MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

- El examen estará compuesto de cinco problemas de los cuales se tienen que realizar cuatro:
- El primer problema es de respuesta obligatoria
- De los otros cuatro problemas se elegirán tres.
- En los problemas que tienen apartados, se elegirá uno y se responderá a éste.
- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- La puntuación total de la prueba estará entre 0 y 10 puntos.
- Todos los problemas se valorarán de 0 a 2,5 puntos.
- Cuando un problema conste de varios apartados, la puntuación correspondiente a cada uno de ellos aparecerá reflejada en el enunciado del examen.
- La puntuación global de cada pregunta se distribuye en fracciones de punto, dependiendo de los pasos intermedios para llegar al resultado final. De este modo, los ejercicios parcialmente resueltos o con resultados incorrectos, pueden alcanzar una puntuación determinada dependiendo de su desarrollo.
- En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En el cuaderno de examen deberán figurar todas las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada ejercicio. Todas las respuestas estarán debidamente justificadas, ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas…, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.
- La utilización de boli rojo o lapicero en el desarrollo de los problemas.
- No se valorará la resolución de un ejercicio a partir de la gráfica de una función cuando ésta se construya basándose solamente en los puntos obtenidos a partir de una tabla de valores (se exceptúa el caso de funciones constantes, afines y lineales).

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 2 puntos.

- Concretar la función objetivo, **0,2 puntos.**
- Determinar las restricciones, **0,4 puntos.**
- Determinar y representar la región factible:
  - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,2 puntos.**
  - Determinar la región factible, **0,3 puntos.**
- Concretar los vértices de la región factible**.**
  - Vértice A, **0,1 puntos.**
  - Vértice B, **0,1 puntos.**
  - Vértice C, **0,1 puntos.**
  - Vértice D, **0,1 puntos.**
- Valorar la función en los vértices, **0,4 puntos.**
- Determinar el máximo, **0,1 puntos.**

b. 0,5 puntos.

- Determinar el valor de la función en el punto máximo, **0,5 puntos.**

PROBLEMA 2 APARTADO 2.1 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 1 punto.
- Planteamiento del problema, **1 punto**.

b. 1,5 puntos.
- El cálculo de las tres variables, 0,5 puntos cada variable, **1,5 puntos.**

PROBLEMA 2 APARTADO 2.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,4 puntos.
- Determinar la ecuación matricial, **0,4 puntos.**

b. 0,8 puntos.
- Razonar que es regular, **0,3 puntos.**
- El cálculo de $|A|$, **0,2 puntos.**
- Concluir que la matriz A no tiene inversa, **0,3 puntos.**

c. 1,3 puntos.
- Planteamiento de cualquier método adecuado de solución, **0,3 puntos.**
- El cálculo de las tres variables, **1 punto.**

PROBLEMA 3 APARTADO 3.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. **1 punto.**
   - El cálculo de la primera derivada, **0,3 puntos.**
   - Determinar qué valores anulan la primera derivada, **0,2 puntos.**
   - Estudio del signo de la primera derivada, **0,2 puntos.**
   - Determinar en qué momento se consigue el máximo, **0,2 puntos.**
   - Determinar el valor de las ganancias, **0,1 puntos.**

b. **0,4 puntos.**
   - Respuesta razonada**, 0,2 puntos.**
   - Conclusión, **0,2 puntos.**

c. **0,4 puntos.**
   - Respuesta razonada, **0,2 puntos.**
   - Conclusión, **0,2 puntos.**

d. **0,7 puntos.**
   - Determinar cuál es la tendencia, **0,3 puntos.**
   - Unirlo con una característica de la función, **0,4 puntos.**

PROBLEMA 3 APARTADO 3.2 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 puntos. Continuidad de la función en el intervalo $(-2, \quad 4)$.

- Continuidad en los intervalos $(-2,4) \cup (0,2) \cup (2,4)$, **0,2 puntos.**
- Continuidad en el punto $x=0$, **0,4 puntos.**
  - Definir la continuidad de una función en un punto, **0,15 puntos.**
  - Límites laterales, **0,25 puntos.**
- Continuidad en el punto $x=2$, **0,4 puntos.**
  - Definir la continuidad de una función en un punto, **0,15 puntos.**
  - Límites laterales, **0,25 puntos.**

b. 0,5 puntos. Representación gráfica.

- Representación de cada recta 0,1 puntos, por lo tanto, **0,2 puntos.**
- Representación de la parábola, **0,3 puntos.**

c. 1 punto. Área de la región delimitada por la función y el eje de abscisas OX.

- Determinar las integrales definidas $A_1 + A_2 + A_3$, **0,25 puntos**.
- El cálculo de las integrales definidas**, 0,75 puntos.**
  - El cálculo de la integral definida $\boldsymbol{A_1}$, **0,3 puntos.**
  - El cálculo de la integral definida $\boldsymbol{A_2}$, **0,15 puntos.**
  - El cálculo de la integral definida $\boldsymbol{A_3}$,**0,3 puntos.**

PROBLEMA 4 APARTADO 4.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,9 puntos.

- Hacer un esquema o un diagrama de árbol, **0,2 puntos.**
- Indicar la fórmula de la probabilidad total, **0,2 puntos**.
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. 0,9 puntos.

- Indicar la fórmula de la probabilidad *a posteriori,* teorema de Bayes **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida **0,7 puntos.**

c. 0,7 puntos.

- Determinar qué se tiene que calcular**, 0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

PROBLEMA 4 APARTADO 4.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. **0,5 puntos.**
   - El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. **0,5 puntos.**
   - El cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

c. **0,4 puntos.**
   - Razonar que son sucesos independientes, **0,3 puntos.**
   - El cálculo de la probabilidad pedida, **0,1 puntos.**

d. **0,3 puntos.**
   - El cálculo de la probabilidad pedida, **0,3 puntos.**

e. **0,8 puntos.**
   - El planteamiento del problema, **0,2 puntos.**
   - El cálculo de la primera derivada, **0,2 puntos.**
   - Calcular qué valores anulan la primera derivada, **0,1 puntos.**
   - Estudio del signo de la primera derivada, **0,1 puntos.**
   - Indicar cuál es el mínimo, **0,1 puntos.**
   - Determinar el número de la papeleta, **0,1 puntos.**

PROBLEMA 5 APARTADO 5.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto.

