

GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKO MATEMATIKA II

EBALUATZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

- Azterketak bost problema izango ditu, eta horietatik lau egin behar dira:
 - Lehenengo problema nahitaez erantzutekoa da.
 - Beste lau problemetatik hiru aukeratuko dira.
 - Atalak dituzten problemetan atal bat aukeratu behar izango da eta horri erantzungo zaio.
- Galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak egin diren ordenaren arabera zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
- Probari emango zaion puntuazioa 0 eta 10 puntu artekoa izango da.
- Problema guztiak 0 eta 2,5 puntu artean baloratuko dira.
- Problema batek hainbat atal dituenean, atal bakoitzari dagokion puntuazioa azterketan adieraziko da.
- Galdera bakoitzaren puntuazio orokorra puntu-zatikitan banatzen da, azken emaitzara iristeko tarteko urratsen arabera. Horrela, partzialki ebatzitako edo emaitza okerrak dituzten ariketek puntuazio jakina lor dezakete, beren garapenaren arabera.
- Erabili beharreko ebazpen-metodoa zehazten ez den galderetan, ariketa hori zuzen ebazteko edozein metodo onartuko da.
- Azterketa-koadernoan ariketa bakoitza ebazteko egin behar diren eragiketa eta kalkulu guztiak jaso beharko dira. Erantzun guztiak behar bezala justifikatuta egongo dira; izan ere, soluzioa bakarrik agertzen baldin bada, inolako azalpenik gabe, problemak zero puntuko puntuazioa izango du.

BALORAZIO POSITIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu zuzenak, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik baldin badago).
- Kontzeptuak, hiztegia eta notazio zientifikoa zuzen erabiltzea.
- Zenbakizko datuak eta datu grafikoak interpretatzeko edo/eta kalkulatzeko erabiltzen diren teknika espezifikoak ezagutzea.
- Problema osorik bukatzea eta emaitzaren zehaztasuna.
- Bi emaitza zenbakizko kalkuluetan erabilitako zehaztasun-mailan soilik desberdintzen badira, biak ontzat emango dira.
- Zenbakizko akatsak, kalkuluetan egindakoak, etab., ez dira kontuan hartuko baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
- Ariketa ebaztean egindako pausoen azalpen argia.
- Ariketa eta haren soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, grafikoak, aurkezpenak, eskemak, ...
- Aurkezpenaren txukuntasuna, bai eta unibertsitatera sartzear dagoen ikasle batek beharko lukeen heldutasuna erakusten duen beste edozein alderdi.

BALORAZIO NEGATIBOA MEREZI DUTEN FAKTOREAK

- Planteamendu okerrak.
- Kontzeptuen nahasketa.
- Kalkulu-akatsen ugaritasuna (oinarrizko gabezien adierazle delako).
- Akats bakanak, baldin eta hausnarketa kritikoa edo sen ona falta dela erakusten badute (adibidez, problema baten soluzioa $-3,7$ hozkailu dela esatea, edo probabilitate baten balioa $2,5$ dela esatea).
- Akats bakanak, haien ondorioz ebaztitako problema hasieran proposatutakoa baino errazagoa bilakatzen baldin bada.
- Azalpenik eza, bereziki erabiltzen ari diren aldagaien esanahia ez ematea.
- Akats ortografiko larriak, desordena, garbitasun falta, idazkera okerra, eta unibertsitatera sartzeaz dagoen ikasle batek izan beharko ez lukeen edozein ezaugarri desegoki.
- Boli gorria edo arkatza erabiltzea problemak garatzeko.
- Ez da baloratuko ariketa baten ebazpena funtzio baten grafikotik abiatuta egitea, grafiko hori balio-taula batetik lortutako puntuetan soilik oinarrituta eraikitzen bada (funtzio konstanteen, afinen eta linealen kasuan izan ezik).

ARIKETA BAKOITZARI DAGOZKION IRIZPIDE BEREZIAK

1. PROBLEMA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,6 puntu.

- Helburu funtzioa zehaztea, **0,1 puntu.**
- Murrizketak finkatzea, **0,2 puntu.**
- Soluzio bideragarrien esparrua irudikatzea eta zehaztea,
 - Murrizketa bakoitzaren irudikapena 0,1 puntu, beraz **0,3 puntu.**
 - Soluzio bideragarrien esparrua zehaztea, **0,2 puntu.**
- Soluzio bideragarrien esparruko erpinak zehaztea.
 - A erpina, **0,1 puntu.**
 - B erpina, **0,1 puntu.**
 - C erpina, **0,1 puntu.**
 - D erpina, **0,1 puntu.**
 - E erpina, **0,1 puntu.**
- Funtzioak erpinetan dituen balioak lortzea, **0,2 puntu.**
- Maximoa zehaztea **0,1 puntu.**

b. 0,3 puntu.

- Funtzioaren balioa zehaztea puntu maximoan, **0,3 puntu.**

c. 0,6 puntu.

- Hari bakoitzeko zenbat geratzen zaigun, bakoitza 0,2, beraz, **0,6 puntu.**

2. PROBLEMA 2.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Problemaren planteamendua, **1 puntu.**

b. 1,5 puntu.

- Hiru aldagaien kalkulua, 0,5 puntu aldagai bakoitza, **1,5 puntu.**

2. PROBLEMA 2.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,6 puntu.

- A^2 kalkulatzeko edo determinanteen propietatea erabiltzea:
 $|A^2| = |A|^2$, $|A|$ kalkulatzeko, **0,5 puntu.**
- a parametroen balioaren kalkulua, **0,1 puntu.**

b. 1 puntu.

- Arrazoitzea M erregularra dela, **0,3 puntu.**
- $A^{-1}(2)$ -ren kalkulua:
 - $\text{Adj}(A(2))^t$ matrizearen kalkulua, **0,4 puntu.**
 - $A^{-1}(2)$ matrizea zehaztea, **0,3 puntu.**

c. 0,9 puntu.

