MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

- El examen estará compuesto de cinco problemas de los cuales se tienen que realizar cuatro:
  - El primer problema es de respuesta obligatoria
  - De los otros cuatro problemas se elegirán tres.
  - En los problemas que tienen apartados, se elegirá uno y se responderá a éste.
- En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
- La puntuación total de la prueba estará entre 0 y 10 puntos.
- Todos los problemas se valorarán de 0 a 2,5 puntos.
- Cuando un problema conste de varios apartados, la puntuación correspondiente a cada uno de ellos aparecerá reflejada en el enunciado del examen.
- La puntuación global de cada pregunta se distribuye en fracciones de punto, dependiendo de los pasos intermedios para llegar al resultado final. De este modo, los ejercicios parcialmente resueltos o con resultados incorrectos, pueden alcanzar una puntuación determinada dependiendo de su desarrollo.
- En aquellas cuestiones en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente.
- En el cuaderno de examen deberán figurar todas las operaciones y cálculos necesarios para la resolución de cada ejercicio. Todas las respuestas estarán debidamente justificadas, ya que, si solo aparece la solución, sin ningún tipo de explicación, el problema tendrá una puntuación de cero puntos.

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN POSITIVA

- Los planteamientos correctos, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
- La correcta utilización de conceptos, vocabulario y notación científica.
- El conocimiento de técnicas específicas de aplicación directa para el cálculo y/o interpretación de datos numéricos y gráficos.
- La terminación completa del ejercicio y la exactitud del resultado.
- Se considerarán igualmente válidas dos soluciones que solo se diferencien en el grado de exactitud empleado en los cálculos numéricos.
- No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
- La claridad de las explicaciones de los pasos seguidos.
- Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, …, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución.
- La pulcritud de la presentación, y cualquier otro aspecto que refleje la madurez que cabe esperar de un estudiante que aspira a entrar en la universidad

ASPECTOS QUE MERECEN VALORACIÓN NEGATIVA

- Los planteamientos incorrectos.
- La confusión de conceptos.
- La abundancia de errores de cálculo (por ser indicativa de deficiencias de orden básico).
- Los errores aislados, cuando indican falta de reflexión crítica o de sentido común (por ejemplo, decir que la solución a tal problema es -3,7 frigoríficos, o que cierta probabilidad vale 2,5).
- Los errores aislados, cuando conducen a problemas más sencillos que los inicialmente propuestos.
- La ausencia de explicaciones, en particular del significado de las variables que se están utilizando.
- Los errores ortográficos graves, el desorden, la falta de limpieza, la mala redacción y cualquier otro aspecto impropio de un estudiante que aspira a entrar en la universidad.
- La utilización de boli rojo o lapicero en el desarrollo de los problemas.
- No se valorará la resolución de un ejercicio a partir de la gráfica de una función cuando esta se construya basándose solamente en los puntos obtenidos a partir de una tabla de valores (se exceptúa el caso de funciones constantes, afines y lineales).

CRITERIOS PARTICULARES PARA CADA UNO DE LOS PROBLEMAS

PROBLEMA 1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. **1,6 puntos.**
   - Concretar la función objetivo, **0,1 puntos.**
   - Determinar las restricciones, **0,2 puntos.**
   - Determinar y representar la región factible:
     - Representación de cada restricción, 0,1 puntos, por lo tanto, **0,3 puntos.**
     - Determinar la región factible, **0,2 puntos.**
   - Concretar los vértices de la región factible.
     - Vértice A, **0,1 puntos.**
     - Vértice B, **0,1 puntos.**
     - Vértice C, **0,1 puntos.**
     - Vértice D, **0,1 puntos.**
     - Vértice D, **0,1 puntos.**
   - Valorar la función en los vértices, **0,2 puntos.**
   - Determinar el máximo, **0,1 puntos.**

b. **0,3 puntos.**
   - Valorar la función en ese punto máximo, **0,3 puntos.**

c. **0,6 puntos.**
   - De cada tipo de hilo determinar cuánto nos queda, 0,2 cada uno, luego **0,6 puntos.**

PROBLEMA 2 APARTADO 2.1 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. **1 punto.**
   - Planteamiento del problema, **1 punto**.

b. **1.5 puntos.**
   - Cálculo de las tres variables, 0,5 puntos cada variable, **1,5 puntos.**

PROBLEMA 2 APARTADO 2.2 ***(hasta 2,5 puntos)***

a. **0,6 puntos.**
   - Calcular A^2 o utiliza la propiedad de los determinantes: $|A^2| = |A|^2$ para calcular $|A|$, **0,5 puntos.**
   - El cálculo del valor del parámetro *a*, **0,1 puntos.**

b. **1 punto.**
   - Razonar que la matriz M es regular, **0,3 puntos.**
   - El cálculo de la matriz $A^{-1}(2)$:
     - El cálculo de la matriz $Adj\left(A(2)\right)^t$, **0,4 puntos.**
     - Determinar la matriz $A^{-1}(2)$, **0,3 puntos.**

c. **0,9 puntos.**
   - El cálculo de la matriz $A^t(2)$, **0,2 puntos**.
   - Calcular la matriz *M*, **0,5 puntos.**
   - El cálculo del valor del determinante de la matriz M, **0,2 puntos.**

