CRITERIOS GENERALES DE CORRECCIÓN

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2,5 puntos.
3. Si no se demanda una técnica particular de resolución, cualquier desarrollo que conduzca a la solución será válido.
4. Si el ejercicio está correcto (siguiendo la técnica indicada, en su caso), se dará por bueno íntegramente. Sólo en el caso de no ser completamente correcto, se aplicarán las puntuaciones indicadas para cada paso en los criterios de corrección.
5. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
6. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc, siempre que no sean de tipo conceptual.
7. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc, que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
8. Se valorará la buena presentación del examen.
9. Se valorarán negativamente los planteamientos incorrectos, la confusión de conceptos y la abundancia de errores de cálculo.
10. Los errores aislados se valorarán negativamente cuando indiquen falta de reflexión crítica o de sentido común.
11. Se valorará negativamente la falta de rigor matemático en las explicaciones y la incorrecta utilización de los símbolos matemáticos.
12. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.
13. Las respuestas deben estar escritas con bolígrafo azul o negro. No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN de cada uno de los problemas

EJERCICIO OBLIGATORIO

(a)
- Tipificar la distribución de probabilidad (0,25 puntos).
- Reescribir la probabilidad a calcular en términos de una probabilidad de la forma $P(Z < \alpha)$ siendo Z la variable tipificada y $\alpha > 0$ (0,25 puntos).
- Encontrar la probabilidad buscada utilizando la tabla de la distribución normal (0,5 puntos).

(b)
- Tipificar la distribución de probabilidad (0,25 puntos).
- Reescribir la probabilidad a calcular en términos de probabilidades de la forma $P(Z < \alpha)$ siendo Z la variable tipificada y $\alpha > 0$ (0,25 puntos).
- Encontrar la probabilidad buscada utilizando la tabla de la distribución normal (0,25 puntos).
- Dar el resultado total de recién nacidos (0,25 puntos),

(c)
- Tener en cuenta que el intervalo dado es un subconjunto del que aparece en el apartado (b) (0,25 puntos).
- Responder correctamente, utilizando las propiedades de las probabilidades (0,25 puntos).

SEGUNDO EJERCICIO

2A

(a)
- Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes (0,75 puntos).
- Encontrar los valores en los que el determinante no se anula (0,25 puntos).

(b) Comprobar que para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado (0,75 puntos).

(c) Encontrar dos soluciones del sistema cuando $\alpha = 1$ (0,75 puntos).

2B

(a)
- Cálculo correcto del determinante de la matriz A (0,5 puntos).
- Análisis correcto de la existencia de la inversa de A (0,25 puntos).

(b)
- Cálculo correcto de A^2 (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de A^{-1} (0,75 puntos).
- Resolución correcta de la ecuación del apartado (b) (0,5 puntos).

TERCER EJERCICIO

3A

- Cálculo del punto de intersección del plano y la recta (1 punto).
- Cálculo de la ecuación del plano pedido (1,5 puntos).

3B

(a)
- Cálculo correcto de los vectores directores de las rectas r y s (0,25 puntos).
- Deducir que las rectas no son coincidentes ni paralelas (0,25 puntos).
- Calcular un vector que una dos puntos, cada uno de ellos de una de las rectas, y calcular el producto mixto de los vectores directores de las rectas y el vector anterior; o bien comprobar que las rectas no tienen ningún punto común (0,75 puntos).
- Deducir que las rectas se cruzan (0,25 puntos).

(b)
- Indicar el método de cálculo (0,5 puntos).
- Obtener correctamente el resultado pedido (0,5 puntos).

CUARTO EJERCICIO

4A

(a)
- Cálculo correcto de la derivada de la función f (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de los valores de los parámetros A y B (0,5 puntos).

(b)
- Factorización correcta de la derivada de f (0,5 puntos).
- Determinar correctamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f (1 punto).

4B

- Expresión correcta de la condición que satisfacen las dimensiones del cuadro (0,25 puntos).
- Expresión correcta de la función a optimizar (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de las derivadas de orden uno y dos de la función a optimizar (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de los puntos críticos, teniendo en cuenta que, en este caso, la variable solo toma valores positivos, y evaluación de la segunda derivada en los mismos (0,5 puntos).
- Expresar la solución con las unidades correctas (0,25 puntos).
- Cálculo correcto del importe de la factura (0,5 puntos).

QUINTO EJERCICIO

5A

(a)
- Elección correcta de los factores para aplicar la integración por partes (0,5 puntos).
- Aplicación correcta de la fórmula de integración por partes (0,5 puntos).
- Cálculo correcto de la integral (0,25 puntos).

(b)
- Descomposición correcta en fracciones simples del integrando del apartado (b) (0,75 puntos).
- Cálculo correcto de la integral del apartado (b) (0,5 puntos).