- $A^t(2)$ matrizearen kalkulua, **0,2 puntu.**
- M matrizea kalkulatzeko, **0,5 puntu.**
- M matrizearen determinantearen balioa kalkulatzeko, **0,2 puntu.**

3. PROBLEMA 3.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,3 puntu.

- Enekoren errendimendua zehaztea, **0,15 puntu.**
- Deieneren errendimendua zehaztea, **0,15 puntu.**

b. 0,6 puntu.

- Lehenengo eta bigarren deribatuen kalkulua, **0,1 puntu.**
- Maximo erlatiboa zer den zehaztea, **0,1 puntu.**
- Maximoa tartetik kanpo dagoela ondorioztatzea, **0,1 puntu.**
- Lanaldiaren barruko maximoa noiz den zehaztea, **0,2 puntu.**
- Zenbat den zehaztea, **0,1 puntu.**

c. 0,5 puntu.

- Lehenengo eta bigarren deribatuen kalkulua, **0,1 puntu.**
- Maximoa noiz den zehaztea, **0,2 puntu.**
- Zenbat den zehaztea, **0,2 puntu.**

d. 0,3 puntu.

- Planteamendua, **0,2 puntu.**
- Sorten den berdintza ebaztea, **0,1 puntu.**

e. 0,8 puntu.

- Adierazpen grafikoa, **0,15 puntu.**
- Kalkulatu behar den integral mugatua zehaztea, **0,1 puntu.**
- Integral mugagabearen kalkulua, **0,15 puntu.**
- Barrow erregela aplikatzea, **0,2 puntu.**
- Azalera zehaztea, **0,2 puntu.**

3. PROBLEMA 3.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1,25 puntu.

- Lehenengo deribatuaren kalkulua, **0,3 puntu.**
- Zuzen ukitzailearen ekuazioa, **0,2 puntu.**
- Funtzioaren balioa $x = 1$ puntuan, **0,2 puntu.**
- Malda zer den adieraztea, **0,2 puntu.**
- Sortzen den sistema ebaztea, **0,35 puntu.**

b. 0,75 puntu.

- Lehenengo deribatuaren zeinuak aztertzea, **0,35 puntu.**
- Funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zehaztea, **0,4 puntu.**

c. 0,5 puntu.

- Maximoa dela zehaztea, **0,2 puntu.**
- Maximo erlatiboa zehaztea, **0,3 puntu.**

4. PROBLEMA 4.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 1 puntu.

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,3 puntu.**
- Probabilitate osoaren formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,5 puntu.**

b. 1,5 puntu.

- Probabilitate osoaren formula adieraztea, **0,2 puntu.**
- $P(Z)$ kalkulua, **0,5 puntu.**
- Baldintzatutako probabilitatearen formula adieraztea, **0,4 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,4 puntu.**

4. PROBLEMA 4.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

a. 0,75 puntu.

- Zuhaitz-diagrama edo eskemaren bat egitea, **0,25 puntu.**
- $P(1)$ probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,3 puntu.**

b. 1 puntu.

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,3 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,7 puntu.**

c. 0,75 puntu.

- Adieraztea zer kalkulatu behar den, **0,1 puntu.**
- Bayes teoremaren formula adieraztea, **0,15 puntu.**
- $P(1^c)$ probabilitatearen kalkulua, **0,2 puntu.**
- Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,3 puntu.**

5. PROBLEMA 5.1 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

- A gradua:
 - Planteamendua, **0,2 puntu.**
 - Aldagaiaren tipifikazioa, **0,2 puntu.**
 - Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Notaren kalkulua, **0,4 puntu.**
- Berdin B gradurako **1 puntu.**
- Zein gradutan sartzeko aukera duten zehaztea, **0,5 puntu.**

5. PROBLEMA 5.2 ATALA (gehienez 2,5 puntu)

- a. **0,4 puntu.**
 - Problemaren planteamendua, **0,1 puntu.**
 - Laginaren batezbestekoaren banaketa, **0,3 puntu.**
- b. **0,75 puntu.**
 - Problemaren planteamendua, **0,1 puntu.**
 - Aldagaiaren tipifikazioa, **0,15 puntu.**
 - $P(\bar{X} \leq 172)$ probabilitatea zehaztea, **0,2 puntu.**
 - $P(\bar{X} \leq 182)$ probabilitatea zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Eskatutako probabilitatearen kalkulua, **0,1 puntu.**
- c. **0,75 puntu.**
 - Tarte bereizgarria nola zehazten den adieraztea, **0,3 puntu.**
 - Banaketa normalaren taulan balioa zehaztea, **0,2 puntu.**
 - Tarte bereizgarria zehaztea, **0,25 puntu.**
- d. **0,6 puntu.**
 - $z_{\frac{\alpha}{2}}$ -ren kalkulua, **0,2 puntu.**
 - Errore maximo onargarriaren formula adieraztea, **0,1 puntu.**
 - Laginaren tamaina kalkulatzeko, **0,2 puntu.**
 - Zenbat pertsona behar diren ondorioztatzea, **0,1 puntu.**

EBAZPENAK

1. PROBLEMA

“TAPIZAK FABRIKATZEKO PLANGINTZA: PROGRAMAZIO LINEALA”

a) Sarrerak maximizatzeko, zenbat metro lineal egin behar diren tapiz mota bakoitzeko:

	Zeta	Zilarra	Urre	Prezio	Aldagaiak
A	100 g	200 g	0	2.000 €	x
B	200 g	100 g	100 g	3.000 €	y
Eskuragarritasuna	50 kg	40 kg	22,5 kg		