PROBLEMA 3 APARTADO 3.1 (*hasta 2,5 puntos)*

a. **0,3 puntos.**
   - Determinar el rendimiento de Eneko, **0,15 puntos.**
   - Determinar el rendimiento de Deiene, **0,15 puntos.**

b. **0,6 puntos.**
   - El cálculo de la primera y de la segunda derivada, **0,1 puntos.**
   - Determinar qué es un máximo relativo, **0,1 puntos.**
   - Concluir que el máximo está fuera del intervalo, **0,1 puntos.**
   - Determinar cuándo es el máximo dentro de la jornada laboral, **0,2 puntos.**
   - Determinar cuánto es, **0,1 puntos.**

c. **0,5 puntos.**
   - El cálculo de la primera y de la segunda derivada, **0,1 puntos.**
   - Determinar cuándo es el máximo, **0,2 puntos.**
   - Determinar cuánto es, **0,2 puntos.**

d. **0,3 puntos.**
   - Planteamiento, **0,2 puntos.**
   - Resolver la igualdad que se crea, **0,1 puntos.**

e. **0,8 puntos.**
   - Representación gráfica, **0,15 puntos.**
   - Determinar la integral definida que hay que calcular, **0,1 puntos.**
   - Cálculo de la integral indefinida, **0,15 puntos.**
   - Aplicar la regla de Barrow, **0,2 puntos.**
   - Determinar la superficie, **0,2 puntos.**

PROBLEMA 3 APARTADO 3.2 *(hasta 2,5 puntos)*

a. **1,25 puntos.**
   - El cálculo de la primera derivada, **0,3 puntos**.
   - Ecuación de la recta tangente, **0,2 puntos**.
   - El valor de la función en el punto $x = 1$, **0,2 puntos**.
   - Indicar que es la pendiente, **0,2 puntos**.
   - Resolver el sistema que se crea, **0,35 puntos.**

b. **0,75 puntos.**
   - Analizar los signos de la primera derivada, **0,35 puntos**.
   - Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, **0,4 puntos.**

c. **0,5 puntos.**
   - Indicar qué es un máximo relativo, **0,2 puntos.**
   - Determinar el máximo relativo, **0,3 puntos.**

PROBLEMA 4 APARTADO 4.1 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 1 punto.
- Hacer un esquema o un diagrama de árbol, **0,3 puntos.**
- Indicar la fórmula de la probabilidad condicionada, **0,2 puntos**.
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,5 puntos.**

b. 1,5 puntos.
- Indicar la fórmula de la probabilidad total, **0,2 puntos**.
- Cálculo de $P(B)$, **0,5 puntos.**
- Indicar la fórmula del teorema de Bayes, **0,4 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida **0,4 puntos.**

PROBLEMA 4 APARTADO 4.2 *(hasta 2,5 puntos)*

a. 0,75 puntos.
- Hacer un esquema o un diagrama de árbol, **0,25 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad $P(1)$, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,3 puntos.**

b. 1 punto.
- Indicar qué hay que calcular, **0,3 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,7 puntos.**

c. 0,75 puntos.
- Indicar qué hay que calcular, **0,1 puntos.**
- Indicar la fórmula de la probabilidad condicionada, **0,15 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad $P(1^c)$, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida, **0,3 puntos.**

PROBLEMA 5 APARTADO 5.1 (*hasta 2,5 puntos)*

- El grado A:
    - Planteamiento, **0,2 puntos.**
    - Tipificación de la variable, **0,2 puntos.**
    - Determinar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,2 puntos.**
    - Cálculo de la cota, **0,4 puntos.**
- Del mismo modo para el grado B, **1 punto.**
- Determinar en qué grados tienen posibilidad de acceso, **0,5 puntos.**

PROBLEMA 5 APARTADO 5.2 (*hasta 2,5 puntos)*

a. 0,4 puntos.
- El planteamiento del problema, **0,1 puntos.**
- Distribución de la media muestral, **0,3 puntos.**

b. 0,75 puntos.
- El planteamiento del problema, **0,1 puntos**.
- Tipificación de la variable, **0, 15 puntos.**
- Concretar la probabilidad $P(\bar{X} \leq 172)$, **0,2 puntos.**
- Concretar la probabilidad $P(\bar{X} \leq 182)$, **0,2 puntos.**
- Cálculo de la probabilidad pedida**, 0,1 puntos.**

c. 0,75 puntos.
- Expresar cómo se determina el intervalo característico, **0,3 puntos.**
- Determinar el valor en la tabla de la distribución normal, **0,2 puntos.**
- Concretar el intervalo característico, **0,25 puntos.**

d. 0,6 puntos.
- Cálculo de $z_{\frac{\alpha}{2}}$, **0,2 puntos.**
- Expresar la fórmula del error máximo, **0,1 puntos.**
- Calcular el tamaño de la muestra, **0,2 puntos.**
- Concluir cuántas personas se necesitan, **0,1 puntos.**

SOLUCIONES

PROBLEMA 1

"PLANIFICACIÓN EN LA FABRICACIÓN DE TAPICES: PROGRAMACIÓN LINEAL"

a) Metros lineales que hay que realizar de cada tipo de tapiz para maximizar los ingresos:

	Seda	Plata	Oro	Precio	Variables
A	100 g	200g	0	2.000 €	x
B	200 g	100 g	100 g	3.000 €	y
Disponibilidad	50 kg	40 kg	22,5 kg		

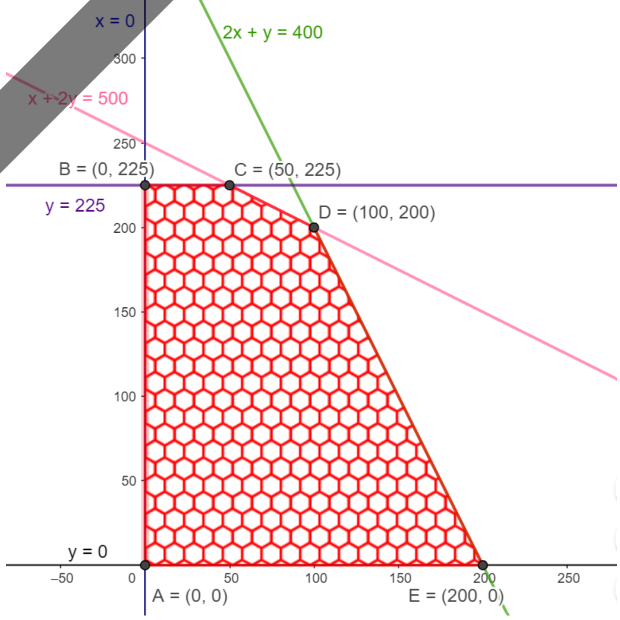
- La función objetivo es:

