sendotzeko.
- Trebetasun pertsonalak eta sozialak erabiltzea, emozioak identifikatuz eta kudeatuz, akatsa eta ziurgabetasuna onartuz, erlazio osasungarriak sortuz eta talde heterogeneoetako proiektuetan aktiboki eta hausnarketa bidez parte hartuz, matematika ikasteko helburuak hobeto lortzeko.

Konpetentzia horiek oinarrizko jakintzen bidez lortu behar dira. Matematika II irakasgaiaren oinarrizko jakintzak sei zentzutan taldekatzen dira:

- Zentzu numerikoa
- Neurri-zentzua
- Espazio-zentzua
- Zentzu aljebraikoa eta pentsamendu konputazionala
- Zentzu estokastikoa
- Zentzu sozioafektiboa.

USaPen ebalua daitezkeen oinarrizko jakintza komunei dagokienez, honako hauek proposatzen dira funtzesko marko gisa:

ZENTZU NUMERIKOA:

- Bektoreen eta matrizeen batura eta biderkadura: propietateen behar bezalako ulermena eta erabilera.
- Zenbaki errealekin, bektoreekin eta matrizeekin jarduteko trebetasunak.
  - Eskalar bat eta bektore baten arteko biderkadura.
  - Bi bektoreren biderkadura eskalarra espazioan: definizioa, propietateak eta aplikazioak.
  - Bi bektoreren biderkadura bektoriala espazioan: definizioa, propietateak eta aplikazioak.
  - Hiru bektoreren biderkadura mistoa espazioan: definizioa, propietateak eta aplikazioak.
  - Matrize karratu baten berretura: matrize baten berretura kalkulatzea egoera ziklikoetan.
  - Determinanteak: definizioa, propietateak eta kalkulua.
  - Alderantzizko matrizea: definizioa, propietateak eta kalkulua.
  - Matrize baten heinaren kalkulua, agian parametro baten edo batzuen mendekoa, Gauss-en metodoa edo determinanteak aplikatuz.
- Bektoreen eta matrizeen multzoak: egitura, ulermena eta propietateak.
  - Oinarriaren eta mendekotasunaren eta independentzia linealaren kontzeptuak.
  - Matrize motak: errenkada, zutabea, karratua, diagonala, triangeluarra, nulua, identitate, iraulia, simetrikoa eta antisimetrikoa.

NEURRI-ZENTZUA

- Koordenatu kartesiarren sistema batean luzera, azalera edo bolumena neurtzea eskatzen duten problemak ebaztea.
- Funtzioen bidez modeliza daitezkeen egoerak irudikatzeko eta aztertzeko limitearen, jarraitutasunaren eta deribagarritasunaren kontzeptuak aplikatzea.
  - Funtzio baten puntu bateko limitearen kontzeptua (finitua zein infinitua) eta albo-limiteena aplikatzea, funtzio baten jarraitutasuna eta asintota bertikalen existentzia aztertzeko.
  - Funtzio baten infinituko limitearen kontzeptua aplikatzea, asintota horizontalen eta zeiharren existentzia aztertzeko.
  - Jarraitutasuna tarte batean. Bolzanoren teorema eta aplikazioak.
  - Eten-motak.
  - Funtzio jarraituen propietate aljebraikoak eta funtzioaren grafikoaren zirriborroa ezagutzea etenpuntuen ingurune batean.
  - Funtzio baten puntu bateko jarraitutasunaren eta deribagarritasunaren arteko erlazioa ezagutzea.
  - Zatika definitutako funtzioen jarraitutasuna eta deribagarritasuna.
  - Funtzio deribatuaren eta funtzio baten puntu bateko deribatuaren balioaren arteko bereizketa. Funtzio baten deribagarritasun-eremua zehaztea.
  - Funtzio konposatuetarako deribazio-teorema ezagutzea eta erabiltzea (katearen erregela).
  - Albo-deribatuak.

  - Rolleren teorema ezagutzea.
  - Lagrangeren batez besteko balioaren teorema ezagutzea.

- Deribatua aplikatzea problemak hainbat testuingurutan ebazteko.
  - Funtzio baten gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zehaztea, deribazioa erabilita.
  - Funtzio baten grafikoaren zuzen ukitzailearen eta zuzen normalaren ekuazioa puntu batean zehaztea.
  - Funtzio baten ganbiltasun- ($f''(x) < 0$) eta ahurtasun-tarteak ($f''(x) > 0$) zehaztea, deribazioa erabiliz
  - Funtzio baten puntu kritikoak (lehenengo deribatua nulua duten puntuak) eta funtzioa deribagarria ez den puntuak aztertzea.
  - Funtzio jarraituen eta funtzio deribagarrien teoria erabiltzea mutur erlatiboen eta absolutuen problemak ebazteko.
  - Geometriarekin edo zientzia esperimental eta gizarte-zientziekin lotutako optimizazio-problemak ebaztea, eta testuinguruaren barruan lortutako emaitza interpretatzea.
  - Funtzio polinomikoak, arrazionalak, esponentzialak, logaritmikoak, trigonometrikoak eta zatika definitutakoak gutxi gorabehera aztertzea eta irudikatzea, analisiaren tresnak erabiliz lortutako propietate globalak eta lokalak oinarri hartuta (limiteak eta deribatuak).
  - $y = f(x)$ formako funtzio baten grafikoaren gutxi gorabeherako irudikapena, honako hauek adieraziz: eremua, simetriak, periodizitatea, ardatzekiko ebaketak, asintotak, gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, mutur erlatiboak, ganbiltasun- eta ahurtasun-tarteak eta inflexio-puntuak.
  - Funtzio baten edo haren deribatuaren irudikapen grafikoa ezagututa, funtzioaren beraren informazioa lortzea (limiteak, albo-limiteak, jarraitutasuna, asintotak, deribagarritasuna, gorakortasuna eta beherakortasuna, etab.).

- Deribatua aldaketaren arrazoi gisa: interpretazio geometrikoa.
- Integral mugatua kurba baten azpiko azalera gisa interpretatzea.
- Eremuen azalerak kalkulatzea, oinarrizko integrazio-teknikak erabilita.
  - Jatorrizkoaren kontzeptua. Propietateak.
  - Berehalako jatorrizkoak.
  - Funtzio arrazionalen jatorrizkoak, zeinen Izendatzailearen erroak errealak diren.
  - , Zatikako integrazioaren metodoa (behin eta berriz aplikatuz).
  - Aldagai-aldaketa bidezko integrazio-teknika.
  - Bi funtzio ematen direnean, adierazpen analitikoen bidez edo irudikapen grafikoen bidez, bata bestearen jatorrizkoa den jakitea. Funtzio beraren bi jatorrizkoen arteko erlazioa.
  - Jatorrizkoen familia batean, grafikoki puntu jakin batetik igarotzen dena zehazten jakitea.
  - Barrow-en erregela aplikatzea.
  - Integralak integrakizunarekiko duen linealtasun-propietatea ezagutzea eta integrazio-tartearekiko gehigarritasun-propietatea ezagutzea.
  - Azalerak integral mugatuen bidez kalkulatzea.

  - Integralaren kontzeptua gainazal lauak eta biraketa-bolumenak kalkulatzea eskatzen duten problemak ebazteko aplikatzeko teknikak.

- Probabilitatea, ausazko fenomenoei lotutako ziurgabetasunaren neurri gisa.