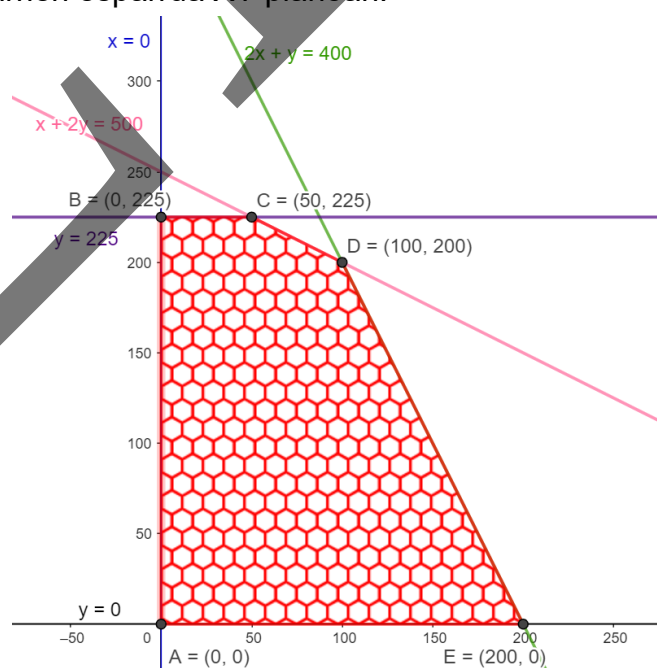
✚ Helburu-funtzioa hau da:

$$f(x, y) = 2.000x + 3.000y$$

✚ Murrizketak honako hauek dira:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 200y \leq 50.000 \\ 200x + 100y \leq 40.000 \\ 100y \leq 22.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$$

✚ Soluzio bideragarrien esparrua XY planoan:



Erpinak hauek dira:

$$A(0,0), \quad B(0,225), \quad C(50,225), \quad D(100,200), \quad E(200,0)$$

Erpin horietan helburu-funtzioak hartzen dituen balioak kalkulatu ditugu:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(0,225) = 675.000$$

$$f(C) = f(50,225) = 775.000$$

$$f(D) = f(100,200) = 800.000$$

$$f(E) = f(200,0) = 400.000$$

Beraz, funtzioaren balio maximoa **$D(100, 200)$** puntuan lortzen da; ondorioz, **A motako tapizeko 100 m lineal eta B motako tapizeko 200 m lineal** egin behar dira diru-sarrera maximoa lortzeko.

b) Diru-sarrera maximoa.

$$f(x,y) = f(D) = f(100,200) = 800.000$$

Horrela, **diru-sarrera maximoa 800.000 €** da.

c) Zehaztuko dugu zetazko, zilarrezko eta urrezko harien zer kantitate geratuko den diru-sarrera maximoa sortzen duten tapiz mota bakoitzaren metro linealak fabrikatzen denean.

Erabilitako zetazko hari kantitatea $= 100 \cdot 100 + 200 \cdot 200 = 50.000$; beraz, **0 kg zetazko hari geratzen zaigu.**

Erabilitako zilarrezko hari kantitatea $= 200 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 40.000$; beraz, **0 kg zilarrezko hari geratzen zaigu.**

Erabilitako urrezko hari kantitatea $= 100 \cdot 200 = 20.000$, hau da, 20 kg erabili dugu; beraz, **2,5 kg urrezko hari geratzen zaigu.**

2. PROBLEMA

2.1 ATALA

"TOMATE-KONTSERBEN EROSKETA: EKUAZIOEN SISTEMA ETA EBAZPENA"

a) Planteatuko dugu problema ebatzen duen ekuazioen sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ x + 2y + 4z = 40 \\ x + 1,8y + 3,3z = 35,6 \end{cases}$$

b) Gauss-en metodoaren bidez ebatziko dugu sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 40 \\ 1 & 1,8 & 3,3 & 35,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0,8 & 2,3 & 15,6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -0,1 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - F_1$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_1$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 0,8 \cdot F_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 3z = 20 \\ -0,1z = -0,4 \end{cases} \Rightarrow z = 4; y = 8; x = 8$$

2. PROBLEMA

2.2 ATALA

"MATRIZEEN PROPIETATEAK ETA KALKULUAK: DETERMINANTEA ETA ALDERANZGARRITASUNA"

$A(a)$ matrizea emanda:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Kalkulatuko dugu a -k izan behar duen balioa $A^2(a)$ -ren determinantea 4 izan dadin:

$$4 = |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (|A|)^2 \Rightarrow 4 = (|A|)^2 \Rightarrow |A| = \pm 2$$

Erabili dugu determinanteen propietate hau:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A| = a$$

Beraz: $a = \pm 2$

b) Egiaztatuko dugu $A(a)$ matrize erregularra dela, $a = \pm 2$ denean:

- Erregularra da?

$$A \text{ matrizea erregularra da} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

- a atalean, $a = \pm 2$ denean $|A| = \pm 2$ dela aztertu dugu, beraz **erregularra da**, eta, ondorioz, $\exists A^{-1}$.
- Arrazoitzeke beste modu bat hau da:

$$|A| = a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$$

Beraz, $a = \pm 2$ denez $\Rightarrow \exists A^{-1}$.

- $A^{-1}(a)$ matrizea kalkulatu dugu, $a = 2$ kasurako:

- $|A| = 2$

- $Adj(A)^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A(2))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj(A)^t \Rightarrow A^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

- c) Zehaztu dugu M matrizea eta bere determinantearen balioa:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = |A^t(2) \cdot A^{-1}(2)| = |A^t(2)| \cdot |A^{-1}(2)| = |A(2)| \cdot \frac{1}{|A(2)|} = 1 \Rightarrow |M| = 1$$