$$f(x,y) = 2.000x + 3.000\,y$$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 100x + 200y \leq 50.000 \\ 200x + 100y \leq 40.000 \\ 100\,y \leq 22.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 500 \\ 2x + y \leq 400 \\ y \leq 225 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Los vértices son:

$$A(0,0), \quad B(0,225), \quad C(50,225), \quad D(100,200), \quad E(200,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(0,225) = 675.000$$

$$f(C) = f(50,225) = 775.000$$

$$f(D) = f(100,200) = 800.000$$

$$f(E) = f(200,0) = 400.000$$

El valor máximo de la función se obtiene en el punto **D (100,200)**, por lo que para obtener el ingreso máximo hay que realizar **100 m lineales de tapiz tipo A y 200 m lineales de tapiz tipo B.**

b) El ingreso máximo:

$$f(x,y) = f(D) = f(100,200) = 800.000$$

Así, **el ingreso máximo es 800.000 €.**

c) Cuando se fabrican los metros lineales de cada tipo de tapiz que proporcionan el máximo ingreso, calculamos qué cantidad queda de cada tipo de hilo:

- La cantidad de hilo de seda usada es $= 100 \cdot 100 + 200 \cdot 200 = 50.000$, por lo tanto, **nos quedarán 0 kg de hilo de seda.**

- La cantidad de hilo de plata usada es $= 200 \cdot 100 + 100 \cdot 200 = 40.000$, por lo tanto, **nos quedarán 0 kg de hilo de plata.**

- La cantidad de hilo de oro usada es$= 100 \cdot 200 = 20.000$, **esto es, 20 kg,** por lo tanto, **nos quedarán 2,5 kg de hilo de oro.**

PROBLEMA 2

APARTADO 2.1

"COMPRA DE LATAS DE TOMATE: SISTEMA DE ECUACIONES Y RESOLUCIÓN"

a) Planteamos el sistema de ecuaciones que resuelve el problema:

$$\begin{cases} x+y+z=20 \\ x+2y+4z=40 \\ x+1{,}8y+3{,}3z=35{,}6 \end{cases}$$

b) Resolvemos el sistema mediante el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 40 \\ 1 & 1{,}8 & 3{,}3 & 35{,}6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0{,}8 & 2{,}3 & 15{,}6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & -0{,}1 & -0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_1 \end{matrix}} \qquad \boxed{F_3 \longrightarrow F_3 - 0{,}8 \cdot F_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=20 \\ y+3z=20 \\ -0{,}1z=-0{,}4 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{z=4}\,;\ \boldsymbol{y=8}\,;\ \boldsymbol{x=8}$$

PROBLEMA 2

APARTADO 2.2

"PROPIEDADES Y CÁLCULOS DE MATRICES: DETERMINANTE E INVERSIBILIDAD"

Dada la matriz $A(a)$:

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculamos el valor del parámetro a para que el valor del determinante de la matriz $A^2(a)$ sea 4.

- $4 = |A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = (|A|)^2 \Rightarrow 4 = (|A|)^2 \Rightarrow |A| = \pm 2$

Hemos utilizado la propiedad de los determinantes:

$$\boldsymbol{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$$

- $|A| = a$

Luego, $\boldsymbol{a = \pm 2}$

b) Comprobamos que la matriz $A(a)$ es regular para los valores $\boldsymbol{a} = \pm 2$

- ¿Es regular?

$$\text{La matriz A es regular} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

  - En el apartado a), hemos obtenido que $|A| = \pm 2$ cuando $\boldsymbol{a = \pm 2}$, luego es **regular** y por lo tanto $\exists\, A^{-1}$.
  - Otra forma de razonarlo es:

    $|A| = a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$

Entonces, como $a = \pm 2$ se obtiene que $\exists\, A^{-1}$.

- Calcularemos la matriz $A^{-1}(a)$, cuando $a = 2$:
  - $|A| = 2$
  - $Adj\,(A)^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1-a & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\,\big(A(2)\big)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
  - $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot Adj\,(A)^t \Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}(2)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1/2} & -\mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

c) Calculamos la matriz M y el valor de su determinante:

$$M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2)$$

- $M = A^t(2) \cdot A^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{3/2} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1/2} & -\mathbf{1/2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- $|M| = |A^t(2) \cdot A^{-1}(2)| = |A^t(2)| \cdot |A^{-1}(2)| = |A(2)| \cdot \frac{1}{|A(2)|} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{|M| = 1}$

Hemos utilizado las propiedades de los determinantes:

$\boldsymbol{|A \cdot B| = |A| \cdot |B|}$	$\boldsymbol{|A^t| = |A|}$	$\boldsymbol{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$

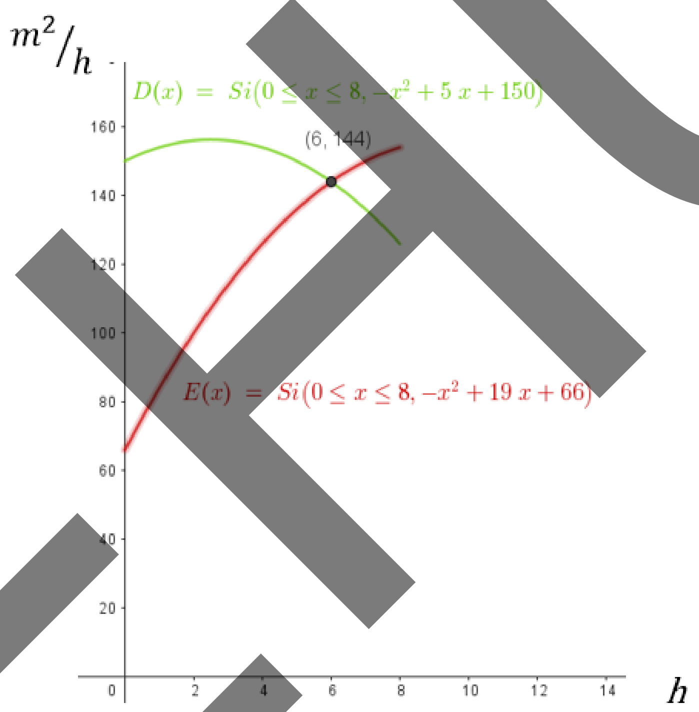
PROBLEMA 3

APARTADO 3.1

"ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DEL RENDIMIENTO DE DOS PINTORES"