ESPAZIO-ZENTZUA

- Hiru dimentsioko objektu geometrikoak: propietateen analisia eta ezaugarrien zehaztapena.
- Koordenatu kartesiarren eta bektoreen bidez irudikatutako espazioko objektuei buruzko problemak ebaztea.
- Espazioko objektu geometrikoen adierazpen aljebraikoak: egokiena hautatzea testuinguruaren arabera: zuzen baten eta plano baten ekuazioak hiru dimentsioko espazioan.
  - Hiru dimentsioko espazioan zuzenen eta planoen intzidentziarekin eta paralelismoarekin lotutako antzeko geometria-problemak planteatzea eta ebaztea.
  - Zuzen bat barnean duen eta kanpoko puntu batetik igarotzen den planoa eraikitzea.
  - Bi zuzen paralelo edo ebakitzaile barnan dituen planoa eraikitzea.
  - Espazioan gurutzatzen diren bi zuzen perpendikularki ebakitzen dituen zuzenaren eraikuntza.
  - Gurutzatzen diren bi zuzenen kanpoko puntu batetik igarotzen den eta zuzen biak ebakitzen dituen zuzenaren eraikuntza.
  - Espazioko puntuen, zuzenen eta planoen posizio erlatiboa aztertzea.
  - Geometria metrikoko problemak planteatzea eta ebaztea: zuzenen eta planoen arteko angeluak neurtzea, puntuen, zuzenen eta planoen arteko distantziak neurtzea, eta zuzenen eta planoen arteko ortogonaltasuna.
  - Planoen eta/edo zuzenen posizio erlatiboen problema bat interpretatzea ekuazio linealen sistema baten soluzioen analisi gisa.
  - Bektore normalak plano batekiko, gurutzatzen diren bi zuzenekiko perpendikular komuna, beste birekiko bektore perpendikularra, triangeluen eta paralelogramoen azalerak eta tetraedroen eta paralelepipedoen bolumenak.
  - Espazioko simetriaren azterketa: beste puntu batekiko, plano batekiko eta zuzen batekiko puntu simetrikoa.
- Objektu batek espazioan duen posizioa eta mugimendua modelizatzea, bektoreak erabiliz.

ZENTZU ALJEBRAIKOA ETA PENTSAMENDU KONPUTAZIONALA

- Patroiak eta erregulartasunak askotariko egoeretan: identifikatu eta orokortzea.
- Harreman kuantitatiboak askotariko egoeretan: horiek modeliza ditzaketen funtzio-motak identifikatzea eta zehaztea.
- Hainbat testuingurutako egoerak modelizatu eta ebazteko ekuazio-sistemak.
- Zientzia eta gizarte testuingurutatik eta eguneroko bizitzatik eratorritako egoerak modelizatzeko matrizeak.

- Ekuazio linealen sistemak agertzen diren egoerak modelizatzeko teknikak eta matrizeen erabilera.
  - Matrizeak erabiltzea datu egituratuak eta testuinguru errealeko egoerak irudikatzeko.
  - Ekuazio-sistemak: egoeren modelizazioa hainbat testuingurutan.
  - Ekuazio linealen sistema bat matrize-forman adieraztea eta matrize zabalduaren kontzeptua ezagutzea.
- Ekuazio linealen sistemak: bateragarritasunaren azterketa (Rouché-Frobeniusen teorema) eta ebazpena (Cramer, Gauss) hainbat testuingurutan.
  - Sistema bateragarriak (zehatzak eta zehaztugabeak) eta bateraezinak.
  - Rouché-Frobeniusen teorema.
  - Sistema linealen eztabaida, beharbada parametro baten edo batzuen mendekoak, Gaussen metodoaren bidez edo heinen zuzeneko azterketaren bidez.
  - Sistema linealak, beharbada parametro baten edo batzuen mendekoak direnak, abeztea Gaussen metodoaren bidez edo Cramer-en erregela erabiliz.
- Matrize-ekuazioak eta matrize-sistemak ebaztea, alderantzizko matrizea erabiliz eta ekuazio linealen sistema bihurtuz.
- Bektore-multzoen mendekotasuna eta independentzia lineala espazioan.
- Bektore bat beste bektore batzuen konbinazio lineal gisa adieraztea.
- Funtzio moten propietateak: ulermena eta konparazioa.

ZENTZU ESTOKASTIKOA

- Esperimentu konposatuetan probabilitateak kalkulatzea. Probabilitate baldintzatua eta gertaeren independentzia. Zuhaitz-diagramak eta kontingentzia-taulak.
  - Eragiketak gertaerekin. De Morganen legeak.
  - Kolmogoroven probabilitatearen axiomak edo Vennen diagramen marrazketa erabiltzea eskatzen duten problemak planteatzea eta ebaztea.
- Probabilitate osoaren eta Bayesen teoremak problemen ebazpenean, ziurgabetasun-egoeretan erabaki egokiak hartzeko
  - Probabilitate osoaren eta Bayesen teoremak erabiltzea edo zuhaitz-diagramak trazatzea eskatzen duten testuinguru errealeko problemak planteatzea eta ebaztea.
  - Problemak ebaztea eta Bayesen teorema interpretatzea, probabilitatea eguneratzeko, behaketatik eta esperimentaziotik eta ziurgabetasun-baldintzetan erabakiak hartzetik abiatuta.
- A priori robabilitatea, egiantza berresleitzea eta a posteriori probabilitatea zuhaitz-diagrama baten edo kontingentzia-taula baten bidez, eta Bayesen teorremarekin duen erlazioa aztertzea.
- Ausazko aldagai diskretuak eta jarraituak. Banaketaren parametroak.
  - Banaketa binomiala: definizioa, parametroak eta probabilitateen kalkulua, inplikatutako zenbaki konbinatorioak errazak diren kasuetan.

  - Banaketa normala: definizioa, parametroak eta probabilitateen kalkulua, banaketa normal estandarraren taula erabilita.
  - Binomiala normalera hurbiltzea.

- Probabilitate binomial eta normaleko banaketen bidez fenomeno estokastikoak modelizatzea.
- Probabilitate-problemak ebaztea testuinguru errealeko egoeretan.

ZENTZU SOZIOAFEKTIBOA

- Problemak eta ataza matematikoak ebazteko aukerak ebaluatzeko eta erabakiak hartzeko trebetasunak.

Nabarmendu behar da, eduki horiek USaPen behar bezala aplikatzeko, batxilergoko lehenengo mailan ezarritako oinarriak ere menperatu behar direla.

Azterketa eredua 1

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu). Hegoafrikan, Kenyan eta Zambian M72 txertoa aplikatzeari buruz 2019ko abenduan argitaratutako emaitzen arabera, biriketako tuberkulosi aktiboaren aurka babestuta geratzeko probabilitatea 0,54 da. 3289 helduren talde bati txertoa aplikatzen zaio.

(a) Kalkulatu txertoa 1800 heldurengan eraginkorra izateko probabilitatea.

(b) Kalkulatu txertoa 1700 heldu baino gutxiagorengan eraginkorra izateko probabilitatea.

(c) Txertoa 1750 eta 1850 arteko heldurengan eraginkorra izateko probabilitatea $0,0037$ izan daiteke? Arrazoitu zure erantzuna, probabilitate hori kalkulatu gabe.

BIGARREN ARIKETA (2 puntu). Lantegi batek hiru ogi mota zerbitzatzen dizkie egunero bi okindegiri: gari-ogia, arto-ogia eta ogi integrala. Lehenengo okindegian 150 ogi-unitate jasotzen dituzte, eta bigarrenean, 200 ogi-unitate. Bigarren okindegi honetan, lehenengoan baino 10 gari-ogi gehiago eta ogi integralaren bikoitza jasotzen dute. Gainera, lantegiak egunero 50 arto-ogi egiten ditu eta guztiak bi okindegien artean banatzen ditu.

(a) Adierazi aurreko informazioa ekuazio linealen sistema baten bidez, hiru ezezagunekin, eta adierazi zer adierazten duen horietako bakoitzak.

(b) Egun batean, lantegiak ogi ez integraleko 140 unitate banatzen badizkio bigarren okindegiari, mota bakoitzeko zenbat ogi-unitate jasotzen ditu okindegi bakoitzak?

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu). Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = -1$ eta $x = 2$ abszisa duten puntuetan paraleloak dira. Gainera, f-k mutur erlatibo bat dauka $x = 1$ denean, eta $f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ da.

(a) Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

(b) Aurkitu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = -1$ abszisa duen puntuan, $A = -3$, $B = 0$ eta $C = 4$ parametroen balioetarako.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **4A** edo **4B**.

(4A) Izan bitez honako zuzen hauek:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

(a) Kalkulatu r eta s zuzenen posizio erlatiboa.

(b) Kalkulatu zuzen biak barnean dituen planoaren ekuazioa.

(4B) Izan bitez honako zuzen eta plano hauek:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + 4z = 1; \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10.$$

(a) Kalkulatu A parametroaren balioa r zuzena eta π planoa paraleloak izan daitezen.

(b) $A = 1$ bada, kalkulatu koordenatu-jatorriaren π planoarekiko puntu simetrikoa.

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **5A** edo **5B**.

(5A) Kalkulatu bi integral hauek:

$$\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1}\, dx, \qquad \int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}\, dx.$$

(5B) Izan bitez $y = x^2$ eta $y = \dfrac{x^2}{3}$ ekuazioetako kurbak eta $y = x$ ekuazioko zuzena. Marraztu hiru kurba horiek lehen koadrantean mugatzen duten eremua, eta kalkulatu eremu horren azalera.