- Expresar cómo se determina el intervalo característico, **0,25 puntos.**
- Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
- Determinar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,15 puntos.**
- Concretar el intervalo característico, **0,35 puntos.**

b. 0,3 puntos.

- Determinar la probabilidad $P(X \geq 228)$, **0,3 puntos.**

c. 0,8 puntos.

- Determinar la probabilidad $P(X \leq 210)$, **0,35 puntos.**
- Determinar la probabilidad $P(X \leq 200)$, **0,35 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,1 puntos.**

d. 0,4 puntos.

- Distribución de la media muestral, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad $P(\bar{X} \leq 207)$, **0,2 puntos.**

PROBLEMA 5 APARTADO 5.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. 0,9 puntos.
- Determinar la distribución binomial X, **0,25 puntos.**
- Determinar la distribución normal X' , **0,25 puntos.**
- El cálculo de $P(X > 1.500)$:
  - Realizar la aproximación de Yates, **0,2 puntos.**
  - El cálculo de la probabilidad, **0,2 puntos.**

b. 0,9 puntos.
  a. El cálculo de $P(X \geq 1.000)$:
  - Realizar la aproximación de Yates, **0,2 puntos.**
  - El cálculo de la probabilidad, **0,2 puntos.**

  b. El cálculo de $P(X \leq 1.100)$:
  - Realizar la aproximación de Yates, **0,2 puntos.**
  - El cálculo de la probabilidad, **0,2 puntos.**

  c. El cálculo de la probabilidad pedida, **0,1 puntos.**

c. 0,7 puntos.
- El cálculo de la probabilidad de salir impar, **0,3 puntos.**
- Determinar que el primer y el segundo lanzamiento son sucesos independientes, **0,2 puntos.**
- El cálculo de la probabilidad pedida, **0,2 puntos.**

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

"OPTIMIZACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Y VENTA DE PERFUMES"

a) ¿Cuántos litros de cada perfume convendría fabricar para que el ingreso por la venta de la producción sea máximo?

	Perfume	Alcohol	Precio	Variables
A	0,05 L	0,1 L	24 €/ L	*x*
B	0,1 L	0,15 L	40 €/ L	*y*
Disponibilidad	70 L	120 L		

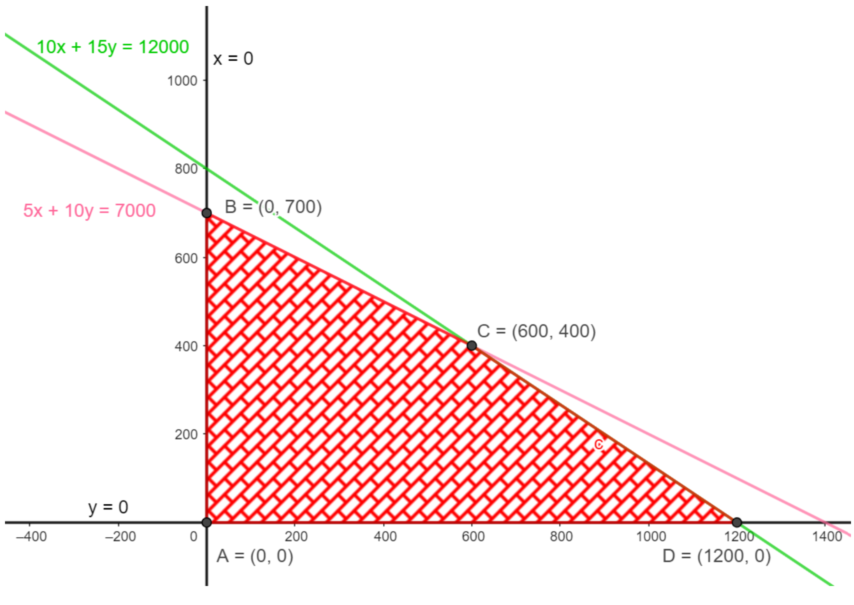
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 24x + 40\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}05x + 0{,}1y \ \leq 70 \\ 0{,}1x + 0{,}15y \leq 120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 10y \ \leq 7.000 \\ 10x + 15y \leq 12.000 \end{cases}$$

- En el plano XY la región factible es:



- Los vértices son:

$$A(0,0), \quad B(0,700), \quad C(600,400), \quad D(1200,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$
$$f(B) = f(0,700) = 28.000$$
$$f(C) = f(600,400) = 30.400$$
$$f(D) = f(1200,0) = 28.800$$

- El valor máximo de la función se obtiene en el punto $\boldsymbol{C(600,\ 400)}$; por lo tanto, **se tienen que hacer 600 litros del tipo A y 400 litros del tipo B** para conseguir el ingreso máximo.

b) Ingreso máximo:

$$f(x,y) = f(C) = f(600,400) = 30.400$$

De esta manera, **el ingreso máximo es 30.400 €.**

PROBLEMA 2

APARTADO 2.1

"SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES PARA CALCULAR LA CANTIDAD DE BILLETES ENTREGADOS POR EL CAJERO"

a) Planteamos el sistema de ecuaciones lineales:

Las variables serán:

$$x = número\ de\ billetes\ de\ 10\ €$$
$$y = número\ de\ billetes\ de\ 20\ €$$
$$z = número\ de\ billetes\ de\ 50\ €$$