$$Eneko \equiv E(x) = -x^2 + 19x + 66 \quad 0 \leq x \leq 8$$

$$Deiene \equiv D(x) = -x^2 + 5x + 150 \quad 0 \leq x \leq 8$$



a) ¿Qué pintor tiene mejor rendimiento inicial?

El rendimiento inicial es el rendimiento al inicio del día, es decir, cuando la incógnita $x = 0$:

$$\begin{cases} E(0) = 66 \\ D(0) = 150 \end{cases}$$

Por lo tanto, **Deiene tiene un rendimiento inicial mejor, concretamente, 150 m^2/h.**

b) ¿Cuál es el mayor rendimiento de Eneko? ¿Cuándo se da?

- Calculamos $E'(x)$:

$$E'(x) = -2x + 19$$

- Calculamos cuándo se anula la primera derivada:

$$E'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 19 = 0 \;\Rightarrow\; x = 9{,}5$$

- Analizamos la segunda derivada de la función en ese punto:

$$E''(x) = -2 \;\Rightarrow\; E''(9{,}5) = -2 < 0\;,$$

Por lo tanto, la función tiene un máximo en ese punto.

Concluimos que el momento en el que ocurre el mayor rendimiento es transcurridas 9,5 horas que está fuera del dominio de definición, luego no alcanza su mayor rendimiento dentro de la jornada laboral de 8 horas.

- Analizamos el máximo dentro de su jornada laboral:

Estudiamos el crecimiento de la función y para ello analizamos el signo de la primera derivada:

$$E'(x) = -2x + 19 > 0 \;\Rightarrow\; x < 9{,}5$$

Luego la función es creciente en todo su dominio de definición, por lo tanto, el mayor rendimiento (dentro de su jornada laboral) lo tiene al de **8 horas**, siendo éste:

$$E(8) = \mathbf{154}\ {\boldsymbol{m^2}}/{\boldsymbol{h}}$$

c) ¿Cuál es el mayor rendimiento de Deiene? ¿Cuándo se da?

$$D'(x) = -2x + 5 \;\Rightarrow$$

$$D'(x) = -2x + 5 = 0 \;\Rightarrow x = 2{,}5$$

$$D''(x) = -2 \;\Rightarrow D''(2{,}5) = -2 < 0$$

Por lo tanto, Deiene tiene el máximo rendimiento al cabo de **2,5 horas**, siendo este:

$$\boldsymbol{D(2,5) = 156,25\ {m^2}/{h}}$$

Esto significa que, después de 2 horas y 30 minutos de trabajo Deiene alcanza su mayor rendimiento, cubriendo 156,25 ${m^2}/{h}$.

d) ¿Cuándo tienen ambos el mismo rendimiento?

$$E(x) = D(x) \;\Rightarrow\; -x^2 + 19x + 66 = -x^2 + 5x + 150 \;\Rightarrow 14x = 84 \;\Rightarrow x = 6$$

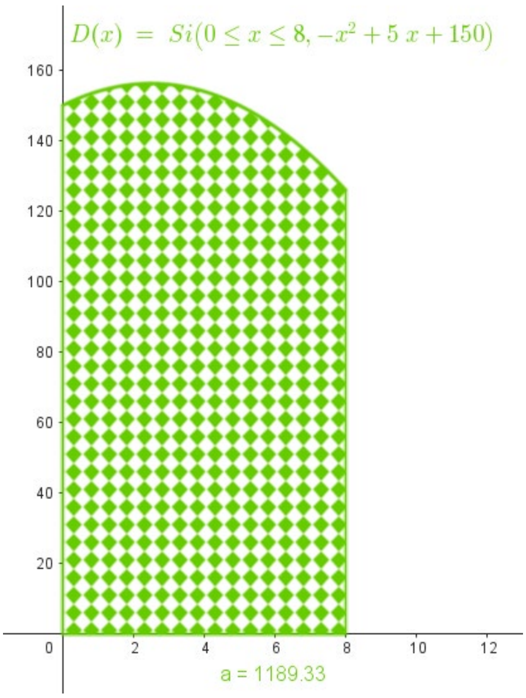
Por lo tanto, **en la sexta hora** tendrán el mismo rendimiento

e) Al final de la jornada laboral del día, ¿cuánto ha pintado Deiene en total?

$$\int_0^8 (-x^2 + 5x + 150)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2} + 150x\right]_0^8 = -\frac{1}{3}\cdot 8^3 + \frac{5}{2}\cdot 8^2 + 150\cdot 8 =$$

$$= 1.189{,}33$$

Por lo tanto, al final de la jornada laboral del día Deiene ha pintado $\mathbf{1.189,33\ m^2}$.



