CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Si no se demanda una técnica particular de resolución, cualquier desarrollo que conduzca a la solución será válido.
4. Si el ejercicio está correcto (siguiendo la técnica indicada, en su caso), se dará por bueno íntegramente. Sólo en el caso de no ser completamente correcto, se aplicarán las puntuaciones indicadas para cada paso en los criterios de corrección.
5. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
6. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
7. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
8. Se valorará la buena presentación del examen.
9. Se valorarán negativamente los planteamientos incorrectos, la confusión de conceptos y la abundancia de errores de cálculo.
10. Los errores aislados se valorarán negativamente cuando indiquen falta de reflexión crítica o de sentido común.
11. Se valorará negativamente la falta de rigor matemático en las explicaciones y la incorrecta utilización de los símbolos matemáticos.
12. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
13. Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

EJERCICIO OBLIGATORIO

(a)
- Hacer el árbol o la tabla de contingencia (0,25 puntos).
- Indicación del proceso de resolución (0,25 puntos).
- Cálculo del resultado (0,25 puntos).

(b)
- Indicación del proceso de resolución (0,25 puntos).
- Cálculo de la probabilidad (0,25 puntos).
- Cálculo del número de mujeres que cumplen la condición (0,25 puntos).

(c) Cálculo correcto de la probabilidad utilizando el teorema de Bayes (0,75 puntos).

(d) Respuesta correcta aplicando las propiedades de las probabilidades (0,25 puntos).

SEGUNDO EJERCICIO

2A

(a)
- Identificar correctamente la matriz de coeficientes (0,25 puntos).
- Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes y análisis de los casos de unicidad de solución (0,75 puntos).
- Análisis correcto del caso $\alpha = 2$ (0,5 puntos).

(b) Análisis y resolución correcta en el caso $\alpha = 0$ (1 punto).

2B

(a) Análisis correcto de la existencia de inversa (0,5 puntos).

(b)
- Cálculo correcto de la matriz A^{-1} en el caso $\alpha = 0$ (1 punto).
- Cálculo correcto de la matriz A^{2025} en el caso $\alpha = 0$ (1 punto).

TERCER EJERCICIO

3A

- Cálculo de la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B (0,5 puntos).
- Cálculo de la ecuación del plano perpendicular a la recta desde P (0,5 puntos).
- Cálculo del punto de intersección del plano y la recta (0,5 puntos).
- Planteamiento del cálculo de P' (0,5 puntos).
- Obtención correcta del punto P' (0,5 puntos).

3B

(a)
- Cálculo de la ecuación del plano (0,25 puntos).
- Cálculo de la ecuación de la recta (0,25 puntos).
- Cálculo del ángulo formado por el vector normal al plano y el vector director de la recta (0,25 puntos).
- Cálculo del ángulo pedido (0,25 puntos).
- Expresión del ángulo en grados, minutos y segundos (0,5 puntos).

(b)
- Deducir que la recta y el plano se cortan (0,5 puntos).
- Calculo correcto del punto de intersección entre la recta y el plano (0,5 puntos).

CUARTO EJERCICIO

4A

(a)
- Análisis correcto de las asíntotas verticales de f (0,5 puntos).
- Análisis correcto de las asíntotas horizontales de f, tanto en ∞ como en $-\infty$ (0,5 puntos).

(b)
- Cálculo correcto de la derivada de f (0,5 puntos).
- Análisis correcto del signo de la derivada y obtención de los intervalos de decrecimiento, teniendo en cuenta los puntos donde la derivada no existe (0,5 puntos).

(c) Cálculo correcto de la ecuación de la recta tangente pedida (0,5 puntos).

4B

(a)
- Expresión correcta de la función a optimizar en términos de las dimensiones de la taza (0,25 puntos).
- Expresión correcta de la condición que satisfacen las dimensiones de la taza (0,25 puntos).
- Cálculo correcto de las derivadas de orden uno y dos de la función a optimizar (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de los puntos críticos, y evaluación de la segunda derivada en los mismos (0,25 puntos).
- Expresar la solución con las unidades correctas (0,25 puntos).