- Hemos sacado 290 € del banco ⇒ $10\ x + 20\ y + 50\ z = 290$
- El cajero nos ha entregado 8 billetes ⇒ $x + y + z = 8$
- El número de billetes de 10 € es el doble que el de 20 € ⇒ $x = 2y$
- Por lo tanto, el sistema es:

$$\begin{cases} 10\ x + 20\ y + 50\ z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 10\ x + 20\ y + 50\ z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \begin{cases} 3\ y + z = 8 \\ 40\ \ y + 50z = 290 \end{cases} \Rightarrow z = 8 - 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40\ y + 50\ (8 - 3\ y) = 290 \Rightarrow 40\ y + 400 - 150\ y = 290 \Rightarrow 110 = 110\ y \Rightarrow$$

$$y = 1$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{x = 2}\ ;\ \boldsymbol{y = 1}\ ;\ \boldsymbol{z = 5}$$

PROBLEMA 2

APARTADO 2.2

"ANÁLISIS Y RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA LINEAL MEDIANTE ÁLGEBRA MATRICIAL"

$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

a) Expresamos el sistema de ecuaciones lineales a través de una ecuación matricial:

$$A \cdot X = B \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿La matriz de los coeficientes posee inversa?

$$\boldsymbol{A\ es\ una\ matriz\ regular} \Leftrightarrow \exists\, \boldsymbol{A^{-1}} \Leftrightarrow |\boldsymbol{A}| \neq \boldsymbol{0}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 6 = 0 \;\Rightarrow$ La matriz de los coeficientes A no tiene inversa.

c) Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longrightarrow F_2 - 3 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 \longrightarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 1 + \lambda} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{\lambda}{2}} \\ \boldsymbol{z = \lambda} \end{cases} \quad \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$$

PROBLEMA 3

APARTADO 3.1

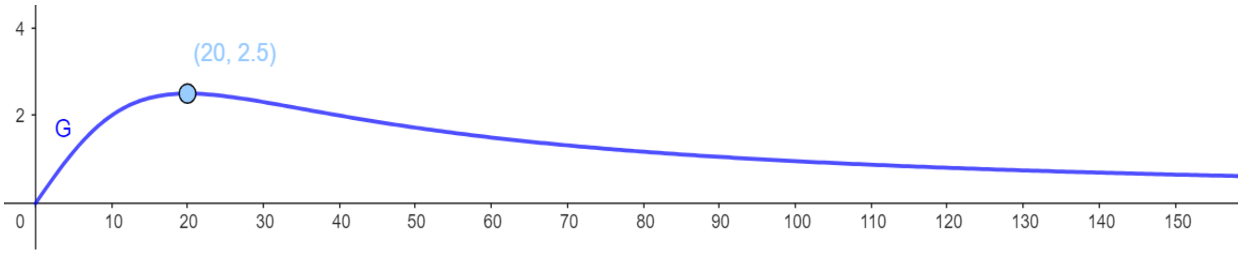
"OPTIMIZACIÓN DE BENEFICIOS EN FUNCIÓN DEL TIEMPO DE JUEGO"

Función de ganancias/pérdidas$\equiv G(t)$

$$G(t) = \frac{100\,t}{t^2 + 400}$$

donde *t* se mide en minutos y $G(t)$ en miles de euros.

a) Encontramos el tiempo *t* que maximiza las ganancias $G(t)$.



- Calculamos la primera derivada de la función:

$$G'(t) = \frac{100 \cdot (t^2+400) - 100t \cdot 2t}{(t^2+400)^2} = \frac{100 \cdot (400 - t^2)}{(t^2+400)^2}$$

- Estudiamos donde se anula la primera derivada:

$$G'(t) = 0 \Rightarrow 100 \cdot (400 - t^2) = 0 \Rightarrow 400 - t^2 \Rightarrow t = \pm 20$$

Solo consideramos $t = 20$ porque *t* es el tiempo, luego positivo.

- Estudiamos el crecimiento de la función:

	$(\mathbf{0}, \quad \mathbf{20})$	$(\mathbf{20}, \quad \infty)$
Signo de $G'(t)$	$G'(t) > 0$	$G'(t) < 0$
$\boldsymbol{G(t)}$	↗	↘

- La función es continua en su dominio de definición $(0, \infty)$, y, como en el intervalo $(0, \infty)$ es creciente y en el intervalo $(20, \infty)$ es decreciente, entonces concluimos que la función $G(t)$ tiene un máximo en $t = 20$.

Por lo tanto: **el tiempo que maximiza las ganancias es 20 minutos y en ese tiempo la ganancia obtenida es de 2.500 €**

b) Cuanto más tiempo se dedica a jugar, ¿más dinero se gana?

No, porque tal y como hemos analizado en el apartado a), la función es decreciente en el intervalo $(20, \infty)$ y por lo tanto las ganancias disminuyen a partir del minuto 20.

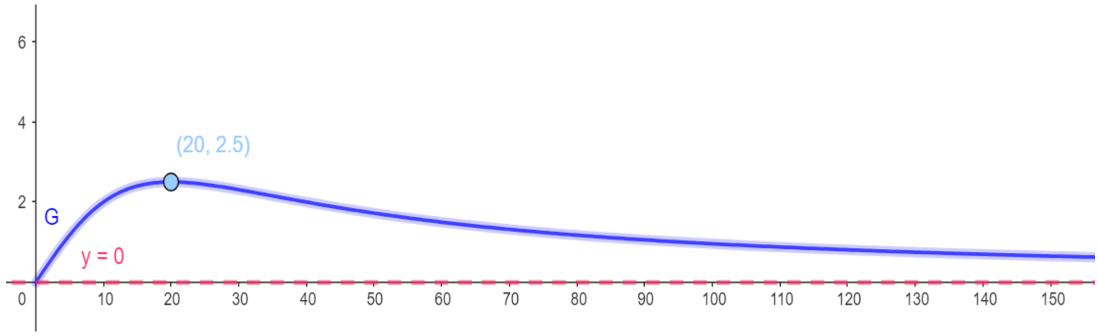
Concluimos que **no se gana más cuanto más tiempo se juega**.

c) ¿Puede haber pérdida de dinero en caso de haber exceso de tiempo?