Erabili dugu honako determinanteen propietate hauek:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

$$|A^t| = |A|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

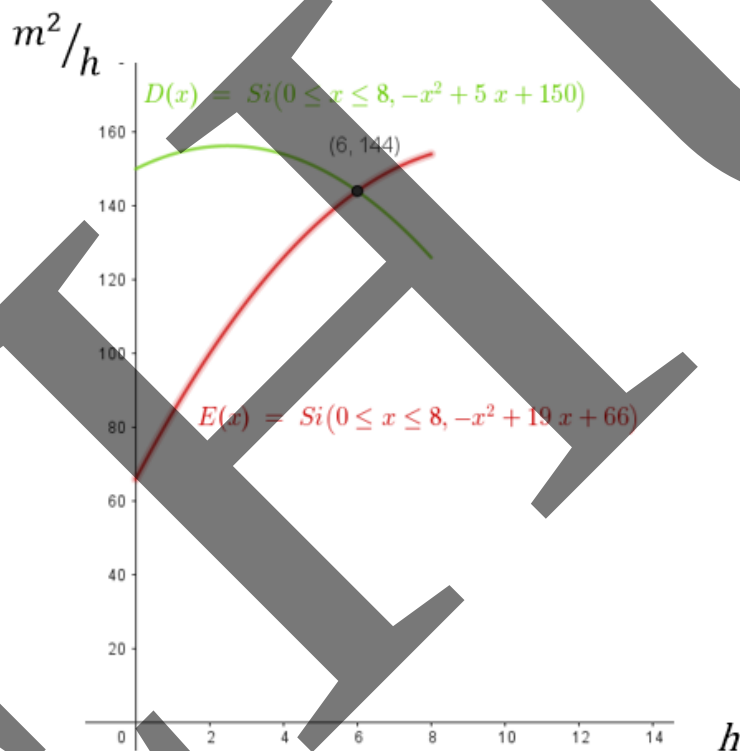
3. PROBLEMA

3.1 ATALA

"BI MARGOLARIREN ERRENDIMENDUA: ANALISIA ETA KONPARAZIOA"

$$Eneko \equiv E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$Deiene \equiv D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$



a) Aztertuko dugu zein margolarik daukan errendimendu hobeagoa hasieran.

Hasierako errendimendua egunaren hasierako errendimendua da, hau da, aldagaiak $x = 0$ denean:

$$\begin{cases} E(0) = 66 \\ D(0) = 150 \end{cases}$$

Beraz, Deienek badu errendimendu hoberena; hain zuzen ere, $150 \text{ m}^2/h$.

b) Kalkulatuko dugu zein den Eneko margolariaren errendimendurik handiena eta noiz gertatzen den:

- $E'(x)$ kalkulatuko dugu:

$$E'(x) = -2x + 19$$

- Kalkulatuko dugu zer baliok baliogabetzen duen lehenengo deribatua:

$$E'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 19 = 0 \Rightarrow x = 9,5$$

- Aztertuko dugu zein den funtzioaren bigarren deribatua puntu horretan:

$$E''(x) = -2 \Rightarrow E''(9,5) = -2 < 0,$$

Beraz, funtzioak maximoa du puntu horretan.

Ondorioztatzen dugu errendimendu handiena gertatzen den unea 9,5 ordu igarotakoa dela, eta, hori definizio-eremutik kanpo dago; beraz, ez du lortzen errendimendu handiena 8 orduko lanaldiaren barruan.

- Aztertuko dugu zein den maximoa, lanaldiaren barruan:

Funtzioaren hazkundea aztertuko dugu, eta, horretarako, lehenengo deribatuaren zeinua aztertuko dugu:

$$E'(x) = -2x + 19 > 0 \Rightarrow x < 9,5$$

Beraz, funtzioa gorakorra da definizio-eremu osoan, eta, beraz, errendimendu handiena (lanaldiaren barruan) **8. orduan** lortzen du, eta honako hau da:

$$E(8) = 154 \text{ m}^2/h$$

c) Zein da Deiene margolariaren errendimendurik handiena? Noiz gertatzen da?

$$D'(x) = -2x + 5 \Rightarrow$$

$$D'(x) = -2x + 5 = 0 \Rightarrow x = 2,5$$

$$D''(x) = -2 \Rightarrow D''(2,5) = -2 < 0$$

Beraz, Deienek 2,5 orduren buruan du errendimendu handiena, eta hau da:

$$D(2,5) = 156,25 \text{ m}^2/h$$

Horrek esan nahi du, 2 ordu eta 30 minutuko lanaldiaren ondoren Deiene errendimendu handienara iritsi dela, eta orduko 156,25 metro karratu estali dituela.

d) Noiz dute biek errendimendu bera?

$$E(x) = D(x) \Rightarrow -x^2 + 19x + 66 = -x^2 + 5x + 150 \Rightarrow 14x = 84 \Rightarrow x = 6$$

Beraz, **seigarren orduan** errendimendu bera izango dute.

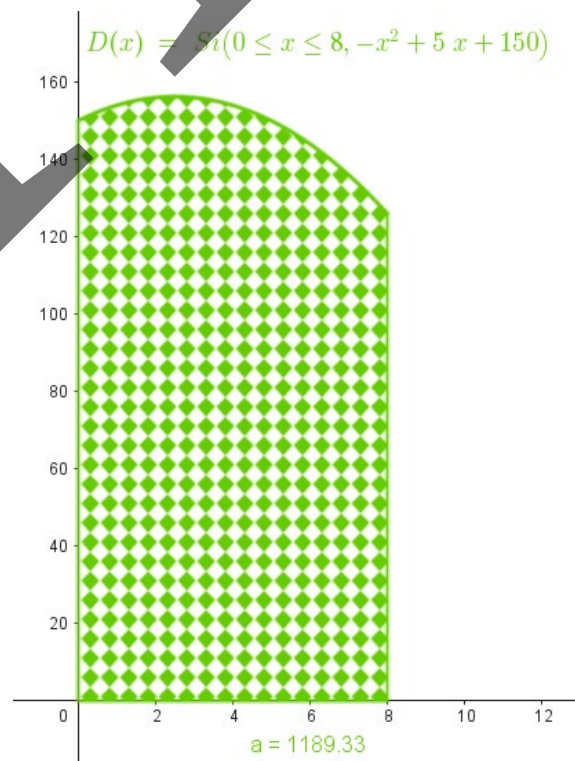
e) Eguneko lanaldiaren bukaeran, Deienek, guztira, zenbat margotu duen kalkulatu dugu:

$$\int_0^8 (-x^2 + 5x + 150) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 150x \right]_0^8 = -\frac{1}{3} \cdot 8^3 + \frac{5}{2} \cdot 8^2 + 150 \cdot 8 =$$

$$= 1.189,33$$

Beraz, eguneko lanaldiaren bukaeran,

Deienek **1.189,33 m²** margotu ditu.