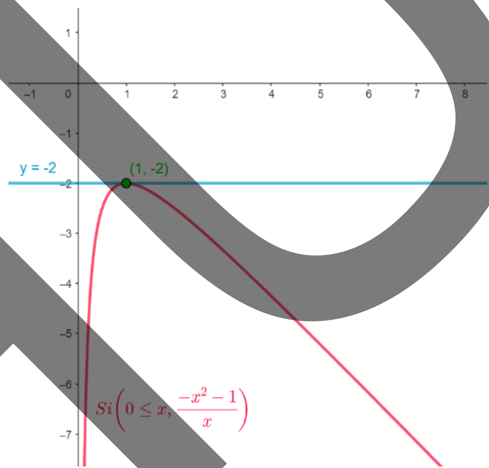
PROBLEMA 3

APARTADO 3.2

"CÁLCULO DE PARÁMETROS Y ANÁLISIS DE LA MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN"

a) Calculamos los valores de los parámetros a y b en la función:

$$f(x) = \frac{a\,x^2 + b}{x}$$



- Calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2ax \cdot x - 1 \cdot (ax^2 + b)}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2} \;\Rightarrow\; f'(1) = a - b$$

- La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$$

- $f(1) = a + b$

Sustituyendo:

$$y - (a + b) = (a - b)(x - 1) \;\Rightarrow y = (a - b)x + 2b$$

- Por otro lado, sabemos que la recta $y = -2$ es la recta tangente de la función en el punto $x = 1$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 0 \\ 2b = -2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a = -1\,;\, b = -1}$$

b) Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ cuando $a = b = -1$:

$$f(x) = \frac{-x^2 - 1}{x} \quad \wedge \quad f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2}$$

- Analizamos qué valores anulan la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

- Como el dominio de definición de la función es $(0, \quad \infty)$, analizaremos el punto $x = 1$:

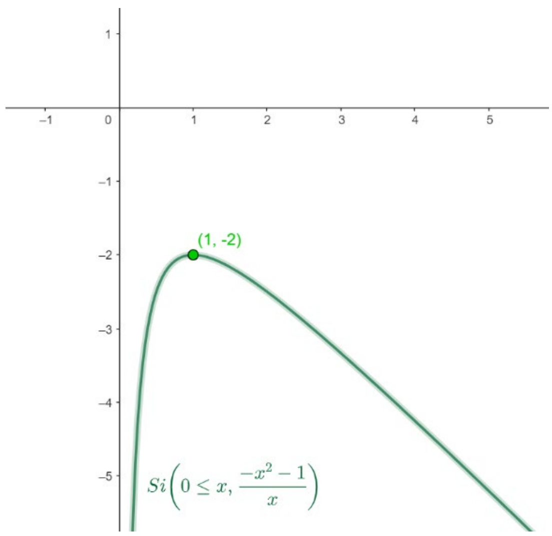
	$(\mathbf{0}, \quad \mathbf{1})$	$(\mathbf{1}, \quad \infty)$
Signo de $f'(x)$ -	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$
$\boldsymbol{f(x)}$	↗	↘

Por lo tanto la función $f(x)$ es **creciente en el intervalo $(\mathbf{0}, \quad \mathbf{1})$ y es decreciente en el intervalo $(\mathbf{1}, \quad \infty)$.**

c) Para los valores $a = b = -1$, ¿la función $f(x)$ tiene máximos o mínimos relativos?

- En el intervalo $(0, \quad 1)$ la función es creciente y en el intervalo $(1, \quad \infty)$ decreciente.
- La función $f(x)$ es continua en su dominio de definición $(0, \quad \infty)$.

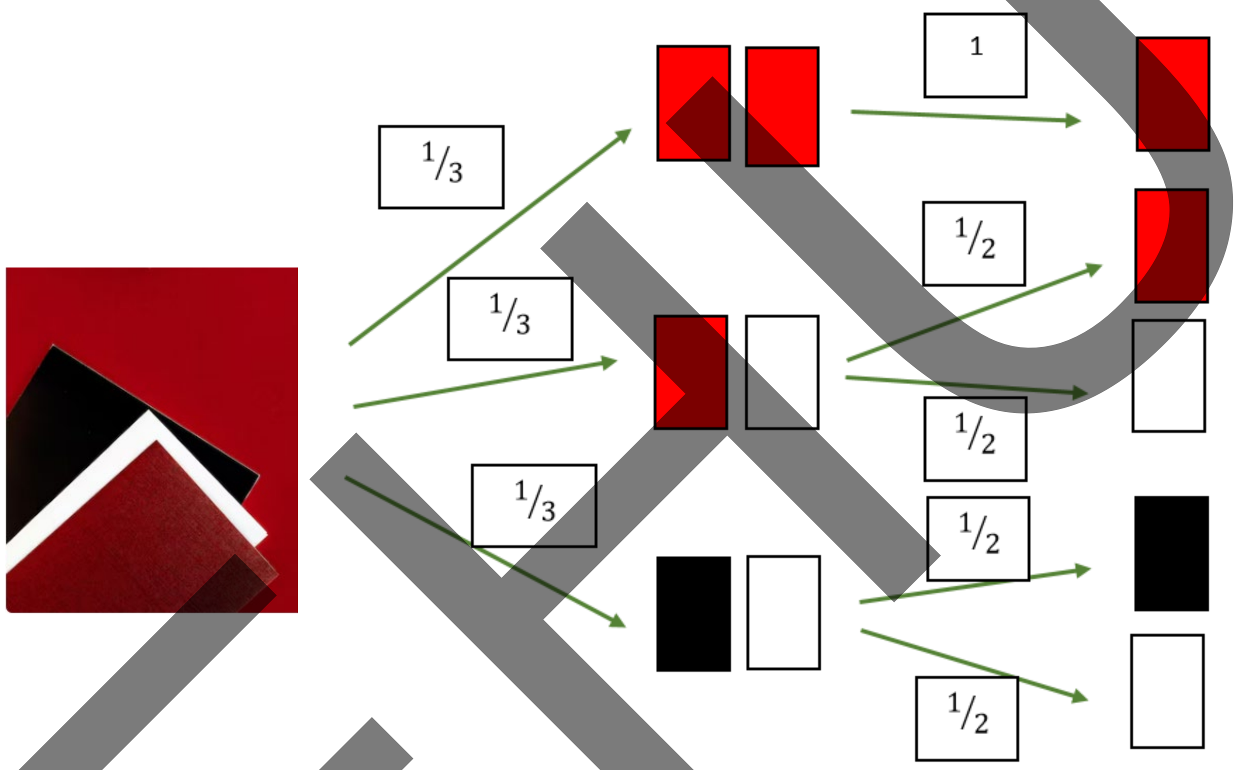
Por lo tanto, la función tiene un máximo relativo en el punto $(\mathbf{1}, \quad -\mathbf{2})$.