La función $G(t)$ nunca toma valores negativos, ya que tanto el numerador como el denominador son positivos para $t > 0$.

Por lo tanto, **no es posible perder dinero**, pero las ganancias pueden volverse insignificantes al jugar demasiado tiempo. Es decir, jugar más allá del tiempo optimo reduce las ganancias progresivamente, pero no se pierde dinero.

d) ¿Cuál es la tendencia de la evolución de las ganancias/perdidas? ¿La relacionas con alguna característica de la función?



Para analizar la tendencia de la evolución de las ganancias/pérdidas a medida que pasan los años, calculamos el límite de la función $G(t)$ cuando t tiende a ∞.

Es decir:

$$\lim_{t\to\infty} G\,(t) \;=\lim_{t\to\infty} \frac{100\,t}{t^2+400} = \lim_{t\to\infty} \frac{100}{t+\frac{400}{t}} = 0$$

Por lo tanto, **las ganancias/pérdidas se estabilizan alrededor de unas ganancias de 0 €.**

La recta $\boldsymbol{y=0}$ es una asíntota horizontal de la función $\boldsymbol{G\,(\,t\,)}$ y esa es la tendencia de la función a medida que pasa el tiempo.

PROBLEMA 3

APARTADO 3.2

"ANALIZAR LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN. CÁLCULO DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN Y DEL ÁREA QUE FORMA CON EL EJE DE ABSCISAS."

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad -2 \le x < 0 \\ -x+2 & si \quad 0 \le x < 2 \\ x^2-4x+4 & si \quad 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) Continuidad en el intervalo $(-2, \quad 4)$.

- $f(x)$ es continua en los intervalos $(-2,4) \cup (0,2) \cup (2,4)$ por estar definida por polinomios.
- Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

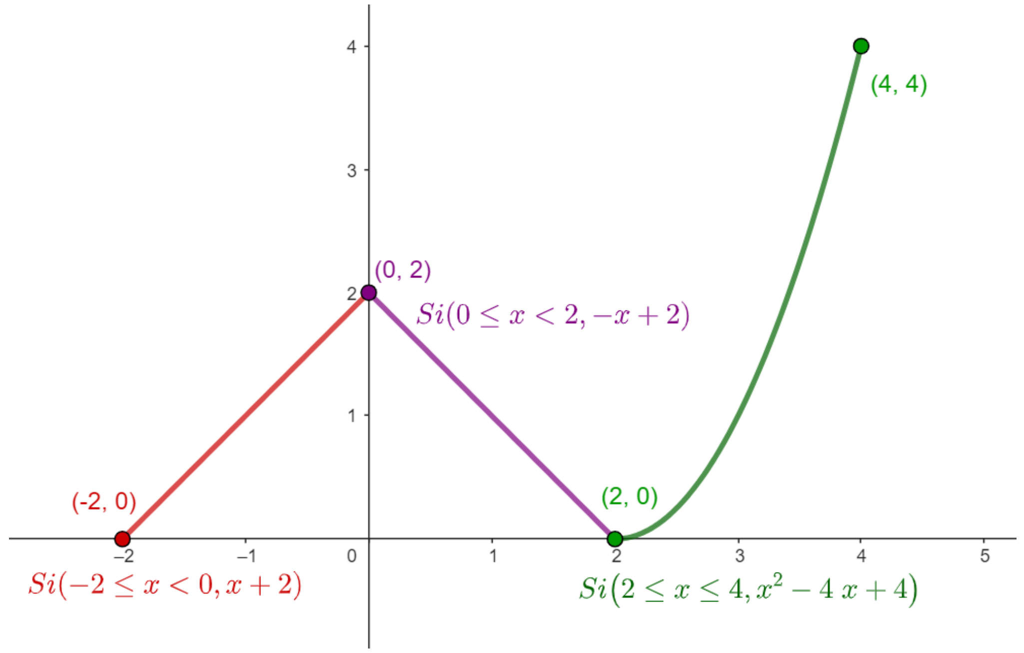
$$f(x) \text{ continua en } x = 0 \iff \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

  - $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+2) = 2$
  - $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x+2) = 2$
  - $f(0) = 2$
  - Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x = 0$
- Estudiamos la continuidad en $x = 2$:

$$f(x) \text{ continua en } x = 2 \iff \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