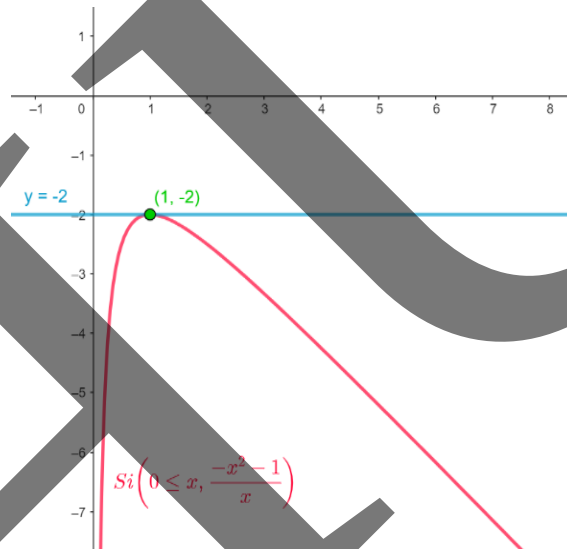
3. PROBLEMA

3.2 ATALA

"FUNTZIOAREN PARAMETROAK ETA GORAKORTASUN-BEHERAKORTASUN ANALISIA"

a) a eta b parametroen balioak kalkulatu ditugu:

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$$



- Lehenengo deribatua kalkulatu dugu:

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot x - 1 \cdot (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2} \Rightarrow f'(1) = a - b$$

- $x = 1$ puntuan, hau da zuzen ukitzailearen ekuazioa:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

- $f(1) = a + b$

Ordezkatuz:

$$y - (a + b) = (a - b)(x - 1) \Rightarrow y = (a - b)x + 2b$$

- $x = 1$ puntuan, badakigu funtzioaren zuzen ukitzailea $y = -2$ zuzena dela

Beraz, sortzen den sistema ebatziko dugu:

$$\left. \begin{array}{l} a - b = 0 \\ 2b = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1; \quad b = -1$$

b) $a = b = -1$ denean, zehaztuko ditugu $f(x)$ –aren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak.

$$f(x) = \frac{-x^2 - 1}{x} \quad \wedge \quad f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

- Aztertuko dugu zer baliok baliogabetzen duen lehenengo deribatua:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

- Funtzioaren izate eremua $(0, \infty)$ denez, $x = 1$ puntuan baino ez dugu aztertuko.

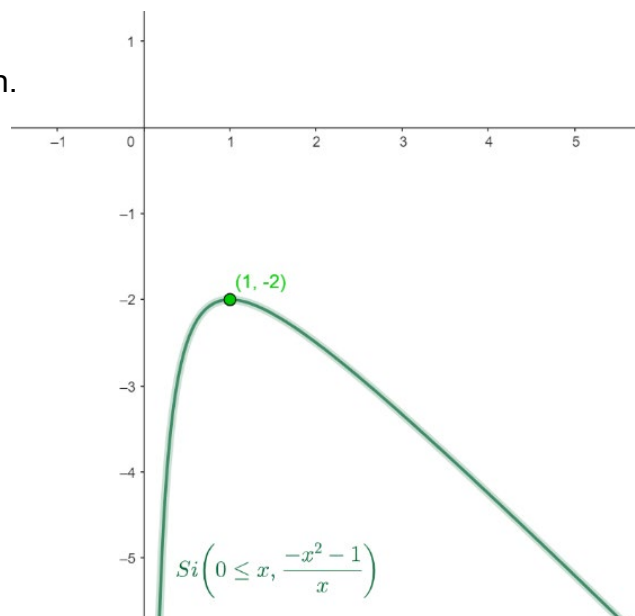
	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ -ren keinua	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Beraz, $f(x)$ $(0, 1)$ tartean gorakorra da eta $(1, \infty)$ tartean beherakorra da.

c) $a = b = -1$ balioetarako, $f(x)$ funtzioak badu maximo edo minimo erlatiborik? Izanez gero, puntua zehaztuko dugu:

- $(0, 1)$ tartean gorakorra da, eta $(1, \infty)$ tartean beherakorra da.
- $f(x)$ jarraitua da $(0, \infty)$ definizio-eremuan.

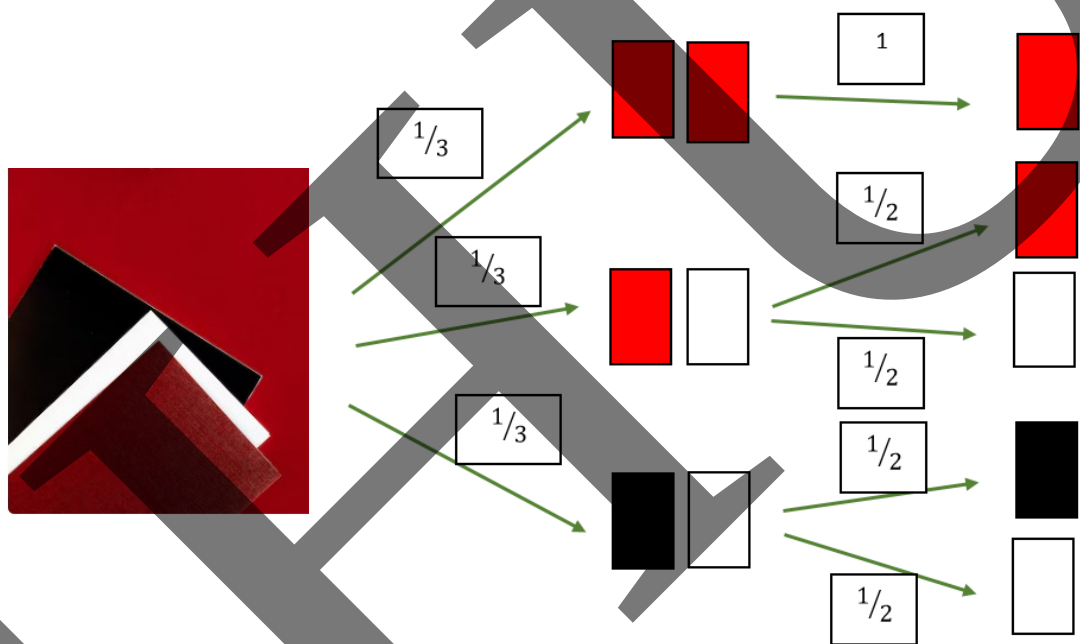
Beraz, $(1, -2)$ puntua da maximo erlatiboa.