Azterketa eredua 2

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu). "MARKOAK" enpresan koadroetarako markoak egiten dituzte. Oraingo honetan 274 koadro laukizuzenetarako markoak eskatu dizkiete. Koadro guztiek dimentsio berdinak eta 0,3m^2-ko azalera dituzte. Marko bakoitzerako bi material mota erabiliko dituzte: atal horizontalak 12€/m kostua duen material batekoak izango dira, eta bertikaletarako 10€/m kostua duen material bat erabiliko dute. Eskaera egin duen enpresak ahalik eta gutxien ordaindu nahi du. Kalkulatu zeintzuk izan behar duten koadroetako neurriek ahalik eta gutxien ordaintzeko.

BIGARREN ARIKETA (2 puntu). $(0,0,2)$ puntutik abiatzen den dron batek $\vec{v}=(1,-1,3)$ bektoreak emandako norabideari jarraitzen dio, eta $(2,2,0)$, $(4,1,1)$ eta $(1,1,5)$ puntuak barne dituen horma leun baten aurka talka egiten du. Zein puntutan gertatzen da talka?

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu). Eztabaidatu honako sistema honen soluzioaren existentzia α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3, \\ \alpha x - 5y + 2z = -2, \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Ebatzi sistema, ahal bada, $\alpha = 1$ denean.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **4A** edo **4B**.

(4A) Kalkulatu bi integral hauek:

(a) $\displaystyle\int 2x\cos(2x+5)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx.$

(4B) $y=(x-1)^2$, $y=(x+1)^2$ eta $y=7-3x$ ekuazioetako kurbak hartzen dira.

(a) Irudikatu hiru kurba horiek lehenengo koadrantean mugaturiko eremua.

(b) Kalkulatu aurreko ataleko eremuaren azalera.

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **5A** edo **5B**.

(5A) Mahai baten gainean botoiak dituzten hiru kutxa dauzkat; lehenengo kutxak 3 botoi ditu, bigarrenak 5 eta hirugarrenak 4. Kutxa bakoitzak botoi gorri bakarra dauka. Ausaz kutxa bat aukeratu eta ausaz botoi bat ateratzen badut:

(a) Zein da botoi gorri bat izateko probabilitatea?

(b) Botoi gorri bat atera badut, zein da lehen kutxakoa izateko probabilitatea?

(5B) Seriean fabrikatutako pieza baten pisuak (gramotan) banaketa normalari jarraitzen dio, non batez bestekoa 52 den eta desbiderapen tipikoa 6,5.

(a) Kalkulatu fabrikatutako pieza baten pisua 50 eta 68 gramoen artean egoteko probabilitatea.

(b) Fabrikatutako piezen % 30ek pieza jakin batek baino pisu handiagoa badu, zenbateko pisua du azken horrek?

Azterketa eredua 3

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu). Gimnasio batek 230 m^2-ko azalera du, eta panelen bidez hiru gelatan antola daiteke, hainbat jardueratarako. Ordu jakin batean, 60 bazkide joaten dira, eta hiru jardueraren artean aukera dezakete: zumba, spinning eta yoga. Pertsona bakoitzak 3 m^2 behar ditu zumba egiteko, 6 m^2 spinning bizikletarako, eta 2 m^2 bere yoga estera jartzeko. Pertsona bakoitzari 200 ml ur emango zaizkio zumba egin behar badu, 400 ml spinning egin behar badu eta 100 ml yoga egin behar badu. 15 litro ur eman badira, zer azalera izan behar du areto bakoitzak aukeratu duten jardueran bazkide guztiak hartzeko?

BIGARREN ARIKETA (2 puntu). Kalkulatu $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2+9x+8}{x^2+3x+2}\,dx$, jarraitutako urrats bakoitza azalduz.

Eskatu diogu Mikeli $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^2+9x+8}{x^2+3x+2}\,dx$ kalkulatzeko eta esan digu emaitza $3/2$ dela. Bigarren integral hori kalkulatu gabe, azaldu Mikeli zergatik ez den zuzena bere emaitza.

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bi dado ditugu, bata normala eta bestea trukatua. Trukatuan bata 4 aldiz dago, eta bia 2 aldiz. Dado bat ausaz aukeratzen da, eta bitan jaurtitzen da.

a) Zein da lehen jaurtiketan 1 zenbakia eta bigarrenean 2 zenbakia lortzeko probabilitatea?

b) Lehenengo jaurtiketaren emaitza 1 zenbakia eta bigarrenarena 2 zenbakia izan direla jakinik, kalkulatu dado trukatua hautatua izateko probabilitatea.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **4A** edo **4B**.

(4A) Izan bedi $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ funtzioa. Kalkulatu haren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak, eta aurkitu haren maximo eta minimo erlatiboak. Kalkulatu f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 2$ abszisa duen puntuan.

(4B) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ funtzioa gorakorra da $(-\infty, 1)$ tartean eta beherakorra $(1, +\infty)$ tartean. Gainera, f-ren grafikoaren zuzen ukitzailea $x = 2$ abszisa duen puntuan $y = x+2$ ekuazioko zuzenarekiko perpendikularra da eta $f(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ da. Kalkulatu A, B eta C parametroen balioak.

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **5A** edo **5B**.

(5A) Aurkitu $P(4, -3, 0)$ puntuaren P' puntu simetrikoa $A(-2, 0, 1)$ eta $B(-2, -1, 0)$ puntuetatik pasatzen den r zuzenarekiko.

(5B) Izan bitez $A(2, 3, 4)$, $B(3, -1, -2)$, $C(5, -1, 2)$ puntuetatik igarotzen den π planoa eta $D(6, -5, -4)$, $E(7, 1, 4)$ puntuetatik igarotzen den r zuzena.

(a) Kalkulatu π planoak eta r zuzenak osatzen duten angelua, emaitza gradu, minutu eta segundotan emanez.

(b) r-k eta π-k elkar ebakitzen badute, kalkulatu ebaki-puntua. Bestela, kalkulatu r zuzenaren eta π planoaren arteko distantzia.

Azterketa eredua 4

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu). Arkitektura-enpresa bat estalki inklinatu bat diseinatzen ari da kirol-pabiloi baterako. Estalkia metalezko egitura baten gainean jarri behar da, eta egitura hori eraikinaren jatorrizko diseinuaren parte diren bi plano inklinaturen arteko elkargunean zehar hedatzen da. Plano horiek ekuazio hauek definitzen dituzte: $\pi_i\colon 3x+4y+5z=0$ eta $\pi_2\colon 2x+y+z=0$. Gainera, estalkia egituran jada eraikitako ainguratze-puntu batetik igarotzea nahi da, $A=(1,2,1)$ puntuan kokatua. Zehaztu A ainguratze-puntua eta π_1 eta π_2 planoen arteko ebakidura den zuzena barne dituen planoaren ekuazioa.

BIGARREN ARIKETA (2 puntu). Katilu zilindrikoen fabrikaziorako ikerketa bat egitea eskatu digute. Baldintza gisa, haien edukierak 216π cm^3 izan behar duela ezarri dute. Enpresak fabrikazioa ahalik eta merkeena izatea nahi du.

(a) Kalkulatu fabrikaziora bidali beharreko neurrien zehaztapenak helburua lortzeko.

(b) Katiluak kanpoaldetik koloreztatu egingo dira, eta horretarako erabiliko den materialaren kostua 3 €/m^2 da. Kalkulatu katilu bat koloreztatzeko kostua.

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu). zan bitez A eta B ausazko gertaera independenteak, haien probabilitateak $P(A)=0,7$ eta $P(B)=0,1$ izanik, eta izan bitez $\overline{A}$ eta $\overline{B}$ A eta B gertaeren osagarriak, hurrenez hurren. Kalkulatu honako probabilitate hauek arrazoituz, eta argi adierazi jarraitutako prozedura edo aplikatutako legea:

(a) $P(A\cup B)$,

(b) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$,

(c) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$,

(d) $P(A\cap\overline{B})$,

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **4A** edo **4B**.

(4A) Kalkulatu $\displaystyle\int \ln(x^2-1)\,dx$, jarraitu dituzun urratsak azalduz.