(b)
- Cálculo de la superficie (0,5 puntos).
- Cálculo del coste (0,25 puntos).
- Expresar el resultado con las unidades apropiadas (0,25 puntos).

QUINTO EJERCICIO

5A

(a)
- Elección correcta de los factores en la aplicación de la integración por partes (0,5 puntos).
- Correcta aplicación de la fórmula de integración por partes (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la integral (0,25 puntos).

(b)
- Descomposición correcta del integrando en fracciones simples (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la integral (0,75 puntos).

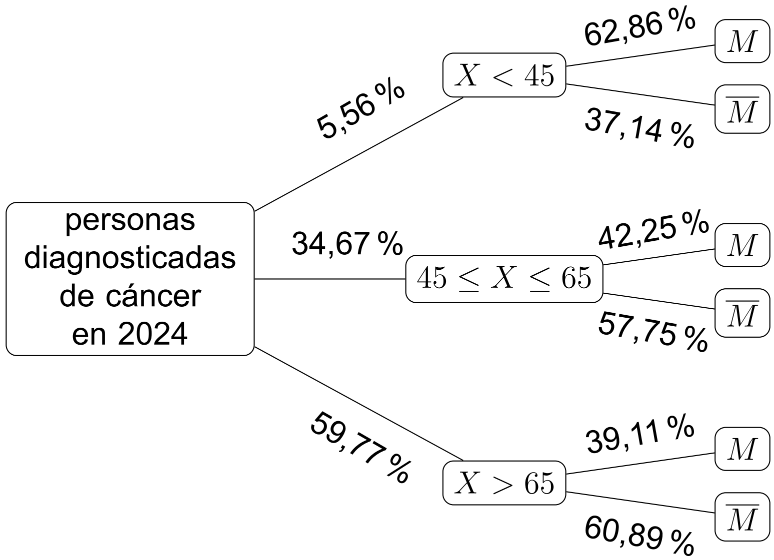
5B

(a)
- Cálculo correcto de los puntos de corte de la parábola y la recta (0,75 puntos).
- Dibujo correcto del recinto definido en el apartado (a) (0,5 puntos).

(b)
- Descomposición de la integral definida en dos sumandos, teniendo en cuenta las curvas que determinan cada parte del recinto (0,5 puntos).
- Cálculo de la primitiva y aplicación de la regla de Barrow (0,75 puntos).

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO. Sean X la edad de las personas diagnosticadas de cáncer en 2024, M el suceso “ser mujer” y $\overline{M}$ el suceso “no ser mujer”.



(a) La probabilidad de que sea mujer es

$$\begin{aligned} P(M) =& P(X > 65)\, P(M \,|\, X > 65) + P(45 \leq X \leq 65)\, P(M \,|\, 45 \leq X \leq 65) \\ &+ P(X < 45)\, P(M \,| X < 45) \\ =& 0,5977 \times 0,3911 + 0,3467 \times 0,4225 + 0,0556 \times 0,6286 = 0,4152. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de ser mujer mayor de 65 años es

$$P(M \cap (X > 65)) = P(X > 65)\, P(M \,|\, X > 65) = 0,5977 \times 0,3911 = 0,2338.$$

El número probable de mujeres se obtiene multiplicando esa probabilidad por el número total de personas diagnosticadas de cáncer en 2024, es decir, $286664 \times 0,2338 = 67022$.

(c) Habiendo sido seleccionada una mujer, la probabilidad de que tenga 65 años o menos es, aplicando el Teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P((X \leq 65) \,|\, E) =& \frac{P(E \cap (X \leq 65))}{P(E)} = \frac{P(E) - P(E \cap (X > 65))}{P(E)} \\ =& 1 - \frac{P(E \cap (X > 65))}{P(E)} = 1 - \frac{0,2338}{0,4152} = 0,4369. \end{aligned}$$

(d) Como la probabilidad de ser mujer, calculada en el apartado (a), es menor que $0,5$, es más probable no ser mujer.