4. PROBLEMA

4.1 ATALA

"KOLORETAKO KARTAK ETA PROBABILITATEAK"



Izan bitez honako gertaera hauek:

$K_1 = \{\text{lehenengo karta (Gorri Gorri)}\}$

$K_2 = \{\text{bigarren karta (Gorri Zuri)}\}$

$K_3 = \{\text{hirugarren karta (Beltz Zuri)}\}$

$G = \{\text{aurpegi Gorri}\}$

$Z = \{\text{aurpegi Zuri}\}$

$B = \{\text{aurpegi Beltz}\}$

a) Zein da erakutsitako aurpegi gorria izateko probabilitatea?

$$P(G) = P(K_1) \cdot P(G|K_1) + P(K_2) \cdot P(G|K_2) + P(K_3) \cdot P(G|K_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow P(G) = \frac{1}{2}$$

b) Erakutsitako aurpegia zuria bada, zein da beste aurpegia gorria izateko probabilitatea?

- Aurpegia zuria izateko probabilitatea kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} P(Z) &= P(K_1) \cdot P(Z|K_1) + P(K_2) \cdot P(Z|K_2) + P(K_3) \cdot P(Z|K_3) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow P(Z) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- A posteriori probabilitatea kalkulatu dugu:

$$\begin{aligned} P(G|Z) = P(K_2|Z) &= \frac{P(K_2 \cap Z)}{P(Z)} = \frac{P(K_2) \cdot P(Z|K_2)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow P(G|Z) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4. PROBLEMA

4.2 ATALA

“IKERREK AZTERKETA PRESTATZEKO DUEN PROBABILITATEAREN ANALISIA”

Izan bitez honako gertaera hauek:

$$1 = \{\text{lehenengo egunean ikasi}\}$$

$$2 = \{\text{bigarren egunean ikasi}\}$$

Orduan:

- Lehenengo egunean bakarrik ikasteko probabilitatea % 10 da $\Rightarrow$

$$P(1 \cap 2^c) = 0,1$$

- Bi egunetan ikasteko probabilitatea % 10 da $\Rightarrow$

$$P(1 \cap 2) = 0,1$$

- Ezta egun batean ere ikasteko probabilitatea % 25 da $\Rightarrow$

$$P(1^c \cap 2^c) = 0,25$$

- Datu horiekin $P(1 \cup 2)$ eta $P(1)$ kalkulatuko ditugu:

$$\blacksquare P(1^c \cap 2^c) = 0,25 = P(1 \cup 2)^c = 1 - P(1 \cup 2) \Rightarrow P(1 \cup 2) = 0,75$$

$$\blacksquare P(1 \cap 2^c) = 0,1 = P(1) - P(1 \cap 2) = P(1) - 0,1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(1) = 0,2 \Rightarrow P(1^c) = 0,8$$

Orain, ariketako probabilitateak kalkulatuko ditugu:

a) Ikerrek azterketa bigarren egunean ikasteko probabilitatea, hau da, $P(2)$

$$P(1 \cup 2) = 0,75 = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) \Rightarrow P(2) = 0,75 - 0,2 + 0,1 = 0,65 \Rightarrow$$

$$P(2) = 0,65$$

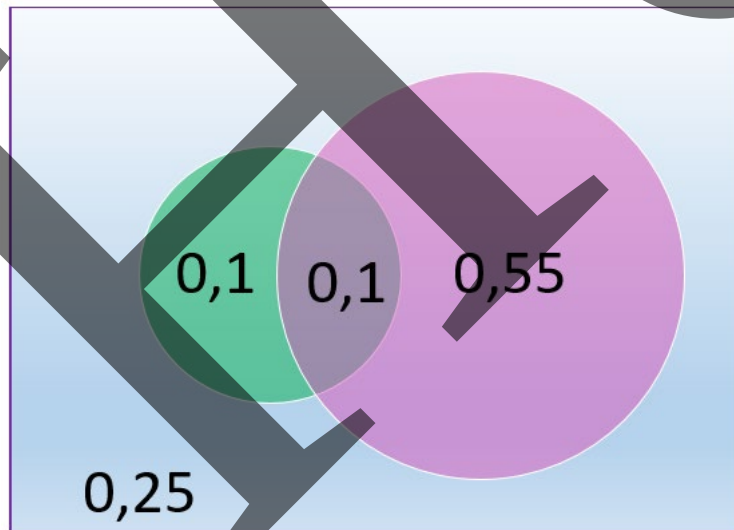
- b) Ikerrek azterketa bigarren egunean bakarrik ikasteko probabilitatea, hau da, $P(1^c \cap 2)$

$$P(1^c \cap 2) = P(2) - P(1 \cap 2) = 0,65 - 0,1 = 0,55 \Rightarrow P(1^c \cap 2) = 0,55$$

- c) Ikerrek bigarren egunean ikasteko probabilitatea, lehenengoan ikasi ez duela jakinda.

$$P(2 | 1^c) = \frac{P(1^c \cap 2)}{P(1^c)} = \frac{0,55}{0,8} = 0,6875 \Rightarrow P(2 | 1^c) = 0,6875$$

BESTE MODU BATEAN



Lehenengo egunean ikasteko probabilitatea $\equiv P(1)$



Bigarren egunean ikasteko probabilitatea $\equiv P(2)$

a) $P(2) = P(1 \cap 2) + P(1^c \cap 2) = 0,1 + 0,55$

- b) Eraitza Venn diagraman ikus dezakegu zuzen-zuzenean.