(4B) Izan bitez $y=\dfrac{x^2}{3}$, $y=x^2+2x$ eta $y=3$ ekuazioetako kurbak.

(a) Marraztu kurba horiek lehen koadrantean mugatzen duten eremua.

(b) Kalkulatu eremu horren azalera.

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **5A** edo **5B**.

(5A) Eztabaidatu honako sistema honen soluzioaren existentzia α parametroaren balioen arabera:

$$\begin{cases}\alpha x+y+z=2,\\ x+2y+(\alpha-1)z=-1,\\ 2x+y+(\alpha-2)z=1.\end{cases}$$

(5B) Jakina da

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2$$

dela. Kalkulatu, erabilitako propietateak azalduz,

(a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c, \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$.

Azterketa eredua 5

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu). Hiri-parke batean, paisaia-taldea dekorazio-lorategi bat diseinatzen ari da, espazioa mugatzen duten bi bide kurbatuen artean kokatuko dena. Bide horiek ibilbide parabolikoak egiten dituzte, eta honako funtzio hauen bidez definituta: goiko bideak $y = -x^2 + 2x$ ekuazioko kurbari jarraitzen dio, eta beheko bideak $y = x^2 - 10x$ ekuazioko kurbari jarraitzen dio.

Bi bide horien arteko eremua soropilez eta lorez estaliko da, eta azalera kalkulatu behar da proiektuaren kostua kalkulatzeko. Irudikatu grafikoki bi kurbek mugatutako esparrua, eta kalkulatu haren azalera.

BIGARREN ARIKETA (2 puntu). 2024ko minbizi-zifren estimazioaren arabera, 2024an Espainian diagnostikatutako minbizien kopurua 286.664 kasura iritsiko da, hau da, 2023an baino % 2,65 gehiago, 279.260 kasurekin, Espainiako Onkologia Medikoko Sozietateak (SEOM) eta Minbizi Erregistroen Espainiako Sareak (REDECAN) egindako txostenaren arabera.

Adinaren eta sexuaren araberako zenbatespena honako hau da: 45 urtetik beherakoak % 5,56 dira eta horietatik % 62,86 emakumeak dira; 65 urtetik gorakoak % 59,77 dira eta horietatik % 39,11 emakumeak; eta gainerakoetatik % 42,25 emakumeak dira.

(a) 2024an minbizia izan duen pertsona bat ausaz aukeratuz, kalkulatu emakumea izateko probabilitatea.

(b) 2024an minbizia izan duen emakume bat ausaz aukeratuz, kalkulatu 65 urte edo gutxiago izateko probabilitatea.

(c) 2024an minbizia izan duen pertsona bat ausaz aukeratuz, zer da probableagoa, emakumea izatea edo ez izatea? Arrazoitu zure erantzuna bakarrik aurreko emaitzak kontuan izanda.

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu). Izan bitez $A = (1, a, -1)$ eta $B = (b, 1, 1)$ puntuetatik pasatzen den r zuzena, eta $x + y - 2z = 2b$ ekuazioko π planoa.

a) Kalkulatu a eta b parametroen balioak r zuzena π planoarekiko perpendikularra izan dadin.

b) Kalkulatu a eta b parametroen balioak r zuzena π planoaren barruan gera dadin.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **4A** edo **4B**.

(4A) Izan bedi $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

(a) **(1 punto)** Aurkitu f funtzioaren asintotak.

(b) **(1 punto)** Aurkitu f funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

(4B) Jakina da $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ funtzioak mutur erlatibo bat duela $x = 1/2$ denean eta f-ren grafikoaren zuzen ukitzailearen ekuazioa $x = 1$ abszisa duen puntuan $y = 6x - 2$ dela.

(a) Aurkitu A, B eta C parametroen balioak.

(b) Aurkitu f funtzioaren mutur erlatibo guztiak eta arrazoitu maximoak edo minimoak diren.

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun, **5A** edo **5B**.

(5A) Izan bedi honako ekuazio linealen sistema hau:

$$\begin{cases} x + 3z = 3 + \alpha y \\ z + \alpha x + y - 2 = 0 \\ x + 2z - y = 1. \end{cases}$$

(a) Eztabaidatu sistemaren soluzioen existentzia α parametroaren balioen arabera.

(b) Ahal bada, ebatzi sistema $\alpha = 0$ den kasurako.

(5B) Izan bitez α zenbaki erreala eta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Aurkitu α parametroaren balioak A matrizearen alderantzizkoa existitu dadin.

(b) $\alpha = 0$ kasu partikularrean, kalkulatu, ahal izanez gero, A^{-1} eta A^{2025}.

Azterketa eredua 6

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu).

$a \neq 0$ emanda, honako ekuazio linealetako sistema hau dugu:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a + 2. \end{cases}$$

(a) **(1 puntu)** Aurkitu a-ren balio bat zeinetarako emandako sistemak soluzio bat baino gehiago dituen.

(b) **(1 puntu)** Aurkitu sistemaren soluzio guztiak aurreko ataleko a-ren baliorako.

BIGARREN ARIKETA (2 puntu).

(a) **(1 puntu)** Marraztu $y = x(2x-3)$ eta $y = x(2-x)$ ekuazioetako parabolek mugatzen duten eremua.

(b) **(1 puntu)** Kalkulatu (a) ataleko eremuaren azalera, eta eman emaitza zatiki baten bidez.

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu).

Oreka termikoan dagoen gas ideal klasiko bat hartzen da, T tenperaturan. Sistema Maxwell-Boltzmann-en estatistikak deskribatzen du. Gasaren molekulen abiadura gaussiarra ez den arren, osagai kartesiar bakoitza bada. Kontuan hartuta abiaduraren lehenengo osagaia, haren banaketa normala $N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right)$ da, k_B Boltzmannen konstantea eta m hartutako gasaren molekula baten masa izanik. Nitrogenoaren kasuan, $T = 300$ K denean, desbideratze tipikoa $\frac{k_B T}{m} = 298$ m/s da.

(a) **(0,75 puntu)** Kalkulatu 300 K tenperaturan dagoen nitrogeno molekula baten abiaduraren lehenengo osagaiaren balio absolutua 300 m/s baino txikiagoa izateko probabilitatea.

(b) **(0,75 puntu)** Kalkulatu 300 K tenperaturan dagoen nitrogeno molekula baten abiaduraren lehenengo osagaia -600 m/s eta -300 m/s artean egoteko probabilitatea.

(c) **(0,5 puntu)** Ikertzaile batek beste gas bat aztertzen du, argona, zeinaren molekulek nitrogenoarenek baino masa handiagoa duten, eta, ondorioz, tenperatura T mantentzen bada, dagokion desbideratze tipikoa txikiagoa da. Zenbakizko kalkulurik egin gabe, erantzun modu arrazoituan: argon molekula baten abiaduraren lehenengo osagaiaren balio absolutua 300 m/s baino txikiagoa izateko probabilitatea nitrogenoaren kasuarena baino handiagoa, txikiagoa ala berdina izango da? Justifikatu zure erantzuna desbideratze tipikoaren adierazpena erabiliz, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun.

(4A) Izan bitez $r \equiv x = y - 1 = -z$ zuzena eta $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$ planoa.

(a) **(1,5 puntu)** Aztertu r zuzenaren eta π planoaren arteko posizio erlatiboa A parametroaren balioen arabera.

(b) **(0,5 puntu)** Kalkulatu r zuzenetik π planorako distantzia A parametroaren balioen arabera.

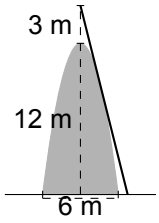
(4B) Izan bitez $A = (1, 1, 2)$ eta $B = (-1, 0, 3)$ puntuak.

(a) **(1,5 puntu)** Aurkitu π planoaren ekuazioa, zeinerako A eta B puntuak π planoarekiko simetrikoak diren.

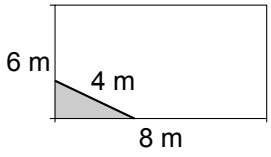
(b) **(0,5 puntu)** Zein da A-tik π-rako distantzia?

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun.

(5A) Hormigoizko tontor batek forma parabolikoa du, haren altuera 12 m eta oinarria 6 m izanik, irudian ikusten den bezala. Eskailera bat kokatu nahi da, tontorraren kontra jarrita eta haren goiko muturra tontorraren gailurraren gainetik 3 m-ra geratzeko moduan. Tontorraren oinarriaren zer distantziatara kokatu behar da eskaileraren beheko muturra?