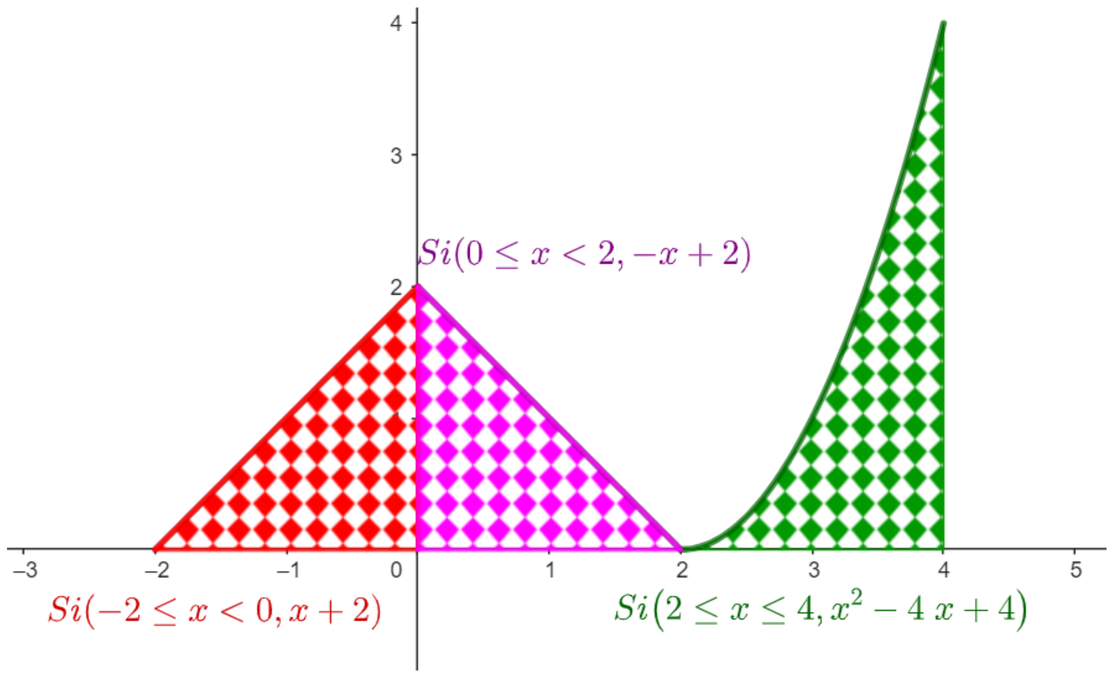
  - $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x+2) = 0$
  - $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2-4x+4) = 0$
  - $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 0$
  - Por lo tanto, $f(x)$ es continua en $x = 2$
- Por lo tanto $f(x)$ es continua en el intervalo $(-2,4)$.

b) Representación gráfica.



c) Área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX:

- $A = A_1 + A_2 + A_3$



- Superficie en el intervalo $(-2, \quad 0) \equiv A_1$

$$A_1 = \int_0^2 [(-x+2) - 0]dx = \int_0^2 (-x+2)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 =$$

$$= (-2+4) - 0 = \mathbf{2\, u^2}$$

- Superficie en el intervalo $(0, \quad 2) \equiv A_2$

$$A_2 = A_1 = \mathbf{2\, u^2}$$

- Superficie en el intervalo $(2, \quad 4) \equiv A_3$

$$A_3 = \int_2^4 [(x^2 - 4x + 4) - 0]\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4\,\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^4 =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 32 + 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) =$$

$$= \frac{56}{3} - 16 = \mathbf{\frac{8}{3}\, u^2}$$

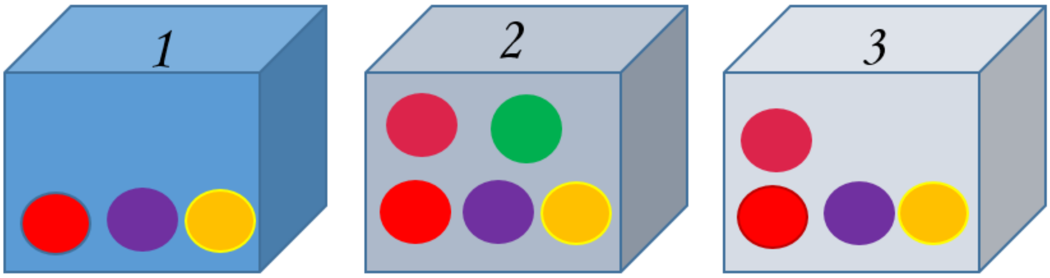
Por lo tanto:

$$\boldsymbol{A = A_1 + A_2 + A_3 = 2 + 2 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}\, u^2}$$

PROBLEMA 4

APARTADO 4.1

"PROBABILIDAD DE EXTRAER UN BOTÓN ROJO Y DETERMINAR SU ORIGEN"



a) Calculamos la probabilidad de ser roja:

Sean los siguientes sucesos:

- $R \equiv Sacar\ botón\ rojo$
- $C_1 \equiv Proceder\ de\ la\ primera\ caja$
- $C_2 \equiv Proceder\ de\ la\ segunda\ caja$
- $C_3 \equiv Proceder\ de\ la\ tercera\ cja$

Utilizamos la fórmula de la Probabilidad Total:

$$P(R) = P(C_1)\,P(R|\,C_1) + P(C_2)\,P(R|\,C_2) + P(C_3)\,P(R|\,C_3)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{47}{180} = 0{,}2611$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(R) = 26{,}11}\ \%$$

b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído de la primera caja?

Utilizamos la fórmula de la probabilidad *a posteriori*:

$$\boldsymbol{P(C_1|R)} = \frac{P(C_1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(C_1) \cdot P(R|C_1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{9}}{\frac{47}{180}} = \frac{20}{47} = 0{,}4255 \Rightarrow \boldsymbol{P(C_1|R)} = \mathbf{42{,}55}\ \%$$

c) Se juntan los botones de las tres cajas en una bolsa y extraemos con reemplazamiento cuatro botones al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean rojos?

$P(3\ botones\ rojos\ y\ uno\ no\ rojo) =$

$$= P(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4^c) + (R_1 \cap R_2 \cap R_3^c \cap R_4) +$$

$$+(R_1 \cap R_2^c \cap R_3 \cap R_4) + P(R_1^c \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) =$$

$$= 4 \cdot P(R_1^c \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) =$$

$$= 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}04687 = \mathbf{4{,}69}\ \%$$

OTRA MANERA

$X \equiv$ número de botones rojos $\equiv B\ (n,\ p)$

- $n = 4$
- Calculamos la probabilidad de botón rojo:

$$p = P(rojo) = \frac{3}{12} = 0{,}25 \Rightarrow q = 1 - p = 0{,}75$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{X \equiv B}\ (\mathbf{4},\ \mathbf{0{,}25})$

$$P(X = k) = \binom{n}{k}\, p^k \cdot q^{n-k} \Rightarrow$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}04687 = \mathbf{4{,}69}\ \%$$

PROBLEMA 4

APARTADO 4.2

"CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UN SORTEO DE NÚMEROS DEL 000 AL 999"

a) Calculamos la probabilidad del que el número premiado termine en 5:

- Los números son del 000 al 999, y, por lo tanto, en total son 1.000 números posibles.
- Los números que terminan en 5 son:

$$\{\boldsymbol{x05},\ \boldsymbol{x15},\ \boldsymbol{x25},\ \boldsymbol{x35},\ \boldsymbol{x44},\ \boldsymbol{x55},\ \boldsymbol{x65},\ \boldsymbol{x75},\ \boldsymbol{x85},\ \boldsymbol{x95}\}$$

Luego, hay 10 opciones, donde a su vez x puede tomar 10 valores distintos:

- $x = \{0,\ 1,\ 2, \cdots, 8,\ 9\}$
- Por lo tanto, hay $10 \cdot 10 = 100$ números que terminan en 5.

