MATEMATIKA II / MATEMÁTICAS II

ZUZENTZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Ariketa baten ebazpenean teknika berezirik ez bada eskatzen, soluzio zuzena ematen duen edozein garapen baliozkoa izango da.
4. Ariketa zuzen badago (adierazitako teknikaren arabera, hala badagokio), osorik ontzat emango da. Kalifikatzeko irizpideetan urrats bakoitzerako adierazitako puntuazioak bakarrik aplikatuko dira ariketa osorik zuzen ez badago.
5. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
6. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
7. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak, etab.
8. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
9. Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkulu-errore asko egitea.
10. Errore bakanak negatiboki baloratuko dira hausnarketa kritikoaren edo sen arruntaren gabezia adierazten dutenean.
11. Negatiboki baloratuko da zehaztasun matematikorik eza azalpenetan eta sinbolo matematikoen erabilera desegokia.
12. Jarraibideetan adierazi baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
13. Erantzunek boligrafo urdinez edo beltzez idatzita egon behar dute; ezin da arkatzik, ezabatu daitekeen boligraforik edo beste kolore bateko boligraforik erabili.

Ariketa bakoitza KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

DERRIGORREZKO ARIKETA

(a)
- Zuhaitza edo kontingentzia-taula egitea (0,25 puntu).
- Ebazpen-prozesua adieraztea (0,25 puntu).
- Emaitzaren kalkulua (0,25 puntu).

(b)
- Ebazpen-prozesua adieraztea (0,25 puntu).
- Probabilitatearen kalkulua (0,25 puntu)
- Baldintza betetzen duten emakumeen kopurua kalkulazea (0,25 puntu).

(c) Probabilitatea ondo kalkulatzea, Bayes-en teorema aplikatuz (0,75 puntu).

(d) Zuzen erantzutea, probabilitateen propietateak erabiliz (0,25 puntu).

BIGARREN ARIKETA

2A

(a)
- Koefizienteen matrizea zuzen identifikatzea (0,25 puntu).
- Koefizienteen matrizearen determinantea kalkulatzea eta soluzioen bakartasuneko kasuen analisia (0,75 puntu).
- $\alpha = 2$ kasuaren analisi zuzena (0,5 puntu).

(b) $\alpha = 0$ kasuaren analisi eta ebazpen zuzenak (1 puntu).

2B

(a) Alderantzizkoaren existentziaren analisi zuzena (0,5 puntu).

(b)
- A^{-1} matrizearen kalkulu zuzena $\alpha = 0$ denean (1 puntu).
- A^{2025} kalkulu zuzena $\alpha = 0$ denean (1 puntu).

HIRUGARREN ARIKETA

3A

- A eta B puntuetatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa ondo kalkulatzea (0,5 puntu).
- P puntua barne duen eta zuzenarekiko perpendikularra den planoaren ekuazioaren kalkulu zuzena (0,5 puntu).
- Planoaren eta zuzenaren arteko ebaki-puntua kalkulatzea (0,5 puntu).
- P' puntuaren kalkuluaren planteamendua (0,5 puntu).
- P' puntua zuzen lortzea (0,5 puntu).

3B

(a)
- Planoaren ekuazioaren kalkulua (0,25 puntu).
- Zuzenaren ekuazioaren kalkulua (0,25 puntu).
- Planoaren bektore normalak eta zuzenaren norabide-bektoreak osatutako angelua kalkulatzea (0,25 puntu).
- Eskatutako angelua kalkulatzea (0,25 puntu).
- Angelua gradu, minutu eta segundotan adieraztea (0,5 puntu).

(b)
- Planoak eta zuzenak elkar ebakitzen dutela ondorioztatzea (0,5 puntu).
- Planoaren eta zuzenaren arteko ebaki-puntua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).

LAUGARREN ARIKETA

4A

(a)
- f funtzioaren asintota bertikalen analisi zuzena (0,5 puntu).
- f funtzioaren asintota horizontalen analisi zuzena, bai ∞-n eta baita $-\infty$-n ere (0,5 puntu).

(b)
- f funtzioaren deribatuaren kalkulu zuzena (0,5 puntu).
- Deribatuaren zeinua zuzen aztertzea eta beherakortasun-tarteak lortzea, deribatua definituta ez dagoen puntuak kontuan hartuta (0,5 puntu).

(c) Eskatutako zuzen ukitzailearen kalkulu zuzena (0,5 puntu).

4B

(a)
- Optimizatu beharreko funtzioaren adierazpen zuzena, katiluaren dimentsioei dagokienez (0,25 puntu).
- Katiluaren dimentsioek betetzen duten baldintzaren adierazpen zuzena (0,25 puntu).
- Optimizatu beharreko funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuen kalkulu zuzena (0,5 puntu).
- Puntu kritikoak zuzen kalkulatzea eta bigarren deribatua ebaluatzea (0,25 puntu).
- Soluzioa unitate zuzenekin adieraztea (0,25 puntu).

(b)
- Azaleraren kalkulua (0,5 puntu).
- Kostuaren kalkulua (0,25 puntu).
- Emaitza unitate egokiekin adieraztea (0,25 puntu).

BOSGARREN ARIKETA

5A

(a)
- Zatikako integrazioa aplikatzeko faktoreak zuzen hautatzea (0,5 puntu).
- Zatikako integrazioaren formula zuzen erabiltzea (0,5 puntu).
- Integrala zuzen kalkulatzea (0,25 puntu).

