

**GIZARTE ETA OSASUN ZIENTZIETARAKO MATEMATIKA
EBAZPENA (2026)**

1) Ebatzi sistema edo ekuazioa (aukeratu bat bakarrik: a) edo b)):

a)
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -x - y + 3z = 9 \\ 3x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -x - y + 3z = 9 \\ 3x + y - 2z = -4 \end{cases} \rightarrow \text{errenkadaka eraginez} \begin{cases} F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 - F_3 \rightarrow F_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 4z = 11 \\ 5y + 5z = 10 \end{cases}$$

$$\text{Errenkadaka eraginez} \begin{cases} 5F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \text{ eta Laburtuz} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 4z = 11 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{Ebatziz } F_2 \rightarrow y = -1 \rightarrow \text{Ebatziz } F_1 \rightarrow x = 1$$

Beraz, sistemaren soluzioa hau da:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases}$$

b)
$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+3} = -2$$

$$\frac{(x+3)(x+1) - (x-2)(x-1)}{(x+3)(x-2)} = -2 \rightarrow 7x + 1 = -2(x-2)(x+3)$$

Eraginak eginez eta adierazpena laburtuz $\rightarrow 2x^2 + 9x - 11 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-11)}}{2 \cdot 2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5,5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

2) Kalkulatu zein den $f(x) = x^3 + 2x - 3$ funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzalea $x = 1$ abzisa duen puntuan.

Lehenengo kurbaren $x = 1$ abzisa duen puntua kalkulatzeko dugu.

$$f(1) = 1^3 + 2(1) - 3 = 0 \rightarrow P(x_0, y_0) = P(1, 0)$$

- Kurba batek puntu batean duen zuzen ukitzalearen adierazpen orokorra hurrengoa da:*
$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \rightarrow f'(x_0) = 3(1)^2 + 2 = 5$$

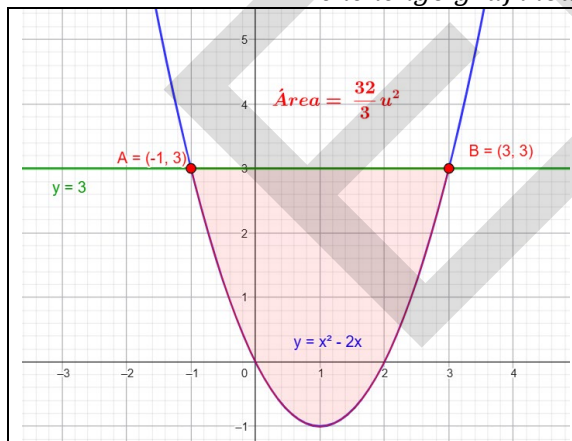
- Kurbaren puntu batean zuzen ukitzalearen adierazpenean ordezkatzuz:*

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \rightarrow y - 0 = 5 \cdot (x - 1) \rightarrow \text{Eragiketak eginez:}$$

$$\mathbf{y = 5x - 5 \text{ da zuzen ukitzalearen adierazpena emandako abzisa duen puntuan}}$$

3) Irudikatu eta kalkulatu $f(x) = x^2 - 2x$ funtzioaren grafikoak eta $y = 3$ zuzenak mugatzen duten eremuaren azalera.

Lehenengo grafikoa egin eta azalera identifikatzen da:



$f(x)$ funtzioa eta OX ardatzarekiko ebaki puntuak:

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Honez gain, $f(x)$ funtzioa eta $y=3$ zuzenaren arteko ebaki puntuak kalkulatu, $x=-1$ eta $x=3$ lortzen dira ($x^2 - 2x = 3$ planteatu), hau da, $A=(-1, 3)$ eta $B=(3, 3)$ puntuak.

Azalera kalkulatzeko:

$$A = \left| \int_{x_1}^{x_2} (3 - f(x)) dx \right| u^2 = |H(x)|_{x_1}^{x_2} u^2$$

$$\text{Barrow aplikatuz: } A = |H(x_2) - H(x_1)| u^2$$

$$A = \left| \int_{-1}^3 (3 - x^2 + 2x) dx \right| u^2 = \left| 3x - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right|_{-1}^3 u^2 =$$

$$\mathbf{A = \frac{32}{3} u^2}$$

- 4) Kalkulatu M parametroaren balioa hurrengo berdintza bete dadin:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & M \end{vmatrix} = 0$$

Sarrus aplikatuz: $(1 \cdot 1 \cdot M + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot (-2)) - ((-2) \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot M) = 0$

Laburtuz: $28 - 14M = 0 \rightarrow \mathbf{M = 2}$

- 5) Batxilergoko 1. mailako talde batean, Matematika sailak azterketa batean lortutako kalifikazioak aztertzen ditu (10 punturen gainean). Horretarako, ikasle bakoitzak lortu duen kalifikazio osoa jaso da. Emaizak taula honetan laburbiltzen dira:

Kalifikazioa (x)	4	5	6	7	8	9
Ikasle kopurua (f)	1	3	8	7	4	2

Kalkulatu moda, mediana, batezbesteko aritmetikoa eta banaketaren desbideratze tipikoa, eta osa ezazu dagokion histograma.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
4	1	4	16
5	3	15	75
6	8	48	288
7	7	49	343
8	4	32	256
9	2	18	162
25	166	1140	