- Calculamos la probabilidad a través de la regla de Laplace:

$$\boldsymbol{P(terminar\ en\ 5)} = \frac{100}{1.000} = \boldsymbol{0,1 = 10}\ \%$$

b) Calculamos la probabilidad de que el número premiado termine en 55:

- Si termina en 55, los números posibles son:

$$\{\boldsymbol{055},\ \boldsymbol{155},\ \boldsymbol{255},\ \boldsymbol{355},\ \boldsymbol{455},\ \boldsymbol{555},\ \boldsymbol{655},\ \boldsymbol{755},\ \boldsymbol{855},\ \boldsymbol{955}\}$$

Luego hay 10 números.

- Calculamos la probabilidad a través de la regla de Laplace:

$$\boldsymbol{P(terminar\ en\ 55)} = \frac{10}{1.000} = \boldsymbol{0,01}\ \Rightarrow \boldsymbol{1}\ \%$$

c) Sabiendo que el número premiado ayer acabó en 5, calculamos la probabilidad de que hoy también acabe en 5.

Cada día el experimento es independiente, por lo tanto, la probabilidad de una terminación no se ve condicionada por las terminaciones de otros días.

$$\boldsymbol{P(terminar\ en\ 5\ hoy\ |\ termin\acute{o}\ en\ 5\ ayer) = P(terminar\ en\ 5)} =$$

$$= \frac{100}{1.000} = 0{,}1 = \mathbf{10}\ \%$$

d) ¿Cuál es la probabilidad de que el número premiado sea capicúa?

Un número capicúa es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda.

Por lo tanto, en las papeletas numeradas del 000 al 999, ser capicúa significa que el primer dígito debe ser igual al tercer dígito. Es decir, las papeletas con números capicúas son:

$$\{\ \mathbf{0x0},\quad \mathbf{1x1},\quad \mathbf{2x2},\quad \mathbf{3x3},\quad \mathbf{4x4},\quad \mathbf{5x5},\quad \mathbf{6x6},\quad \mathbf{7x7},\quad \mathbf{8x8},\quad \mathbf{9x9}\ \}$$

siendo $x = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

Por lo tanto, tenemos $10 \cdot 10 = 100$ boletos con números capicúas.

Luego:

$$\boldsymbol{P(\ capic\acute{u}a\ )} = \frac{100}{1.000} = 0{,}1 = \mathbf{10}\ \%$$

e) Entre las tarjetas numeradas encontraremos la tarjeta con el número que cumple el requisito:

- Llamamos *x* al número que buscamos.
- Tenemos que minimizar la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x + \frac{25}{x}}$$

- Calculamos la primera derivada y qué valores la anulan:

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2-25}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x = \pm 5$$

- $x \geq 0 \quad \Rightarrow x = 5$
- Estudiamos el signo de la primera derivada:

	$(\mathbf{0}, \quad \mathbf{5})$	$(\mathbf{5}, \quad \mathbf{999})$
Signo de $\boldsymbol{f'(x)}$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
$\boldsymbol{f(x)}$	↘	↗

- La función es continua en el intervalo $(0, \quad 999)$
- Por lo tanto, la función tiene un mínimo en $x = 5$, o sea que **el número buscado es el 5 y por lo tanto, la papeleta es la que tiene el número 005.**

PROBLEMA 5

APARTADO 5.1

"COMPRENSIÓN Y USO DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES."

a) Intervalo característico para el 80 %.

$$varianza = 144 \;\Rightarrow\; \sigma = \sqrt{144} = 12$$

$$X \equiv tiempo\ diario\ de\ conexión\ a\ una\ aplicación\ de\ I.A. = \mathcal{N}(\,210\,,\quad \sigma = 12)$$

$$(210 - e\,,\quad 210 + e)\ es\ el\ intervalo\ característico\ para\ el\ 80\,\%,\ \ si\ \ P(210 - e\ \le\ X \le\ 210\ +\ e\,) =\ 0{,}8$$

$$\mathrm{P}(210 - \mathrm{e}\ \le\ \mathrm{X} \le\ 210\ +\ \mathrm{e}\,) =\ 0{,}8\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\ \le 210 + \mathrm{e}\,) - \mathrm{P}(\,\mathrm{X} \le\ 210\ -\ \mathrm{e}\,)\ =\ 0{,}8\ \Rightarrow$$

- TIPIFICACIÓN**:**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 210}{12} \;\Rightarrow\; X = 12\,Z + 210$$

- $P(X\ \le 210 + e\,) = P(\,12\,Z + 210 \le 210 + e\,) =$

$$= P(12\,Z\ \le e\,) = P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)$$

- $P(X\ \le 210 - e\,) = P(\,12\,Z + 210 \le 210 - e\,) =$

$$= P(12\,Z\ \le -e\,) = P\left(Z \le \frac{-e}{12}\right) = 1 - P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)$$

$$\Rightarrow\ P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{e}{12}\right)\right] = 0{,}8\ \Rightarrow\ 2\,P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) - 1 =\ 0{,}8\ \Rightarrow$$