5. PROBLEMA

5.1 ATALA

“UNIBERTSITATERA SARTZEKO NOTEN BANAKETA NORMALARI BURUZKO PROBLEMA”

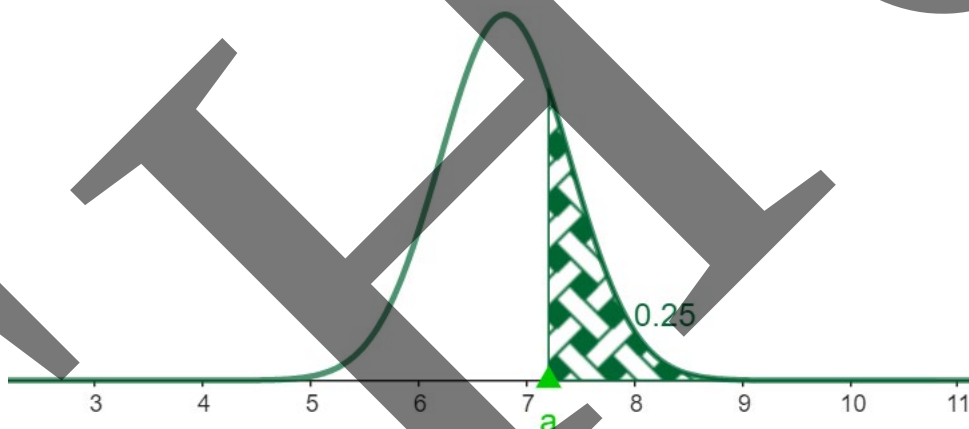
Honela deituko diegu:

A gradua $\equiv$ *Arkitektura Teknikoko Gradua*

B gradua $\equiv$ *Biomedical Engineering Gradua*

Bi graduetan sartzeko eskatzen den nota minimoa kalkulatu dugu:

✚ **A gradua:** $X \equiv N(\mu, \sigma) = N(6,8, 0,6)$



$$P(X > a) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{X - 6,8}{0,6} > \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,25$$

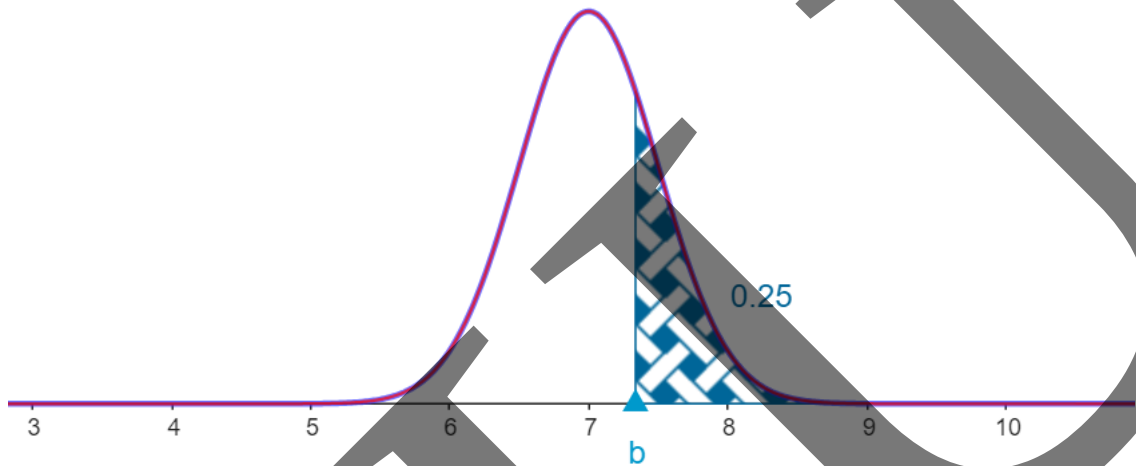
$$\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 6,8}{0,6}\right) = 0,75$$

Orduan, banaketa normalaren taulari begiratzuz:

$$\frac{a - 6,8}{0,6} = 0,675 \Rightarrow a = 7,205$$

Beraz, **A graduan sartzeko eskatuko den nota minimoa 7,205 izango da.**

 **B gradua:** $Y \equiv N(\mu', \sigma') = N(7, 0,5)$



$$P(Y > b) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{Y - 7}{0,5} > \frac{b - 7}{0,5}\right) = 0,25 \Rightarrow \left(Z \leq \frac{b - 7}{0,5}\right) = 0,75$$

Orduan, banaketa normalaren taulari begiratzuz:

$$\frac{b - 7}{0,5} = 0,675 \Rightarrow b = 7,3375$$

Beraz, **B graduan** sartzeko eskatuko den nota minimoa 7,3375 izango da.

Yolandak 7,25 puntuko nota duenez, soilik *Arkitektura Teknikoko Graduan (A)* sartzeko aukera izango du; eta Teresak, berriz, 7,45 puntuko nota duenez, *Arkitektura Teknikoko Graduan (A)* baita *Biomedical Engineering Graduan (B)* ere sartzeko aukera izango du.

5. PROBLEMA

5.2 ATALA

"ZERBITZU BATEKO LANGILEEN ALTUERAREN LAGINAREN BATEZBESTEKOAREN BANAKETAREN AZTERKETA"

a) Zehaztuko dugu laginaren batezbestekoaren banaketa, $\bar{X}$:

Altuera $\equiv X \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, non μ ; $\text{bariantza} = \sigma^2 = 169 \Rightarrow \sigma = 13 \text{ cm}$.

$X \equiv \mathcal{N}(\mu, 13)$

81 tamainako lagin aleatorio sinplea eta $\mu = 175 \text{ cm}$.