(5B) Gela errektangeluar batean hormen luzerak 6 m eta 8 m izanik, gune triangeluar bat mugatu nahi da 4 m-ko luzera duen panel zuzen bat kokatuz, irudian ikusten den bezala. Non kokatu behar da panela mugatutako gunearen azalera maximoa izan dadin?



Azterketa eredua 7

LEHENENGO ARIKETA (2 puntu).

Esne-zentral batek bertako hiru ekoizleren esnea biltzen du, A, B eta C. A ekoizleak 10 litroko ontzietan eramaten du bere esnea, eta ontzi bakoitzeko 5 € ordaintzen zaizkio. B ekoizleak 15 litroko ontziak erabiltzen ditu, eta 9 € jasotzen ditu ontzi bakoitzeko. Azkenik, C ekoizleak 12 litroko ontziak eramaten ditu, eta bakoitzeko 4 € ordaintzen zaizkio. Azken astean, 612 litro esne jaso dira, 48 ontzitan, eta guztira 304 € ordaindu behar dira, hiru abeltzainen artean banatzeko.

(a) **(1 puntu)** Planteatu deskribatutako egoera modelizatzen duen ekuazioko sistema.

(b) **(1 puntu)** Zenbat ordaindu behar zaio ekoizle bakoitzari azken astean zentralera eraman duen esneagatik?

BIGARREN ARIKETA (2 puntu).

Izan bedi $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

(a) **(1,5 puntu)** Esan zein diren A, B eta C parametroen balioak f-ren grafikoak $x = 0$ abzisadun puntuan duen ukitzailea $y = 3 - 3x$ zuzena izan dadin eta f funtzioak mutur erlatibo bat izan dezan $x = 1$ puntuan.

(b) **(0,5 puntu)** f-k $x = 1$ puntuan duen mutur erlatiboa maximoa edo minimoa da?

HIRUGARREN ARIKETA (2 puntu).

Espainiako azken urteko auto-salmentaren azterketa egin dute. Saldutako 1.148.650 unitateetatik, % 10 auto guztiz elektrikoak dira, eta guztiek aldagailu automatikoa dute. Saldutako unitateen % 52 auto hibridoak dira (bai entxufagarriak bai ez-entxufagarriak), eta horietatik % 6k eskuzko aldagailua dute. Saldutako gainerako unitateetatik % 53 aldagailu automatikokoak dira.

(a) **(1 puntu)** Kalkulatu aldagailu automatikodun zenbat auto saldu diren Espainian 2025ean.

(b) **(1 puntu)** 2025ean Espainian saldutako auto bat ausaz aukeratuta, eta aldagailu automatikoa duela jakinda, kalkulatu hibridoa izateko probabilitatea.

LAUGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun.

(4A) Izan bedi P honako bi zuzen hauen arteko ebaki-puntua:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + s, \\ z = 0. \end{cases}$$

Kalkulatu P puntuaren P' puntu simetrikoa $2x + y - z = 3$ ekuazioko planoarekiko.

(4B) Izan bitez r $P(1, 7, 4)$ puntutik pasatzen den eta $\vec{v}(6, 3, -5)$ norabide-bektorea duen zuzena, eta $\pi \equiv 2x + y - 3z = -13$.

(a) **(1 puntu)** Kalkulatu r zuzenaren π planoarekiko ebaki-puntua.

(b) **(1 puntu)** Kalkulatu r zuzenak eta π planoak osatzen duten angelu txikiena.

BOSGARREN ARIKETA (2 puntu). Bietariko **bati bakarrik** erantzun.

(5A) Kalkulatu

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}\, dx$$

integrala, egindako pausoak azalduz.

(5B)

(a) **(1 puntu)** Marraztu $y = x^2 - \pi^2$ ekuazioko parabolak eta $f(x) = \cos(x/2)$ funtzioaren grafikoak mugatutako eremua.

(b) **(1 puntu)** Kalkulatu aurreko ataleko eremuaren azalera, eta idatzi emaitza π zenbakiaren funtzioan.

Contenidos

El currículo de la asignatura Matemáticas II, como el del resto de asignaturas de bachillerato, tiene como finalidad la adquisición de una serie de competencias, concretamente:

- Modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y de la ciencia y la tecnología aplicando diferentes estrategias y maneras de razonamiento para obtener posibles soluciones.
- Verificar la validez de las posibles soluciones de un problema empleando el razonamiento y la argumentación para contrastar su idoneidad.
- Formular e investigar conjeturas o problemas, utilizando el razonamiento y la argumentación, con apoyo de herramientas tecnológicas, para generar nuevo conocimiento matemático.
- Utilizar el pensamiento computacional de forma eficaz modificando, creando y generalizando algoritmos mediante el uso de las matemáticas, para modelizar y resolver situaciones de la vida cotidiana y del ámbito de la ciencia y la tecnología.
- Investigar y utilizar conexiones entre las diferentes ideas matemáticas estableciendo vínculos entre conceptos, procedimientos, argumentos y modelos para generar una visión matemática integrada.
- Descubrir los vínculos y profundizar en las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento, interrelacionando conceptos y procedimientos en situaciones diversas para resolver problemas y desarrollar la capacidad crítica, creativa e innovadora.
- Representar información, conceptos y procesos matemáticos seleccionando diferentes tecnologías para visualizar ideas y estructurar razonamientos matemáticos.
- Comunicar las ideas matemáticas, de forma individual y colectiva, empleando el soporte, la terminología y el rigor apropiados, para organizar y consolidar el pensamiento matemático.
- Utilizar destrezas, tanto personales como sociales, identificando y gestionando emociones, aceptando el error y la incertidumbre, creando relaciones saludables y participando activa y reflexivamente en proyectos en grupos heterogéneos, para mejorar la consecución de los objetivos en el aprendizaje de las matemáticas.

Esas competencias deben adquirirse a través de los saberes básicos. En la asignatura Matemáticas II, los saberes básicos se agrupan en seis sentidos:

- Sentido numérico
- Sentido de la medida
- Sentido espacial
- Sentido algebraico y pensamiento computacional
- Sentido estocástico
- Sentido socioafectivo.

En relación con los saberes básicos comunes evaluables en la PAU se proponen los siguientes como marco de referencia fundamental:

SENTIDO NUMÉRICO:

- Adición y producto de vectores y matrices. Producto de un escalar por una matriz. Uso adecuado de las propiedades.
- Destrezas para operar con números reales, vectores y matrices.
  - Producto de un escalar por un vector.
  - Producto escalar de dos vectores en el espacio: definición, propiedades y aplicaciones.
  - Producto vectorial de dos vectores en el espacio: definición, propiedades y aplicaciones.
  - Producto mixto de tres vectores en el espacio: definición, propiedades y aplicaciones.
  - Potencia de una matriz cuadrada: cálculo de la potencia de una matriz en situaciones cíclicas.
  - Determinantes: definición, propiedades y cálculo.
  - Matriz inversa: definición, propiedades y cálculo.
  - Cálculo del rango de una matriz, posiblemente dependiente de uno o varios parámetros, aplicando el método de Gauss o determinantes.
- Conjuntos de vectores y matrices: estructura, comprensión y propiedades.
  - Conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.
  - Concepto de matriz fila, columna, cuadrada, diagonal, triangular, nula, identidad, traspuesta, simétrica y antisimétrica.

SENTIDO DE LA MEDIDA

- Resolución de problemas que impliquen medidas de longitud, superficie o volumen en un sistema de coordenadas cartesianas.
- Aplicación de los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad a la representación y el estudio de situaciones susceptibles de ser modelizadas mediante funciones.
  - Aplicación de los conceptos de límite de una función en un punto (tanto finito como infinito) y de límites laterales para estudiar la continuidad de una función y la existencia de asíntotas verticales.
  - Aplicación del concepto de límite de una función en el infinito para el estudio de la existencia de asíntotas horizontales y oblicuas.
  - Continuidad en un intervalo. Teorema de Bolzano y aplicaciones.
  - Tipos de discontinuidad.
  - Conocimiento de las propiedades algebraicas de las funciones continuas y esbozo de la gráfica de la función en un entorno de los puntos de discontinuidad.
  - Conocimiento de la relación existente entre continuidad y derivabilidad de una función en un punto.
  - Continuidad y derivabilidad de funciones definidas a trozos.
  - Distinción entre función derivada y el valor de la derivada de una función en un punto. Determinación del dominio de derivabilidad de una función.
  - Conocimiento y uso del teorema de derivación para funciones compuestas (la regla de la cadena).
  - Derivadas laterales.