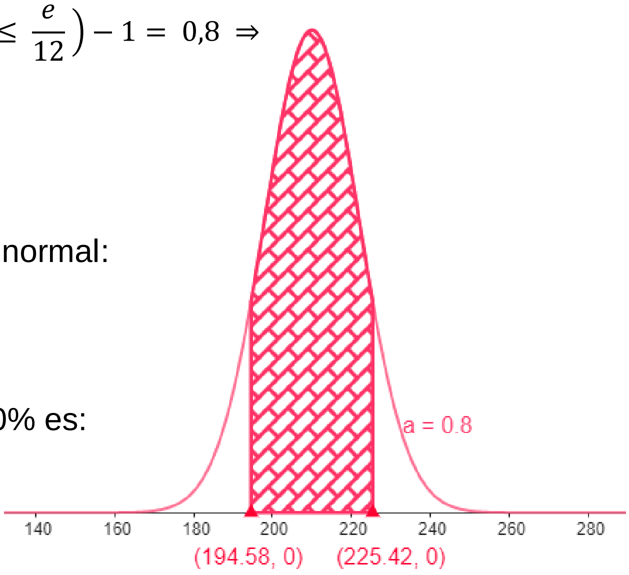
$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{e}{12}\right) =\ 0{,}9$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

$$\frac{e}{12} = 1{,}285\ \Rightarrow\ \boldsymbol{e = 15{,}42}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 80% es:

$$(210 - \mathrm{e}\,,\quad 210 + e) = (\mathbf{194{,}58}\,;\quad \mathbf{225{,}42})$$

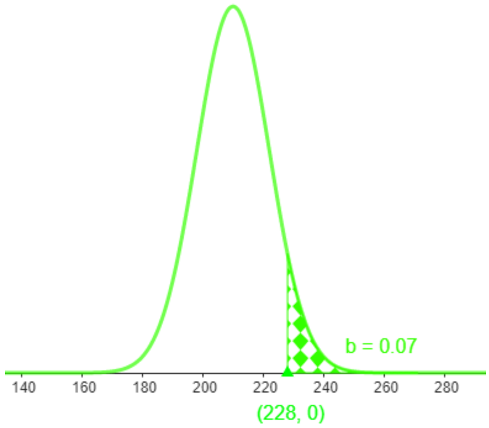


b) $P(X \geq 228)$

$P(X \geq 228) = P(12\,Z + 210 \geq 228) =$

$= P(Z \geq 1{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}5)$

$= 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668 = \mathbf{6{,}68}\ \%$



c) $P(200 \leq X \leq 210)$

$P(200 \leq X \leq 210) = P(X \leq 210) - P(X \leq 200)$

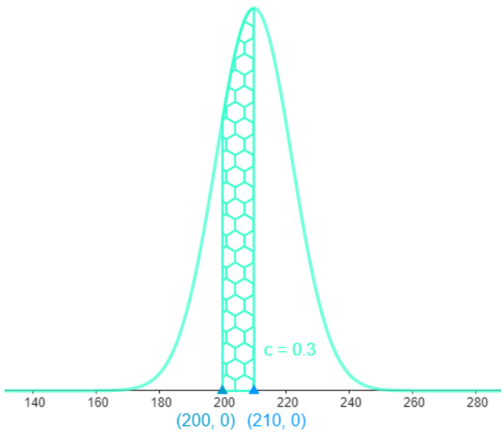
- $P(X \leq 210) = P(12\,Z + 210 \leq 210) =$

  $= P(Z \leq 0) = 0{,}5$

- $P(X \leq 200) = P(12\,Z + 210 \leq 200) =$

  $= P(Z \leq -0{,}83) = P(Z \geq 0{,}83) =$

  $= 1 - P(Z \leq 0{,}83) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$



Por lo tanto;

$P(200 \leq X \leq 210) = 0{,}5 - 0{,}2033 = 0{,}2967 = \mathbf{29{,}67}\ \%$

d) Calculamos $\boldsymbol{P(\bar{X} \leq 207)}$**,** con $n = 30$:

- Indicamos cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$:

$$X \equiv N\,(210,\quad 12) \Rightarrow \bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{N}\left(210,\ \frac{12}{\sqrt{30}}\right) = \mathcal{N}\,(210,\quad 2{,}19) \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(210,\quad 2{,}19)}$$

- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 210}{2{,}19} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 2{,}19\,Z + 210}$$

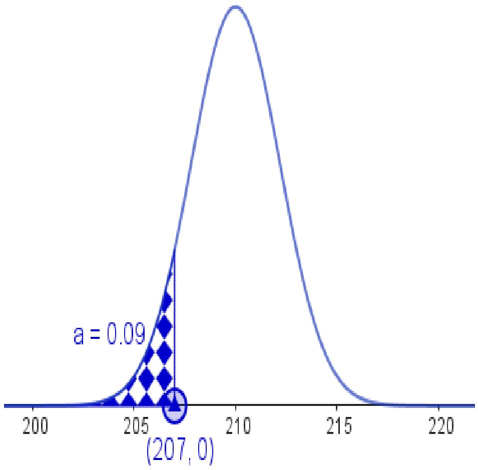
Entonces:

$$P(\bar{X} \leq 207) = P(2{,}19\, Z + 210 \leq 207) =$$

$$= P(Z \leq -1{,}37) = P(Z \geq 1{,}37) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}37) =$$

$$= 1 - 0{,}9147 = 0{,}0853$$



Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(\bar{X} \leq 207) = 0,0853 = 8,53\,\%}$$

PROBLEMA 5

APARTADO 5.2

"ANÁLISIS DE PROBABILIDADES EN EL LANZAMIENTO DE DADOS: EQUILIBRADOS Y CARGADOS"

- $X \equiv número\ de\ \ cincos$ es una variable que sigue una distribución binomial:

$$p = \frac{1}{6} = 0{,}1\hat{6} \Rightarrow q = (1-p) = 0{,}8\hat{3}$$

- $X \equiv número\ de\ CINCOS \equiv\ B\ (n,p) = B\ \left(6.000,\ 0{,}1\hat{6}\right)$