Laginaren batezbestekoaren banaketa $\bar{X}$ hau da:

$$\bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(175, \frac{13}{\sqrt{81}}\right) = \mathcal{N}(175, 1,44) \Rightarrow \bar{X} \equiv \mathcal{N}(175, 1,44)$$

b) $P(172 \leq \bar{X} \leq 182)$ kalkulatu dugu:

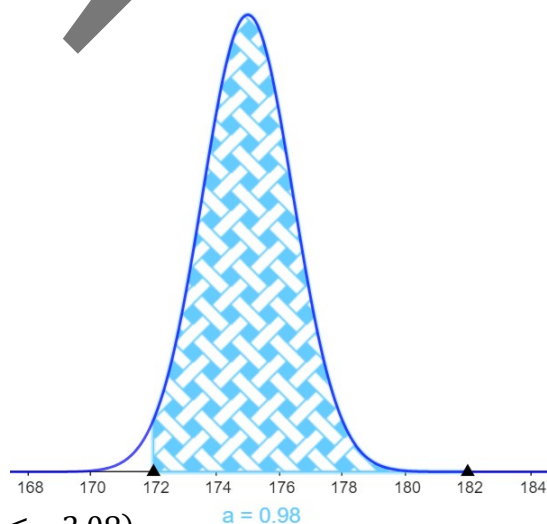
$$P(172 \leq \bar{X} \leq 182) = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172)$$

$\bar{X}$ aldagaiaren tipifikazioa:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 175}{1,44} \Rightarrow \bar{X} = 1,44 Z + 175$$

$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} \leq 182) &= P(1,44 Z + 175 \leq 182) = \\
 &= P(Z \leq 4,86) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\bar{X} \leq 172) &= P(1,44 Z + 175 \leq 172) = P(Z \leq -2,08) = \\
 &= P(Z \geq 2,08) = 1 - P(Z \leq 2,08) = 1 - 0,9812 = 0,0188
 \end{aligned}$$



Beraz:

$$P(172 \leq \bar{X} \leq 182) = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172) = 1 - 0,0188 = 0,9812 = \% 98,12$$

c) $\bar{X}$ ren % 99rako tarte bereizgarria zehaztuko dugu.

Badakigu $\bar{X} \equiv \mathcal{N}(175, 1,44)$ dela

%99rako tarte bereizgarria $(175 - e, 175 + e)$ da non $P(175 - e \leq \bar{X} \leq 175 + e) = 0,99$

$$P(175 - e \leq \bar{X} \leq 175 + e) = 0,99 \Rightarrow P(\bar{X} \leq 175 + e) - P(\bar{X} \leq 175 - e) = 0,99$$

$\bar{X}$ aldagaiaren tipifikazioa:

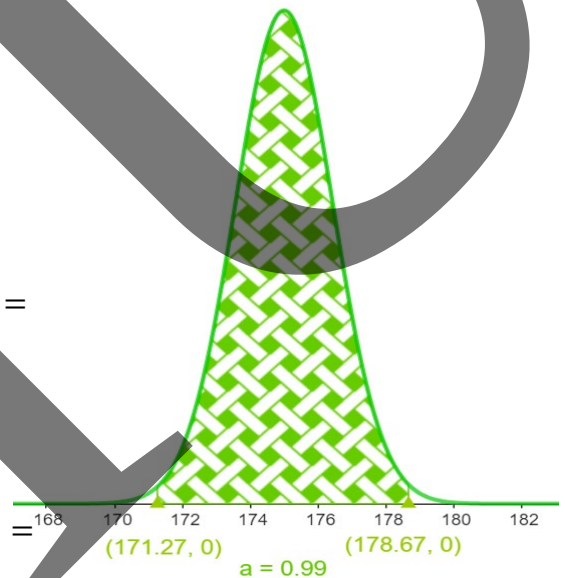
$$\bar{X} = 1,44 Z + 175$$

$$P(\bar{X} \leq 175 + e) = P(1,44 Z + 175 \leq 175 + e) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{1,44}\right)$$

$$P(\bar{X} \leq 175 - e) = P(1,44 Z + 175 \leq 175 - e) =$$

$$= P(0,45 Z \leq -e) = P\left(Z \leq \frac{-e}{1,44}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1,44}\right)$$



Beraz:

$$P(175 - e \leq \bar{X} \leq 175 + e) = P\left(Z \leq \frac{e}{1,44}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1,44}\right)\right] = 0,99 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 P\left(Z \leq \frac{e}{1,44}\right) - 1 = 0,99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{1,44}\right) = 0,995$$

Orduan, banaketa normalaren taulari begiratuz:

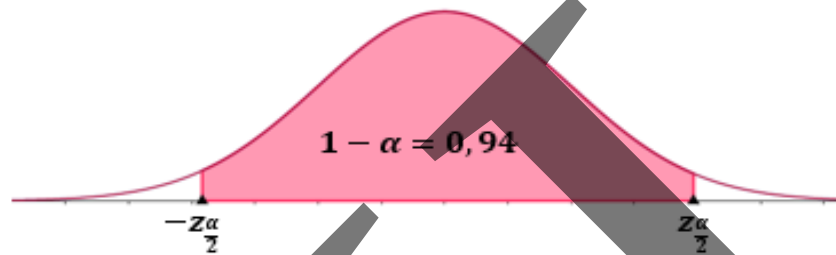
$$\frac{e}{1,44} = 2,575 \Rightarrow e = 3,705$$

Beraz, % 99rako tarte bereizgarria hau da:

$$(175 - e, 175 + e) = (171,3, 178,7)$$

d) Errore onargarria 2 cm baino handiagoa izan ez dadin, % 94ko konfiantza-mailaz, zenbat pertsona aukeratu beharko diren kalkulatu dugu:

✚ $z_{\frac{\alpha}{2}}$ kalkulatu dugu:



✚ Konfiantza-maila: $n_c = 0,94 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,885$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,03 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,03 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,885$$

✚ Batezbestekorako errore maximo onargarriaren formula erabiliz:

$$e_m = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$e_m = 2 = 1,885 \cdot \frac{13}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 12,2525 \Rightarrow n = 150,123 \cong 151 \Rightarrow n = 151$$

Beraz, errore maximo onargarria 2 cm-tik gorakoa izan ez dadin, % 94ko konfiantza-mailaz, 151 pertsonako lagin bat hartu beharko genuke.