5B

(a)
- Cálculo de los puntos de corte de las curvas (0,75 puntos).
- Dibujo adecuado del recinto pedido (0,5 puntos).

(b)
- Descomposición de la integral definida en dos sumandos, teniendo en cuenta las curvas que determinan cada parte del recinto (0,5 puntos).
- Cálculo de la primitiva y aplicación de la regla de Barrow (0,75 puntos).

MATEMÁTICAS II

EJERCICIO OBLIGATORIO. La variable X = “peso de un recién nacido en el Hospital de Cruces en 2024” sigue una distribución normal $N(3372; 405)$. Representamos por Z una variable que sigue una distribución normal tipificada.

(a) La probabilidad de que el peso de un recién nacido haya sido superior a 3kg es

$$\begin{aligned} P(X > 3000) &= P\Big(Z > \frac{3000-3372}{405}\Big) \\ &= P(Z > -0,92) = P(Z < 0,92) = 0,8212. \end{aligned}$$

(b) La probabilidad de que el peso de un recién nacido esté en el rango comprendido entre 3kg y 3,5kg es

$$\begin{aligned} P(3000 < X < 3500) &= P\Big(\frac{3000-3372}{405} < Z < \frac{3500-3372}{405}\Big) \\ &= P(-0,92 < Z < 0,32) = P(Z < 0,32) - P(Z < -0,92) \\ &= 0,6255 - (1-0,8212) = 0,4467. \end{aligned}$$

El número probable de recién nacidos cuyo peso está en dicho rango es el total de niños nacidos en el Hospital de Cruces en 2024 multiplicado por la probabilidad obtenida, $9476 \times 0,4467 \sim 4233$.

(c) La probabilidad de un subconjunto no puede ser mayor que la del conjunto en el que está incluido. Se ha obtenido que $P(3000 < X < 3500) = 0,4467$, y $(3100, 3300)$ es un subconjunto de $(3000, 3500)$. Por tanto, $P(3100 < X < 3300) < 0,4467$ y el número de recién nacidos con un peso entre 3,1kg y 3,3kg no debería ser mayor que 4233.

SEGUNDO EJERCICIO

(2A) La matriz de coeficientes del sistema dado es

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

(a) El determinante de esa matriz es $|A| = -3(\alpha-1)^2$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema tiene una única solución.

(b) Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada también, por tanto, no hay ningún valor del parámetro α para el que el sistema no tiene solución.

(c) El sistema tiene más de una solución cuando $\alpha = 1$ y, en ese caso, las soluciones cumplen $y = z$ y $x = 1 + 2y - z$. Dando valores a y (o a z), se obtienen las diferentes soluciones. Por ejemplo, tomando $y = 0$, se tiene la solución $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$; y tomando $y = 1$ se obtiene $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$. Claramente, con otras elecciones de y o z se obtendrán otras soluciones.

(2B) El determinante de la matriz dada es $|A| = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$, por lo tanto, la matriz tiene inversa si $a \neq b$.

Si $a = 1$ y $b = 2$, la matriz A tiene inversa y se puede resolver la ecuación matricial planteada, que se reescribe como

$$AX = A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}A^3 + A^{-1}I_2 = A^2 + A^{-1}.$$

La matriz A, su cuadrado y su inversa son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$X = A^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

TERCER EJERCICIO

(3A) El punto de corte del plano de ecuación $x - 3y - 2z + 7 = 0$ con la recta r_2 es $P(0, 1, 2)$, y P no está en la recta r_1. Por otro lado, tomando dos puntos distintos Q y R de la recta r_1, por ejemplo, $Q = (1/5, -1/5, 0)$ y $R = (2/5, 0, 1/5)$, el plano que se pide es el que contiene a P, Q y R. Su ecuación es $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

Otra manera de resolver el problema es la siguiente: el haz de planos que contiene a la recta r_1 es $x + y - 2z + t(2x - 3y + z - 1) = 0$. Entonces, sustituimos el punto $P(0, 1, 2)$ en la ecuación del haz de planos y obtenemos $t = -3/2$; por tanto, la ecuación del plano pedido es $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

(3B)

(a) Los vectores directores de las rectas r y s son $\vec{v}_r = (5, -4, -2)$ y $\vec{v}_s = (4, -4, 0)$, respectivamente. Como no existe ninguna constante k tal que $\vec{v}_s = k\vec{v}_r$, las rectas no son paralelas ni coincidentes.

Para ver si las rectas r y s se cortan o se cruzan, tomamos un punto de cada una de las rectas, por ejemplo los puntos A y C y calculamos el vector $\vec{AC} = (2, 3, -2)$. El producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}] \neq 0$, por lo tanto, las rectas se cruzan.