- $X \equiv B\ (6.000,\ \ 0{,}167) \Rightarrow X' \sim N\left(n \cdot p,\ \sqrt{n \cdot p \cdot q}\right) \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} n \cdot p = 6.000 \cdot 0{,}1\hat{6} = 1.000 > 5 \\ n \cdot q = 6.000 \cdot 0{,}8\hat{3} = 5.000 > 5 \end{matrix}\right\}$$

$$X' \sim N\left(6.000 \cdot 0{,}1\hat{6}, \sqrt{6.000 \cdot 0{,}1\hat{6} \cdot 0{,}8\hat{3}}\right) = N\left(1.000, \sqrt{833,\hat{3}}\right) \Rightarrow$$

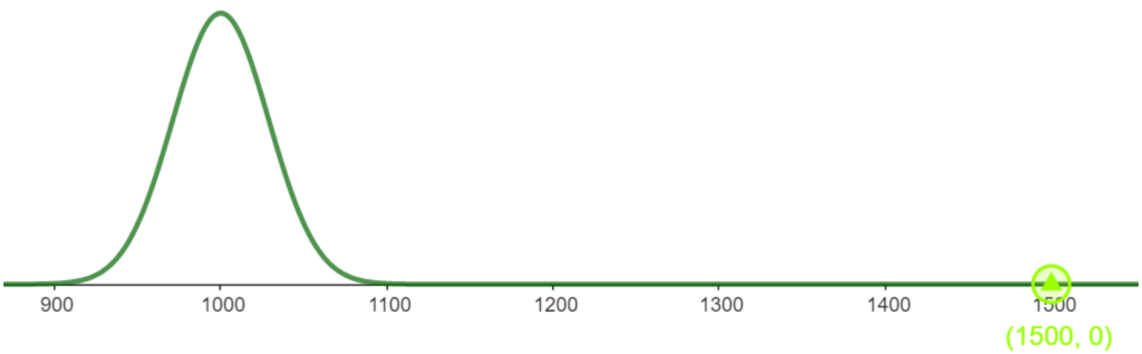
$$\boldsymbol{X' \sim N(1.000,\quad 28,87)}$$

a) Calculamos $P(\ X > 1.500\ )$

$$P(X > 1.500) = \underbrace{P(X' > 1.500{,}5)}_{\text{CORRECCIÓN DE YATES}} = 1 - P(X' \leq 1.500{,}5) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1.500{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) = 1 - P(Z \leq 17{,}33) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(X > 1.500) = 0}$$



b) Calculamos $P(1.000 \leq X \leq 1.100)$:

$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X \leq 1.100) - P(X < 1.000)$=

$= P(X' \leq 1.100{,}5) - P(X' \leq 1.000{,}5) =$

CORRECCIÓN DE YATES

- $P(X' < 1.100{,}5)$

$$P(X' < 1.100{,}5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1.100{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}48) = 0{,}9997$$

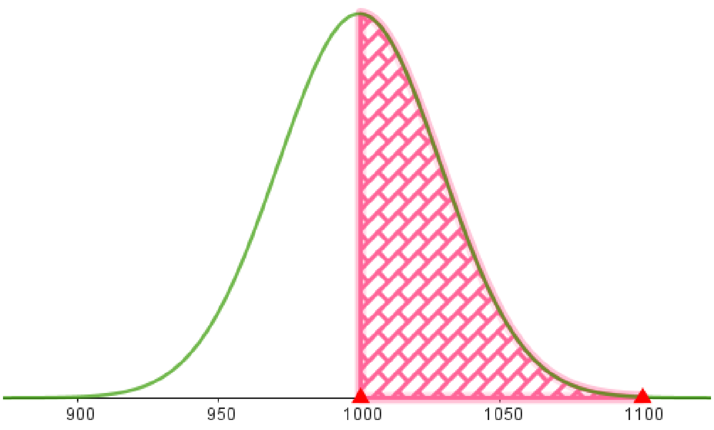
- $P(X' < 1.000{,}5)$

$$P(X' < 1.000{,}5) = P\left(\frac{X' - 1.000}{28{,}87} \leq \frac{1000{,}5 - 1.000}{28{,}87}\right) = P(Z \leq 0{,}017) = 0{,}5060$$

Por lo tanto:

$$P(1.000 \leq X \leq 1.100) = P(X' < 1.100{,}5) - P(X' < 1.000{,}5) = 0{,}9997 - 0{,}5060 = 0{,}4937$$

$$\boldsymbol{P(1.000 \leq X \leq 1.100) = 0{,}4937}$$



c) Si se lanza el dado cargado dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que en ambos lanzamientos se obtenga un número impar?

- Llamamos:

$P(\,par) = p \;\Rightarrow\; P(impar) = 3p$

- Como la suma de todas las probabilidades es 1:

$$P(par) + P(impar) = 1 \quad\Rightarrow\quad p + 3p = 1 \;\Rightarrow\; 4p = 1 \;\Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

- Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(impar) = 3p = \frac{3}{4}}$$

- Los sucesos primer lanzamiento y segundo lanzamiento son sucesos independientes:

$I_1 \equiv suceso\ salir\ impar\ en\ el\ primer\ lanzamiento$

$I_2 \equiv suceso\ salir\ impar\ en\ el\ segundo\ lanzamiento$

Entonces:

$$P(\,I_2 \mid I_1) = P(\,I_2\,)$$

- Calculamos la probabilidad pedida:

$$P(\,I_1 \cap I_2) = P(\,I_1\,) \cdot P(I_2 \mid I_1) = P(\,I_1\,) \cdot P(\,I_2\,) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P\,(\,I_1 \cap I_2\,) = \frac{9}{16}}$$