Moda 6 Gehien errepikatzen dena

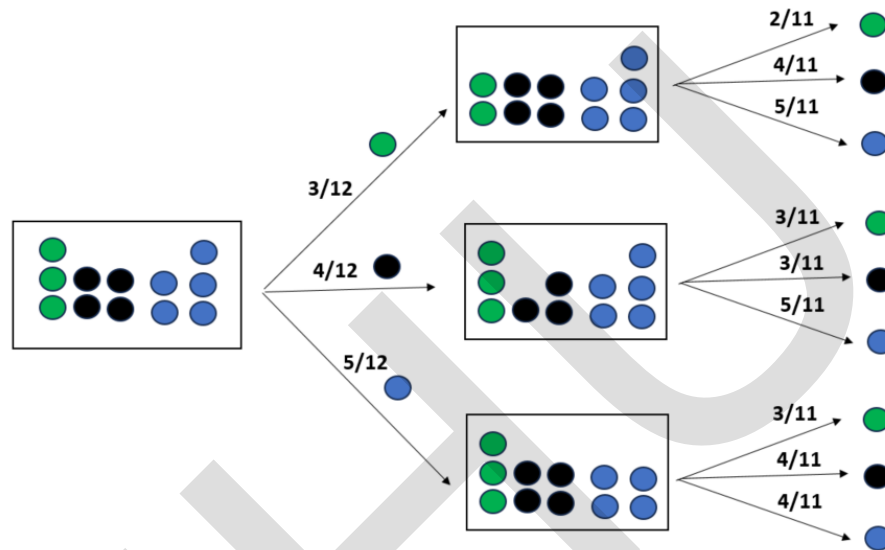
Mediana 7 Erdian geratzen den elementua

Batazbesteko aritmetikoa 6,64 $\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$

σ 1,23 $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$



- 6) 3 bola berde, 5 urdin eta 4 beltz dituen kutxa bat dugu. Atera kutxatik bola bat, eta jarraian atera beste bola bat (lehenengoa kutxara itzuli gabe).



- a) Kalkulatu ateratako bigarren bola urdina izateko probabilitatea.

$$P(2. \text{Urdina}) = P(1go \text{ Berdea} \cap 2. \text{Urdina}) + P(1go \text{ Beltza} \cap 2. \text{Urdina}) \\ + P(1go \text{ Urdina} \cap 2. \text{Urdina}) = \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{12} = 0,41\hat{6}$$

- b) Ateratako bigarren bola urdina izan dela jakinda, kalkulatu ateratako lehenengo bola berdea izateko probabilitatea.

$$P(1go \text{ Berdea} / 2. \text{Urdina}) = \frac{P(1go \text{ Berdea} \cap 2. \text{Urdina})}{P(2. \text{Urdina})} = \frac{\frac{5}{11} \cdot \frac{3}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{11} = 0,2\hat{7}$$

BALORAZIO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Azterketari emango zaion puntuazioa 0 eta 10 puntu artekoa izango da.
2. Problema guztiek balio bera dute: 2 puntu gehienez.
3. Planteamendu zuzenari emango zaio balioa, bai globalari, bai atal bakoitzari (atalik balego).
4. Zenbakizko erroreak, kalkulu-erroreak eta abar ez dira kontuan hartuko, baldin eta kontzeptualak ez badira.
5. Problema eta problemaren soluzioa hobeto bistaratzen laguntzen duten ideia, grafiko, aurkezpen, eskema eta abarri balio positiboa emango zaie.
6. Aurkezpen egokiari balioa emango zaio.

Problema bakoitzerako irizpideak

- 1. problema** (2 puntu) Problema zuzentzean, hau hartuko da kontuan:
 - Ekuazio/Sistemaren ebazpenaren planteamendua eta azalpenak (1 puntu)
 - Planteamendua garatuz, ebaztea eta emaitza argi adieraztea (1 puntu)
- 2. problema** (2 puntu) Problema zuzentzean, hau hartuko da kontuan:
 - $f(x)$ funtzioaren deribatua kalkulatzeko (0,5 puntu)
 - Ebakitze-puntua kalkulatzeko (0,5 puntu)
 - Egoki adieraztea eta kalkulatzeko zuzen ukitzailaren ekuazioa (1 puntu)
- 3. problema** (2 puntu) Problema zuzentzean, hau hartuko da kontuan:
 - Eremuaren irudikapena (0,5 puntu)
 - Integrazio mugatuaren mugak kalkulatzeko, eta egin beharreko integrala adieraztea (1 puntu)
 - Barrow-en teorema aplikatzeko eta integralaren emaitza kalkulatzeko (0,5 puntu)
- 4. problema** (2 puntu) Problema zuzentzean, hau hartuko da kontuan:
 - Matrizaren determinante garatzea (1 puntu)
 - Ekuazioa ebaztea eta M parametroa kalkulatzeko (1 puntu)
- 5. problema** (2 puntu) Problema zuzentzean, hau hartuko da kontuan:
 - Taula osatzea (0,3 puntu zutabe oso bakoitza-(totala barne) kalkulatzeko: $x_i \cdot f_i$; $x_i^2 \cdot f_i$)
 - Eskatutako parametroak (moda eta mediana 0,2 puntu bakoitzeko; batzbesteko aritmetikoa eta desbideratze tipikoa 0,25 puntu bakoitzeko)
 - Histograma adieraztea (0,5 puntu)
- 6. problema** (2 puntu) Problema zuzentzean, hau hartuko da kontuan:
 - Problemaren planteamendua eta a) atala ebaztea (1,25 puntu)
 - b) atala ebaztea (0,75 puntu)