Otra posibilidad es escribir las ecuaciones paramétricas de las rectas y comprobar que no hay ningún punto de corte.

$$r \equiv \{x = -4 + 5\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = 1 - 2\lambda\},$$
$$s \equiv \{x = -2 + 4\mu,\ y = 7 - 4\mu,\ z = -1\}.$$

Para que haya punto de corte, deben existir λ y μ tales que

$$-4 + 5\lambda = -2 + 4\mu, \quad 4 - 4\lambda = 7 - 4\mu, \quad 1 - 2\lambda = -1.$$

De la última ecuación se sigue que $\lambda = 1$ y al sustituir en las otras dos ecuaciones se ve que no se pueden satisfacer las dos a la vez.

(b) La distancia entre r y s es

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_r|} u = \frac{8}{3} u.$$

CUARTO EJERCICIO

(4A) Se considera la función $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$.

(a) Para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean horizontales, la derivada de la función en esos puntos debe ser nula.

Como $f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B$,

$$\begin{cases} f'(0) = B = 0 \\ f'(1) = 4 + 3A + 2 + B = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = -2, B = 0.$$

(b) Con los valores de A y B obtenidos en el apartado anterior, la función f y su derivada son

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

f' es positiva si $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$ y negativa si $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$. Por tanto, f es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$; y f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(1/2, 1)$.

(4B) Se denota por x la longitud de los lados horizontales de los marcos y por y la longitud de los lados verticales.

(a) El coste de un marco viene dado por la función $g(x,y) = 12 \times 2x + 10 \times 2y = 24x + 20y$. La superficie de cada cuadro es $xy = 0,3$m^2, por tanto $y = 0,3/x$. Sustituyendo esta condición en la función g obtenemos la función de una variable que se quiere optimizar,

$$f(x) = 24x + 20\frac{0,3}{x} = 24x + \frac{6}{x}.$$

Buscamos los puntos donde se anula la derivada:

$$f'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \implies x = \pm\frac{1}{2}.$$

Las medidas deben ser positivas, por tanto, el único punto a considerar es $x_0 = 1/2$. Para comprobar si la función tiene un mínimo en x_0 calculamos la segunda derivada de f en ese punto, que debe ser positiva:

$$f''(x) = \frac{12}{x^3} \implies f''(x_0) > 0.$$

Como f es continua en $(0,\infty)$ y no tiene más puntos críticos en ese intervalo, el mínimo absoluto de f se alcanza en $x_0 = 1/2$ y las dimensiones de los cuadros deben ser $x = 0,5$m la longitud de sus lados horizontales e $y = 0,3/0,5 = 0,6$m la longitud de sus lados verticales.

(b) El precio de cada cuadro es $g(x,y) = g(1/2, 3/5) = 24$€ y el precio de los 274 cuadros se obtiene multiplicando el precio unitario por la cantidad de cuadros, luego la factura ascenderá a 6.576€.

QUINTO EJERCICIO

(5A)

(a) La primera integral se resuelve por partes, tomando

$$u = 2x, \quad dv = \cos(2x+5)dx,$$
$$du = 2dx, \quad v = \frac{\sin(2x+5)}{2}.$$

Entonces,

$$\int 2x\cos(2x+5)\,dx = 2x\frac{\sin(2x+5)}{2} - \int 2\frac{\sin(2x+5)}{2}\,dx$$
$$= x\sin(2x+5) - \int \sin(2x+5)\,dx = x\sin(2x+5) + \frac{\cos(2x+5)}{2} + k.$$

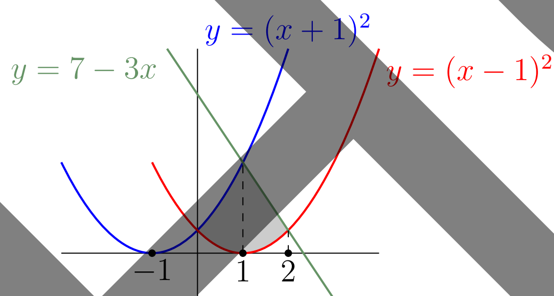
(b) Como $2025 = 45^2$, el integrando se descompone como suma de dos fracciones simples

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{6}{x-45} - \frac{5}{x+45}$$

y, por tanto,

$$\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx = 6\ln|x-45| - 5\ln|x+45| + k.$$

(5B) Las parábolas de ecuaciones $y = (x-1)^2$ e $y = (x+1)^2$ se cortan cuando $x = 0$. La parábola de ecuación $y = (x-1)^2$ y la recta se cortan cuando $x = 2$ y cuando $x = -3$. Por último, la parábola de ecuación $y = (x+1)^2$ y la recta se cortan cuando $x = -6$ y $x = 1$. El recinto limitado por las tres curvas es



El área de ese recinto es

$$A = \int_0^1 \left((x+1)^2 - (x-1)^2\right) dx + \int_1^2 \left(7 - 3x - (x-1)^2\right) dx = \frac{25}{6} u^2.$$