  - Conocimiento del teorema de Rolle.
  - Conocimiento del teorema del valor medio de Lagrange.

- Aplicación de la derivada en la resolución de problemas en diferentes contextos.
  - Determinación, usando la derivación, de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una función.
  - Determinación de la ecuación de la recta tangente y de la ecuación de la recta normal a la gráfica de una función en un punto.
  - Determinación, usando la derivación, de los intervalos de concavidad ($f''(x) < 0$) y convexidad ($f''(x) > 0$) de una función.
  - Estudio de los puntos críticos de una función (puntos con derivada nula) y los puntos en los que la función no es derivable.
  - Uso de la teoría de funciones continuas y de funciones derivables para resolver problemas de extremos relativos y absolutos.
  - Resolución de problemas de optimización relacionados con la geometría o con las ciencias experimentales y sociales, e interpretación del resultado obtenido dentro del contexto.
  - Estudio y representación gráfica, de manera aproximada, de funciones polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y definidas a trozos a partir de sus propiedades globales y locales obtenidas empleando las herramientas del análisis (límites y derivadas).
  - Representación de forma aproximada de la gráfica de una función de la forma $y = f(x)$ indicando: dominio, simetrías, periodicidad, cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y de convexidad y puntos de inflexión.
  - Conocida la representación gráfica de una función o de su derivada, obtener información de la propia función (límites, límites laterales, continuidad, asíntotas, derivabilidad, crecimiento y decrecimiento, etc.).

- La derivada como razón de cambio: interpretación geométrica.
- Interpretación de la integral definida como el área bajo una curva.
- Cálculo de áreas de recintos utilizando técnicas elementales de integración.
  - Concepto de primitiva. Propiedades.
  - Primitivas inmediatas.
  - Primitivas de funciones racionales en las que las raíces del denominador son reales.
  - Método de integración por partes (aplicándolo reiteradamente).
  - Técnica de integración por cambio de variable.
  - Dadas dos funciones, mediante sus expresiones analíticas o mediante sus representaciones gráficas, reconocer si una es primitiva de la otra.
  - Relación existente entre dos primitivas de una misma función.
  - Dada una familia de primitivas, saber determinar aquella cuya gráfica pase por un punto dado.
  - Aplicación de la regla de Barrow.
  - Conocer la propiedad de linealidad de la integral con respecto al integrando y conocer la propiedad de aditividad con respecto al intervalo de integración.

  - Cálculo de áreas mediante integrales definidas.
  - Técnicas para la aplicación del concepto de integral a la resolución de problemas que impliquen cálculo de superficies planas y volúmenes de revolución.

- La probabilidad como medida de la incertidumbre asociada a fenómenos aleatorios.

SENTIDO ESPACIAL

- Objetos geométricos de tres dimensiones: análisis de las propiedades y determinación de sus atributos.
- Resolución de problemas relativos a objetos en el espacio representados mediante coordenadas cartesianas y vectores.
- Expresiones algebraicas de los objetos geométricos en el espacio: selección de la más adecuada en función del contexto: ecuaciones de una recta y de un plano en el espacio tridimensional.
  - Planteamiento y resolución de problemas de geometría afín relacionados con la incidencia y el paralelismo de rectas y planos en el espacio tridimensional.
  - Construcción del plano que contiene a una recta y pasa por un punto exterior.
  - Construcción del plano que contiene a dos rectas paralelas o secantes.
  - Construcción de la recta que corta perpendicularmente a dos rectas que se cruzan en el espacio.
  - Construcción de la recta que pasa por un punto exterior a dos rectas que se cruzan y corta a ambas.
  - Estudio de la posición relativa de puntos, rectas y planos en el espacio.
  - Planteamiento y resolución de problemas de geometría métrica relacionados con la medida de ángulos entre rectas y planos, la medida de distancias entre puntos, rectas y planos y la ortogonalidad entre rectas y planos.
  - Interpretar un problema de posiciones relativas de planos y/o rectas como análisis de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.
  - Vectores normales a un plano, perpendicular común a dos rectas que se cruzan, vector perpendicular a otros dos, áreas de triángulos y paralelogramos y volúmenes de tetraedros y paralelepípedos.
  - Estudio de la simetría en el espacio: punto simétrico respecto de otro punto, respecto de un plano y respecto de una recta.
- Modelización de la posición y el movimiento de un objeto en el espacio utilizando vectores.

SENTIDO ALGEBRAICO Y PENSAMIENTO COMPUTACIONAL

- Patrones y regularidades en situaciones diversas: identificación y generalización.
- Relaciones cuantitativas en situaciones diversas: identificación y determinación de la clase o clases de funciones que puedan modelizarlas.
- Sistemas de ecuaciones para modelizar y resolver situaciones en diversos contextos.
- Matrices para modelizar situaciones derivadas de contextos científicos, sociales y de la vida cotidiana.

- Técnicas y uso de matrices para modelizar situaciones en las que aparezcan sistemas de ecuaciones lineales.
  - Utilización de las matrices para representar datos estructurados y situaciones de contexto real.
  - Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos.
  - Expresar un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial y conocer el concepto de matriz ampliada del mismo.
- Sistemas de ecuaciones lineales: estudio de la compatibilidad (Teorema de Rouché-Frobenius) y resolución (Cramer, Gauss) en diversos contextos.
  - Sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles.
  - Teorema de Rouché-Frobenius.
  - Discusión de sistemas lineales, posiblemente dependientes de uno o varios parámetros, mediante el método de Gauss o por estudio directo de rangos.
  - Resolución de sistemas lineales, y posiblemente dependientes de uno o varios parámetros, mediante el método de Gauss o empleando la regla de Cramer.
- Resolución de ecuaciones y sistemas matriciales mediante el uso de la matriz inversa y mediante su transformación en un sistema de ecuaciones lineales.
- Dependencia e independencia lineal de conjuntos de vectores en el espacio.
- Expresión de un vector como combinación lineal de otros vectores.
- Propiedades de las distintas clases de funciones: comprensión y comparación.

SENTIDO ESTOCÁSTICO

- Cálculo de probabilidades en experimentos compuestos. Probabilidad condicionada e independencia de sucesos. Diagramas de árbol y tablas de contingencia.
  - Operaciones con sucesos. Leyes de De Morgan.
  - Planteamiento y resolución de problemas que requieran del manejo de los axiomas de la probabilidad de Kolmogorov o del trazado de diagramas de Venn.
- Teoremas de la probabilidad total y de Bayes en la resolcución de problemas con el fin de tomar decisiones acertadas en situaciones de incertidumbre.
  - Planteamiento y resolución de problemas de contexto real que requieran del empleo de los teoremas de la probabilidad total y de Bayes o del trazado de diagramas de árbol.
  - Resolución de problemas e interpretación del teorema de Bayes para actualizar la probabilidad a partir de la observación y la experimentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
- Probabilidad a priori, reasignación de verosimilitud y probabilidad a posteriori con ayuda de un diagrama de árbol o una tabla de contingencia, y estudio de su relación con el teorema de Bayes.
- Variables aleatorias discretas y continuas. Parámetros de la distribución.

- Distribución binomial: definición, parámetros y cálculo de probabilidades en casos en que los números combinatorios implicados sean sencillos.
- Distribución normal: definición, parámetros y cálculo de probabilidades usando la tabla de la distribución normal estándar.
- Aproximación de la binomial a la normal.

- Modelización de fenómenos estocásticos mediante las distribuciones de probabilidad binomial y normal.
- Resolución de problemas de probabilidad en situaciones de contexto real.

SENTIDO SOCIOAFECTIVO

- Destrezas para evaluar diferentes opciones y tomar decisiones en la resolución de problemas y tareas matemáticas.

Se hace notar que la correcta aplicación de estos contenidos en la PAU requiere dominar también las bases establecidas en primero de Bachillerato.

Modelo de examen 1

PRIMER EJERCICIO (2 puntos). Los resultados publicados en diciembre de 2019 sobre la aplicación de la vacuna M72 en Sudáfrica, Kenia y Zambia revelaron que la probabilidad de quedar protegido contra la tuberculosis pulmonar activa es de 0,54. Se aplica la vacuna a un grupo de 3289 adultos.