PROBLEMA 4

APARTADO 4.1

"CARTAS DE COLORES Y PROBABILIDADES"



Sean los siguientes sucesos

$C_1 = \{la\ primera\ carta\ (Roja\ Roja)\}$ $\qquad R = \{cara\ Roja\}$

$C_2 = \{la\ segunda\ carta\ (Roja\ Blanca)\}$ $\qquad B = \{cara\ Blanca\}$

$C_3 = \{la\ tercera\ carta\ (Negra\ Blanca)\}$ $\qquad N = \{cara\ Negra\}$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cara mostrada sea roja?

$$P(R) = P(C_1) \cdot P(R \mid C_1) + P(C_2) \cdot P(R \mid C_2) + P(C_3) \cdot P(R \mid C_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boldsymbol{P(R) = \frac{1}{2}}$$

b) Si la cara mostrada es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la otra cara sea roja?

- Calculamos la probabilidad de que la cara sea blanca:

$$P(B) = P(C_1)\, P(B \mid C_1) + P(C_2)\, P(B \mid C_2) + P(C_3) P(B \mid C_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(B) = \frac{1}{3}}$$

- Calculamos la probabilidad a posteriori:

$$P(R \mid B) = P(C_2 \mid B) = \frac{P(C_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(C_2) \cdot P(B|C_2)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{P(R \mid B) = \frac{1}{2}}$$

PROBLEMA 4

APARTADO 4.2

"ANÁLISIS DE LA PROBABILIDAD DE QUE IKER PREPARE EL EXAMEN"

Sean los siguientes sucesos:

$$1 = \{estudiar\ el\ primer\ día\}$$

$$2 = \{estudiar\ el\ segundo\ día\}$$

Entonces:

- La probabilidad de estudiar solo el primer día es el10 % ⇒

$$\boldsymbol{P(1 \cap 2^c) = 0,1}$$

- La probabilidad de estudiar los dos días es el 10 % ⇒

$$\boldsymbol{P(1 \cap 2) = 0,1}$$

- La probabilidad de no estudiar ninguno de los dos días es el 25 % ⇒

$$\boldsymbol{P(1^c \cap 2^c) = 0,25}$$

- Con estos datos calculamos las probabilidades: $P(1 \cup 2)$ y $P(1)$:
  - $P(1^c \cap 2^c) = 0,25 = P(1 \cup 2)^c = 1 - P(1 \cup 2) \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{P(1 \cup 2) = 0,75}$
  - $P(1 \cap 2^c) = 0,1 = P(1) - P(1 \cap 2) = P(1) - 0,1 \Rightarrow \boldsymbol{P(1) = 0,2} \;\; \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(1^C) = 0,8}$

Ahora calculamos las probabilidades pedidas en el enunciado del problema:

a) La probabilidad de que Iker estudie el examen el segundo día, esto es, $P(2)$:

$$P(1 \cup 2) = 0,75 = P(1) + P(2) - P(1 \cap 2) \Rightarrow \;\; P(2) = 0,75 - 0,2 + 0,1 = 0,65 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{P(2) = 0,65}$$

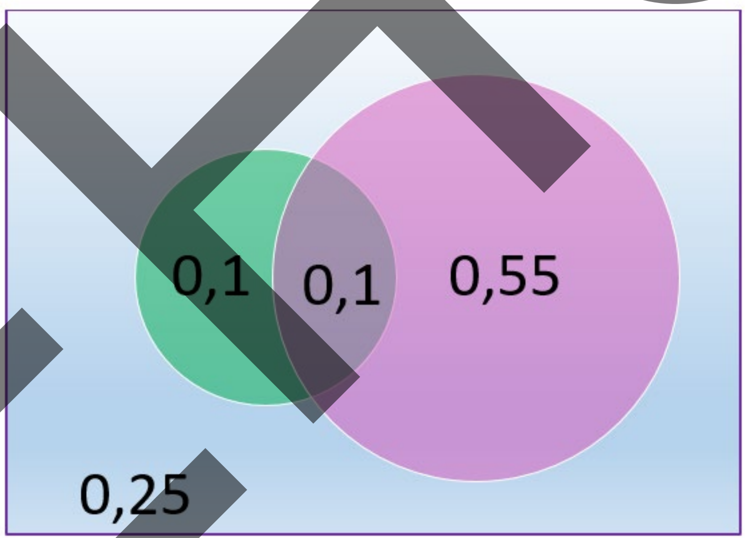
b) La probabilidad de que Iker estudie el examen solo el segundo día, esto es, $P(1^c \cap 2)$:

$$P(1^c \cap 2) = P(2) - P(1 \cap 2) = 0{,}65 - 0{,}1 = 0{,}55 \quad \Rightarrow \boldsymbol{P(1^c \cap 2) = 0{,}55}$$

c) La probabilidad de que Iker estudie el examen el segundo día sabiendo que no ha estudiado el primer día:

$$P(2 \mid 1^c) = \frac{P(1^c \cap 2)}{P(1^c)} = \frac{0{,}55}{0{,}8} = 0{,}6875 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(2 \mid 1^c) = 0{,}6875}$$

OTRA MANERA



La probabilidad de estudiar el primer día $\equiv P(1)$

La probabilidad de estudiar el segundo día $\equiv P(2)$

a) $P(2) = P(1 \cap 2) + P(1^c \cap 2) = 0{,}1 + 0{,}55$

b) Se puede comprobar el resultado en el diagrama de Venn.