SEGUNDO EJERCICIO

(2A) El sistema se escribe de forma equivalente como

$$\begin{cases} x - \alpha y + 3z = 3 \\ \alpha x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes de ese sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) El determinante de esa matriz es $|A| = 2\alpha(\alpha - 2)$. Por tanto, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 2$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO, y tiene una única solución.

Si $\alpha = 2$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE, y no tiene solución.

SI $\alpha = 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también, por lo que el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO, y tiene más de una solución.

(b) Cuando $\alpha = 0$ el sistema formado por las dos primeras ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 3z = 3, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Las soluciones son $x = 3 - 3t$, $y = 2 - t$, $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

(2B)

(a) El determinante de la matriz dada es $|A| = 1 - \alpha$, por lo tanto, la matriz tiene inversa si $\alpha \neq 1$.

(b) Si $\alpha = 0$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculando las primeras potencias de A, es decir, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$,..., se llega a la fórmula general para A^n. En particular,

$$A^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2025 \\ 0 & 1 & 2025 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

TERCER EJERCICIO

(3A) La ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B es $r \equiv (-2, 0, 1) + \lambda(0, 1, 1)$.

El plano π perpendicular a r que pasa por P tiene ecuación $\pi \equiv y + z + 3 = 0$ y el punto de intersección de r y π es el $M(-2, -2, -1)$.

Si P' es el simétrico de P con respecto a r, el punto M es el punto medio del segmento que une P y P', por tanto, $P'(-8, -1, -2)$.

(3B)

(a) El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, 6, 8)$ y el vector normal al plano π es paralelo a $\vec{AB} \times \vec{AC}$, luego podemos tomar $\vec{n}_\pi = (2, 2, -1)$.

El ángulo α buscado es el complementario al formado por $\vec{n}_\pi$ y $\vec{v}_r$,

$$\alpha = 90° - \arccos\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}_\pi|\,|\vec{v}_r|}\right) = 11,48°.$$

El ángulo en grados, minutos y segundos es $\alpha = 11°28'48''$.

(b) Como el ángulo formado por $\vec{v}_r$ y $\vec{n}_\pi$ no es $90°$, r y π se cortan.

La ecuación del plano es $\pi \equiv 2x + 2y - z - 6 = 0$ y la ecuación paramétrica de la recta es $r \equiv (6, -5, -4) + \mu(1, 6, 8)$. Sustituyendo un punto de la recta $(6 + \mu), -5 + 6\mu, -4 + 8\mu)$ en la ecuación del plano, se obtiene $\mu = 0$ y el punto de corte de π y r es $M(6, -5, -4)$.

CUARTO EJERCICIO

(4A)

(a) El denominador de la función f, x^2-3x-4, se anula cuando $x=-1$ y cuando $x=4$. La función tiene dos asíntotas verticales, $x=-1$ y $x=4$, puesto que

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=+\infty.$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=0,\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=0,$$

por tanto, f tiene asíntota horizontal, $y=0$, tanto en $-\infty$ como en $+\infty$.

(b) La derivada de f es

$$f'(x)=-\frac{x^2+4}{(x^2-3x-4)^2}$$

que es negativa en todos los puntos donde está definida, por lo tanto, f es decreciente en todo su dominio de definición, es decir, en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,4)$ y $(4,+\infty)$.

(c) Como $f(0)=0$ y $f'(0)=-1/4$, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$ es $y=-\dfrac{x}{4}$.

(4B) Llamamos R al radio de la base de la taza y H a la altura. El volumen de la taza es $\pi R^2 H$ y la superficie es $\pi R^2+2\pi RH$.

(a) De la condición dada para el volumen sabemos que $H=\dfrac{216}{R^2}$. Sustituyendo en la expresión que da la superficie, obtenemos la función a optimizar: $f(R)=\pi R^2+2\pi\dfrac{216}{R}$.