(a) Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en 1800 adultos.

(b) Calcula la probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en menos de 1700 adultos.

(c) ¿La probabilidad de que la vacuna haya sido efectiva en entre 1750 y 1850 adultos puede ser $0,0037$? Razona tu respuesta, sin calcular esa probabilidad.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos). Un obrador sirve cada día a dos panaderías tres tipos de pan: de trigo, de maíz e integral. En la primera panadería reciben un total de 150 unidades de pan y en la segunda, un total de 200 unidades. En esta segunda panadería reciben 10 unidades más de pan de trigo que en la primera y el doble de pan integral. Además, el obrador hace cada día 50 unidades de pan de maíz y las distribuye todas entre las dos panaderías.

(a) Expresa la información anterior mediante un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, indicando qué representa cada una de ellas.

(b) Si un día el obrador distribuye 140 unidades de pan no integral a la segunda panadería, ¿cuántos unidades de pan de cada tipo recibe cada una de las panaderías?

TERCER EJERCICIO (2 puntos). Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Las rectas tangentes a la gráfica de la función f en los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 2$ son paralelas. Además, f tiene un extremo relativo cuando $x = 1$ y $f(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.

(a) Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$ para los valores de los parámetros $A = -3$, $B = 0$ y $C = 4$.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **4A** o **4B**.

(4A) Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

(a) Calcula la posición relativa de las rectas r y s,.

(b) Encuentra la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

(4B) Se consideran la recta y el plano siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y + 4z = 1; \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x - 3y + Az = 10.$$

(a) Calcula el valor del parámetro A para que la recta r y el plano π sean paralelos.

(b) Si $A = 1$, calcula el punto simétrico del origen de coordenadas respecto del plano π.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **5A** o **5B**.

(5A) Calcula las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1}\, dx, \qquad \int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}\, dx.$$

(5B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$. Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas y calcula el área de ese recinto.

Modelo de examen 2

PRIMER EJERCICIO (2 puntos). En la empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cuadros. En esta ocasión les han solicitado marcos para 274 cuadros rectangulares. Todos los cuadros tienen las mismas dimensiones y una superficie de 0,3m^2. Para cada marco van a emplear dos tipos de material: las partes horizontales serán de un material cuyo coste es de 12€/m y para las verticales utilizarán un material cuyo coste es de 10€/m. La empresa que ha realizado el pedido quiere pagar lo mínimo posible. Calcula cuáles deben ser las medidas de los cuadros para pagar el mínimo posible.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos). Un dron parte del punto $(0,0,2)$ siguiendo la dirección dada por el vector $\vec{v} = (1,-1,3)$ y choca contra una pared lisa que contiene a los puntos $(2,2,0)$, $(4,1,1)$ y $(1,1,5)$. ¿En qué punto se produce la colisión?

TERCER EJERCICIO (2 puntos). Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 4y + z = 3, \\ \alpha x - 5y + 2z = -2, \\ 2x - y + 3z = 1. \end{cases}$$

Resuelve el sistema, si es posible, cuando $\alpha = 1$.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **4A** o **4B**.

(4A) Calcula las dos integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int 2x\cos(2x+5)\,dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx.$

(4B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = (x-1)^2$, $y = (x+1)^2$ e $y = 7-3x$.

(a) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) Calcula el área del recinto del apartado anterior.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **5A** o **5B**.

(5A) Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene 3 botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

(b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

(5B) El peso (en gramos) de una pieza fabricada en serie sigue una distribución normal de media 52 y desviación típica 6,5.

(a) Calcula la probabilidad de que el peso de una pieza fabricada esté comprendida entre 50 y 68 gramos.

(b) Si el 30 % de las piezas fabricadas pesa más que una pieza dada, ¿cuánto pesa esta última?

Modelo de examen 3

PRIMER EJERCICIO (2 puntos). Un gimnasio tiene una superficie de 230 m^2 que puede disponer mediante paneles en tres salas para diferentes actividades. A una hora determinada, acuden 60 socios que pueden elegir entre tres actividades: zumba, spinning y yoga. Cada persona necesita 3 m^2 para hacer zumba, 6 m^2 para la bicicleta de spinning y 2m^2 para colocar su esterilla de yoga. A cada persona se le entregan 200ml de agua si va a hacer zumba, 400ml si va a hacer spinning y 100ml si va a hacer yoga. Si se han entregado 15 litros de agua, ¿qué superficie debe tener cada sala para acoger a todos los socios en la actividad que han elegido?

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos). Calcula $\int_1^2 \frac{2x^2+9x+8}{x^2+3x+2}\,dx$, explicando cada uno de los pasos realizados.

Hemos pedido a Mikel que calcule $\int_0^1 \frac{2x^2+9x+8}{x^2+3x+2}\,dx$ y nos ha dicho que el resultado es $3/2$. Sin calcular esta segunda integral, explícale a Mikel por qué su resultado no es correcto.

TERCER EJERCICIO (2 puntos). Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **4A** o **4B**.

(4A) Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.

(4B) La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **5A** o **5B**.

(5A) Halla el punto P' simétrico de $P(4, -3, 0)$ respecto de la recta r que pasa por los puntos $A(-2, 0, 1)$ y $B(-2, -1, 0)$.

(5B) Sean π el plano que pasa por los puntos $A(2, 3, 4)$, $B(3, -1, -2)$, $C(5, -1, 2)$ y r la recta que pasa por los puntos $D(6, -5, -4)$, $E(7, 1, 4)$.

(a) Calcula el ángulo entre el plano π y la recta r, expresando el resultado en grados, minutos y segundos.

(b) En caso de que r y π se corten, calcula el punto de intersección. En caso contrario, calcula la distancia entre la recta r y el plano π.

Modelo de examen 4

PRIMER EJERCICIO (2 puntos). Una empresa de arquitectura está diseñando una cubierta inclinada para un pabellón deportivo. La cubierta debe apoyarse sobre una estructura metálica que se extiende a lo largo de la línea de intersección entre dos planos inclinados que forman parte del diseño original del edificio. Estos planos están definidos por las ecuaciones: $\pi_i\colon 3x + 4y + 5z = 0$ y $\pi_2\colon 2x + y + z = 0$. Además, se quiere que la cubierta pase por un punto de anclaje ya construido en la estructura, situado en el punto $A = (1, 2, 1)$. Determinar la ecuación del plano que contiene al punto de anclaje A y a la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos). Nos han pedido que hagamos un estudio para la fabricación de tazas cilíndricas. Como condición han impuesto que deben tener una capacidad de 216π cm^3. La empresa quiere que la fabricación sea lo más económica posible.

(a) Calcula las especificaciones de medidas que deben enviar a fabricación para lograr el objetivo.

(b) Las tazas irán coloreadas por el exterior con un material cuyo coste es de 3 €/m^2. Calcula el coste de imprimación de una taza.

TERCER EJERCICIO (2 puntos). Sean A y B sucesos aleatorios independientes, siendo sus probabilidades $P(A) = 0,7$ y $P(B) = 0,1$, y sean $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos complementarios de A y B respectivamente. Calcula las siguientes probabilidades razonadamente, e indica claramente el proceso o ley aplicada:

(a) $P(A \cup B)$,

(b) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$,

(c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$,

(d) $P(A \cap \overline{B})$,

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **4A** o **4B**.

(4A) Calcula $\displaystyle\int \ln(x^2 - 1)\, dx$, explicando los pasos que has seguido.

(4B) Se consideran las curvas de ecuaciones $y = \dfrac{x^2}{3}$, $y = x^2 + 2x$ e $y = 3$.

(a) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por dichas curvas.

(b) Calcula el área de ese recinto.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **5A** o **5B**.

(5A) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2, \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1, \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1. \end{cases}$$

(5B) Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$.

Modelo de examen 5

PRIMER EJERCICIO (2 puntos). En un parque urbano, el equipo de paisajismo está diseñando un jardín decorativo que se ubicará entre dos caminos curvos que delimitan el espacio. Estos caminos siguen trayectorias parabólicas y están definidos por las siguientes funciones: el camino superior sigue la curva de ecuación $y = -x^2 + 2x$ y el camino inferior sigue la curva de ecuación $y = x^2 - 10x$.