PROBLEMA 5

APARTADO 5.1

"PROBLEMA SOBRE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL DE LAS NOTAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD"

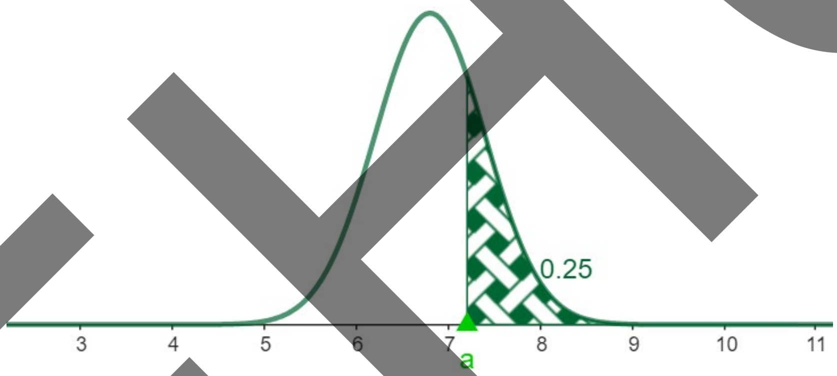
Llamamos:

$$Grado\ A \equiv Grado\ en\ Arquitectura\ Técnica$$

$$Grado\ B \equiv Grado\ en\ Biomedical\ Engineering$$

Calculamos la nota mínima de acceso en cada grado:

- **Grado A**: $X \equiv N\,(\mu, \quad \sigma) = N\,(6{,}8\,,\ 0{,}6)$



$P(X > a) = 0{,}25 \quad \Rightarrow$

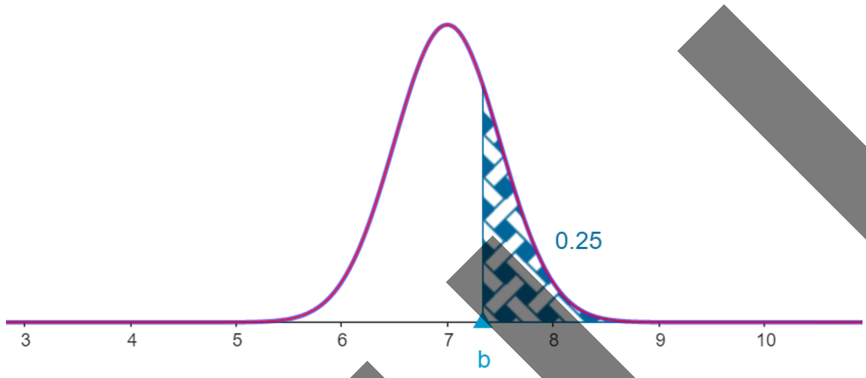
$$P\left(\frac{X-6{,}8}{0{,}6} > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \quad \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25$$

$$\Rightarrow\ 1 - P\left(Z \leq \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad P\left(Z \leq \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a-6{,}8}{0{,}6} = 0{,}675 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a = 7{,}205}$$

Por lo tanto, **la nota mínima que se pedirá para entrar en el grado A será 7,205 puntos.**

Grado B: $Y \equiv N(\mu', \sigma') = N(7, 0{,}5)$



$$P(Y > b) = 0{,}25 \Rightarrow P\left(\frac{Y-7}{0{,}5} > \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}25 \Rightarrow \left(Z \leq \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}75$$

$$\Rightarrow \frac{b-7}{0{,}5} = 0{,}675 \Rightarrow \boldsymbol{b = 7{,}3375}$$

Por lo tanto, **la nota mínima que se pedirá para entrar en el grado B será 7,3375 puntos.**

Como Yolanda tiene una nota de 7,25 puntos tendrá posibilidad de acceso sólo al grado en *Grado en Arquitectura Técnica (A)*; en cambio, Teresa que tiene una nota de 7,45 puntos tendrá posibilidad de acceso tanto al *Grado en Arquitectura Técnica (A)* como al *Grado en Biomedical Engineering (B)*.

PROBLEMA 5

APARTADO 5.2

"ANÁLISIS DE LA DISTRIBUCIÓN DE LA MEDIA MUESTRAL DE LA ESTATURA DEL PERSONAL DE UN SERVICIO"

a) Determinamos la distribución de la media muestral $\bar{X}$.

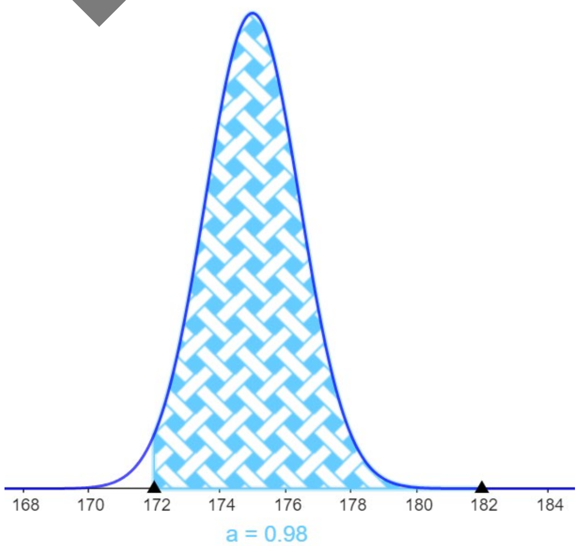
Altura $\equiv X \equiv \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, tal que μ ; $\sigma^2 = 169 \Rightarrow \sigma = 13\ cm.$

- $X \equiv \mathcal{N}(\mu, \quad 13)$
- Muestra aleatoria simple de tamaño 81 y $\mu = 175\ cm.$
- La distribución de la media muestral $\bar{X}$ es:

$$\bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(175, \frac{13}{\sqrt{81}}\right) = \mathcal{N}(175, \quad 1{,}44) \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}(175, \quad 1{,}44)}$$

b) Calculamos $P(172 \leq \bar{X} \leq 182)$:

$P(172 \leq \bar{X} \leq 182) = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172)$



- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 175}{1{,}44} \Rightarrow \bar{X} = 1{,}44\,Z + 175$$

- $P(\bar{X} \leq 182) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 182) = P(Z \leq 4{,}86) = 1$
- $P(\bar{X} \leq 172) = P(1{,}44\,Z + 175 \leq 172) = P(Z \leq -2{,}08) = P(Z \geq 2{,}08) =$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}08) = 1 - 0{,}9812 = 0{,}0188$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{P(172 \leq \bar{X} \leq 182)} = P(\bar{X} \leq 182) - P(\bar{X} \leq 172) = 1 - 0{,}0188 = \boldsymbol{0{,}9812} = \boldsymbol{98{,}12}\ \%$$

c) Determinamos el intervalo característico para el 99 % de $\bar{X}$:

- Sabemos que $\bar{X} \equiv \mathcal{N}\,(175, \quad 1{,}44\,)$

$(175 - e\,, \quad 175 + e)\ es\ el\ intervalo\ caracteristico\ para\ el\ 99\ \%,\ \ si\ \ P(175 - e\ \leq \bar{X}\ \leq\ 175\ +\ e\,) =\ 0{,}99$

$$\mathrm{P}(\,175 - \mathrm{e} \leq\ \bar{X} \leq 175\ +\ \mathrm{e}\,) = 0{,}99\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(\,\bar{X}\ \leq 175 + \mathrm{e}\,) - \mathrm{P}(\,\bar{X} \leq 175 - \mathrm{e}\,) =\ 0{,}99$$

- Tipificación**:**

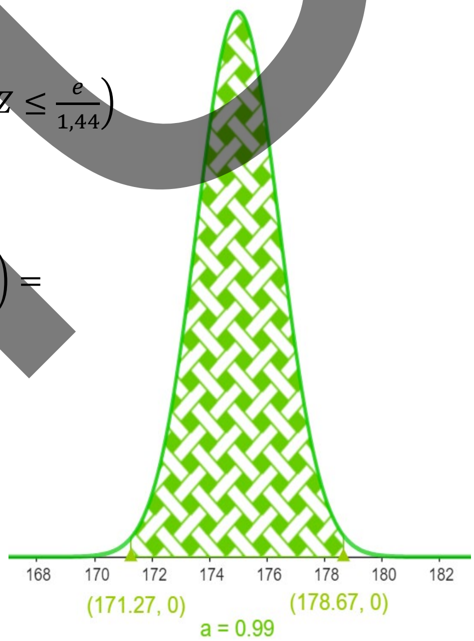
$$\bar{X} = 1{,}44\,Z + 175$$

- $P(\,\bar{X}\ \leq\ 175 + e\,) = P(\,1{,}44\,Z + 175 \leq 175 + e\,) = P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)$

- $P(\,\bar{X}\ \leq\ 175 - e\,) = P(\,1{,}44\,Z + 175 \leq\ 175 - e\,) =$

$$= P(\,0{,}45\,Z\ \leq -e\,)\ \ = P\left(Z \leq \frac{-e}{1{,}44}\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)$$



Por lo tanto:

$$\mathrm{P}(\,175 - \mathrm{e}\ \leq\ \bar{X}\ \leq\ 175\ +\ \mathrm{e}\,) = P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right)\right]\ = 0{,}99$$

$$\Rightarrow 2\,P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) - 1 = 0{,}99\ \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{1{,}44}\right) = 0{,}995$$

Luego mirando a la tabla de la distribución normal:

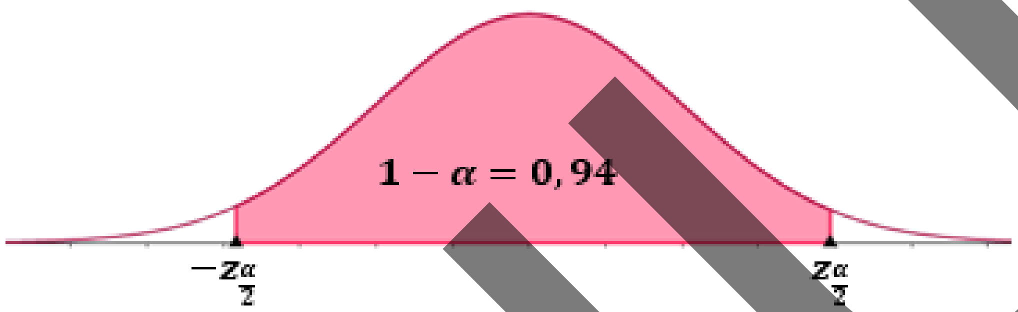
$$\frac{e}{1{,}44} = 2{,}575\ \Rightarrow\ \boldsymbol{e = 3{,}705}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 99 % es:

$$(175 - \mathrm{e}\,, \quad 175 + e) = (\mathbf{171{,}3}\,, \quad \mathbf{178{,}7})$$

d) Calculamos cuántas personas se tendrán que elegir de manera que el máximo error admisible no sea mayor que 2 cm con un nivel de confianza del 94 %.

- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$:



El nivel de confianza: $n_c = 0{,}94 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0{,}06 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}03 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}03 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0{,}97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885$$

- La fórmula del error máximo admisible para la distribución muestral de la media es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$e_m = \mathbf{2} = 1{,}885 \cdot \frac{13}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 12{,}2525 \Rightarrow n = 150{,}123 \cong 151 \Rightarrow \boldsymbol{n = 151}$$

Por lo tanto, deberíamos de tomar una muestra de 151 personas para que el máximo error admisible no sea superior a 2 cm con un nivel de confianza del 94 %.