Para que la superficie sea mínima, la derivada de f debe ser nula.

$$f'(R)=2\pi R-2\pi\frac{216}{R^2}=0 \iff R=6.$$

Para que f tenga un mínimo relativo en $R_0=6$, la segunda derivada de f en ese punto debe ser positiva.

$$f''(R)=2\pi+\frac{864\pi}{R^3}\implies f''(6)>0$$

y, por tanto, f tiene un mínimo en $R_0 = 6$. Como f es continua en $(0, \infty)$ y no tiene más puntos críticos en ese intervalo, el mínimo absoluto de f se alcanza en $R_0 = 6$. El valor correspondiente de la altura es $H_0 = \dfrac{216}{R_0^2} = 6$. Es decir, el radio y la altura de la taza deben ser ambos de 6 cm.

(b) La superficie exterior de la taza, con las medidas obtenidas en el apartado anterior, es $S = \pi R_0^2 + 2\pi R_0 H_0 = 108\pi$ cm$^2 = 0,0108\pi$ m^2. El coste de la imprimación de cada taza se obtiene multiplicando la superficie en m^2 por el coste y obtenemos $0,0108\pi$ m$^2 \times 3$ €/m$^2 = 0,102$ €. El coste de la imprimación de cada taza será de 10,2 céntimos.

QUINTO EJERCICIO

(5A)

(a) La primera integral se resuelve por partes, tomando

$$u = 2x + 5, \quad dv = e^{2x} dx,$$
$$du = 2dx, \quad v = \frac{e^{2x}}{2}.$$

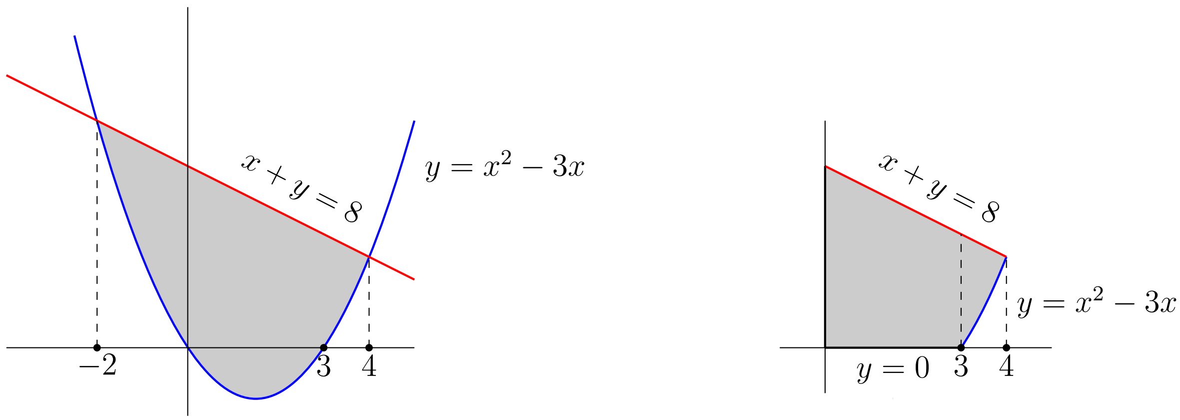
Entonces,

$$\int (2x+5)e^{2x}\, dx = (2x+5)\frac{e^{2x}}{2} - \int 2\frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{2x+5}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+2)e^{2x} + k.$$

(b) Hay que integrar una función racional cuyo denominador se reescribe como $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$, por tanto

$$\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}\, dx = \int \frac{dx}{x+5} + \int \frac{2}{(x+5)^2}\, dx = \ln|x+5| - \frac{2}{x+5} + k.$$

(5B) La parábola de ecuación $y = x^2 - 3x$ corta al eje horizontal en $x = 0$ y $x = 3$. La recta tiene pendiente negativa y corta a la parábola cuando $x = -2$ y $x = 4$. El recinto limitado por las dos curvas es el que aparece a la izquierda en la imagen:



El área del trozo de recinto que queda en el primer cuadrante, que aparece a la derecha en la imagen, es

$$A = \int_0^3 (8 - x)\,dx + \int_3^4 \Big(8 - x - (x^2 - 3x)\Big)\,dx = \frac{133}{6} u^2.$$