El área entre estos dos caminos será cubierta con césped y flores, y se necesita calcular su superficie para estimar el coste del proyecto. Representa gráficamente el recinto delimitado por las dos curvas y calcula su área.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos). Según estimación de cifras de cáncer en 2024, el número de cánceres diagnosticados en España durante el año 2024 alcanzará los 286.664 casos, lo que supone un ligero incremento del 2,65% respecto a 2023 con 279.260 casos, según el informe "Las cifras del cáncer en España 2024", elaborado por la Sociedad Española de Oncología Médica (SEOM) y Red Española de Registros de Cáncer (REDECAN).

La estimación por edad y sexo es la siguiente: 5,56% menores de 45 años, de los cuales el 62,86% son mujeres; 59,77% mayores de 65 años, de los cuales el 39,11% son mujeres; del resto, el 42,25% son mujeres.

(a) Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que sea mujer.

(b) Seleccionada al azar una mujer que ha tenido cáncer en 2024, calcula la probabilidad de que tenga 65 años o menos.

(c) Seleccionada al azar una persona que ha tenido cáncer en 2024, ¿qué es más probable, que sea mujer o que no lo sea? Razona tu respuesta teniendo en cuenta únicamente los resultados anteriores.

TERCER EJERCICIO (2 puntos). Sean r la recta que pasa por los puntos $A = (1, a, -1)$ y $B = (b, 1, 1)$ y π el plano de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r sea perpendicular al plano π.

b) Calcular los valores de los parámetros a y b para que la recta r esté contenida en el plano π.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **4A** o **4B**.

(4A) Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

(a) Encuentra las asíntotas de la función f.

(b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

(4B) Se sabe que la función $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las dos opciones, **5A** o **5B**.

(5A) Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3z = 3 + \alpha y \\ z + \alpha x + y - 2 = 0 \\ x + 2z - y = 1. \end{cases}$$

(a) Discute la existencia de solución según los valores del parámetro α.

(b) Si es posible, resuélvelo en el caso $\alpha = 0$.

(5B) Sean α un número real y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentra los valores del parámetro α para los que existe la matriz inversa de A.

(b) En el caso particular en que $\alpha = 0$ calcula, si es posible, A^{-1} y A^{2025}.

Modelo de examen 6

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Dado $a \neq 0$, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + ay = 1, \\ x + ay + z = a, \\ (a-2)x + ay + (a-1)z = a + 2. \end{cases}$$

(a) **(1 punto)** Encuentra un valor de a para el que el sistema dado tiene más de una solución.

(b) **(1 punto)** Encuentra todas las soluciones del sistema para el valor de a del apartado anterior.

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = x(2x-3)$ e $y = x(2-x)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado (a), y da el resultado como una fracción.

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

Se considera un gas ideal clásico en equilibrio térmico a temperatura T. El sistema viene descrito por la estadística de Maxwell-Boltzmann. A pesar de que el módulo de la velocidad de las moléculas del gas no es gaussiano, cada componente cartesiana de la velocidad sí lo es. Teniendo en cuenta la primera componente de la velocidad, su distribución normal es $N\left(0, \frac{k_B T}{m}\right)$, siendo k_B la constante de Boltzmann y m la masa de una molécula del gas considerado. En el caso del nitrógeno a $T = 300$ K, la desviación típica es $\frac{k_B T}{m} = 298$ m/s.

(a) **(0,75 puntos)** Calcula la probabilidad de que el valor absoluto de la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K sea inferior a 300 m/s.

(b) **(0,75 puntos)** Calcula la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de nitrógeno a una temperatura de 300 K esté comprendida entre -600 m/s y -300 m/s.

(c) **(0,5 puntos)** Un investigador estudia otro gas, argón, cuyas moléculas tienen mayor masa que las del nitrógeno y, por tanto, si se mantiene la temperatura T, la desviación típica correspondiente es menor. Sin realizar ningún cálculo numérico, responde razonadamente: ¿la probabilidad de que la primera componente de la velocidad de una molécula de argón tenga valor absoluto menor que 300 m/s será mayor, menor o igual que en el caso de una molécula de nitrógeno? Justifica tu respuesta utilizando la expresión de la desviación típica, $\sigma = \frac{k_B T}{m}$.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Sean la recta $r \equiv x = y - 1 = -z$, y el plano $\pi \equiv -x + 2y + z + A = 0$.

(a) **(1,5 puntos)** Discute la posición relativa de la recta r y el plano π en función de los valores del parámetro A.

(b) **(0,5 puntos)** Calcula la distancia de la recta r al plano π en función de los valores del parámetro A.

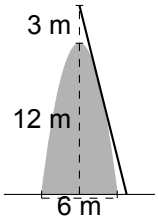
(4B) Sean los puntos $A = (1, 1, 2)$ y $B = (-1, 0, 3)$.

(a) **(1,5 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que A y B son simétricos con respecto a π.

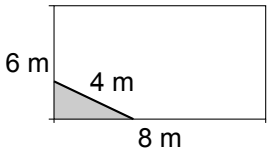
(b) **(0,5 puntos)** ¿Cuál es la distancia de A a π?

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Un montículo de hormigón tiene forma parabólica con una altura de 12 m y una base de 6 m, como se ve en la figura. Se quiere colocar una escalera apoyada en el montículo y de forma que su extremo superior quede 3 m por encima de la cúspide del montículo. ¿A qué distancia de la base del montículo debe colocarse el extremo inferior de la escalera?



(5B) En una sala rectangular con paredes que miden 6 m y 8 m se quiere acotar una zona triangular colocando un panel recto de 4 m de longitud, como se ve en la figura. ¿Dónde debe colocarse el panel para que el área de la zona acotada sea máxima?



Modelo de examen 7

PRIMER EJERCICIO (2 puntos).

Una central lechera recoge leche de tres productores locales, A, B y C. El productor A lleva su leche en recipientes de 10 litros y se le paga a 5 € por cada recipiente. La productora B utiliza recipientes de 15 litros y recibe 9 € por cada recipiente. Por último, la productora C aporta recipientes de 12 litros y se le paga a 4 € por cada uno. En la última semana, se han recogido un total de 612 litros de leche, en 48 recipientes y se debe pagar en total 304 €, a repartir entre los tres ganaderos.

(a) **(1 punto)** Plantea el sistema de ecuaciones que modeliza la situación descrita.

(b) **(1 punto)** ¿Cuánto se debe pagar a cada productor por la leche que ha llevado a la central la última semana?

SEGUNDO EJERCICIO (2 puntos).

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

(a) **(1,5 puntos)** Encuentra los valores de A, B y C para que la tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ sea la recta $y = 3 - 3x$ y f tenga un extremo relativo en $x = 1$.

(b) **(0,5 puntos)** El extremo relativo de f en el punto $x = 1$, ¿es un máximo o un mínimo?

TERCER EJERCICIO (2 puntos).

Se ha realizado un estudio de la venta de coches del último año en España. De un total de 1.148.650 unidades vendidas, el 10% corresponde a coches totalmente eléctricos, siendo todos ellos de cambio automático; el 52% de las unidades vendidas corresponde a coches híbridos (tanto enchufables como no enchufables), siendo de cambio manual el 6% de ellos; del resto de unidades vendidas, tienen cambio automático el 53% de ellos.

(a) **(1 punto)** Calcula la cantidad de coches con cambio automático vendidos en España en 2025.

(b) **(1 punto)** Elegido al azar un coche vendido en España en 2025 y sabiendo que tiene cambio automático, calcula la probabilidad de que sea híbrido.

CUARTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(4A) Sea P el punto de corte de las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + s, \\ z = 0. \end{cases}$$

Calcula el punto P' simétrico de P con respecto al plano de ecuación $2x + y - z = 3$.

(4B) Sea r la recta que pasa por el punto $P(1, 7, 4)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (6, 3, -5)$ y sea $\pi \equiv 2x+y-3z = -13$.

(a) **(1 punto)** Calcula el punto de corte de la recta r con el plano π.

(b) **(1 punto)** Calcula el ángulo mínimo formado por la recta r y el plano π.

QUINTO EJERCICIO (2 puntos). Responde **solo a una** de las opciones.

(5A) Calcula la integral

$$\int \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - x - 2}\, dx,$$

explicando los pasos realizados.

(5B)

(a) **(1 punto)** Dibuja el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2 - \pi^2$ y la gráfica de la función $f(x) = \cos(x/2)$.

(b) **(1 punto)** Calcula el área del recinto del apartado anterior, escribiendo el resultado en función del número π.