(b)
- Integrakizuna frakzio sinpleetan zuzen deskonposatzea (0,5 puntu).
- Integralaren kalkulu zuzena (0,75 puntu).

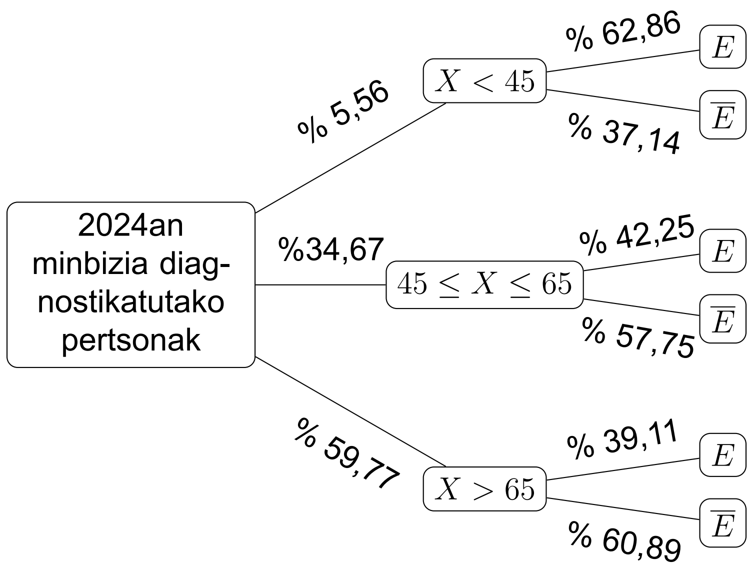
5B

(a)
- Parabolaren eta zuzenaren arteko ebakidura-puntuen kalkulu zuzena (0,75 puntu).
- Kurbek definituriko eremuaren irudikapen zuzena (0,5 puntu).

(b)
- Integralaren deskonposizioa bi batugaitan, eremuaren zati bakoitza zehazten duten kurbak kontuan hartuta (0,5 puntu).
- Jatorrizkoaren kalkulua eta Barrow-en erregela aplikatzea (0,75 puntu).

MATEMATIKA II

DERRIGORREZKO ARIKETA. Izan bitez X 2024an minbizia diagnostikatutako pertsonen adina, E "emakumea izan" gertaera, eta $\overline{E}$ "emakumea ez izan" gertaera.



(a) Emakumea izateko probabilitatea honako hau da:

$$
\begin{aligned}
P(E) =& P(X > 65)\, P(E \,|\, X > 65) + P(45 \leq X \leq 65)\, P(E \,|\, 45 \leq X \leq 65) \\
&+ P(X < 45)\, P(E \,|\, X < 45) \\
=& 0,5977 \times 0,3911 + 0,3467 \times 0,4225 + 0,0556 \times 0,6286 = 0,4152.
\end{aligned}
$$

(b) 65 urtetik gorako emakumea izateko probabilitatea honako hau da:

$$P(E \cap (X > 65)) = P(X > 65)\, P(E \,|\, X > 65) = 0,5977 \times 0,3911 = 0,2338.$$

Emakumeen kopuru probablea probabilitate hori 2024an minbiziarekin diagnostikatutako pertsonen kopuruaz biderkatuz lortzen da, hau da, $286664 \times 0,2338 = 67022$.

(c) Emakume bat aukeratu bada, 65 urte edo gutxiago izateko probabilitatea, Bayes-en teorema erabiliz, hau da:

$$
\begin{aligned}
P((X \leq 65) \,|\, E) =& \frac{P(E \cap (X \leq 65))}{P(E)} = \frac{P(E) - P(E \cap (X > 65))}{P(E)} \\
=& 1 - \frac{P(E \cap (X > 65))}{P(E)} = 1 - \frac{0,2338}{0,4152} = 0,4369.
\end{aligned}
$$

(d) Emakumea izateko probabilitatea, (a) atalean kalkulatu dena, $0,5$ baino txikiagoa denez, probableagoa da emakumea ez izatea.

BIGARREN ARIKETA

(2A) Sistema era baliokide honetan idazten da:

$$\begin{cases} x - \alpha y + 3z = 3 \\ \alpha x + y + z = 2 \\ x - y + 2z = 1. \end{cases}$$

Sistema horren koefizienteen matrizea honako hau da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Matrize horren determinantea $|A| = 2\alpha(\alpha - 2)$ da. Beraz, $\alpha \neq 0$ eta $\alpha \neq 2$ bada, sistema BATERAGARRI DETERMINATUA da, eta soluzio bakarra du.

Baldin eta $\alpha = 2$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da eta matrize zabalduarena 3 da; beraz, sistema BATERAEZINA da, eta ez du soluziorik.

Baldin eta $\alpha = 0$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, sistema BATERAGARRI INDETERMINATUA DA, eta soluzio bat baino gehiago du.

(b) $\alpha = 0$ denean, lehenengo bi ekuazioek osatutako sistema hau da:

$$\begin{cases} x + 3z = 3, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Soluzioak $x = 3 - 3t$, $y = 2 - t$, $z = t$ dira, non $t \in \mathbb{R}$ den.

(2B)

(a) Emandako matrizearen determinantea $|A| = 1 - \alpha$ da; beraz, matrizeak alderantzizkoa du baldin eta $\alpha \neq 1$ bada.

(b) Baldin eta $\alpha = 0$ bada,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrizeak honako alderantziko hau du:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A-ren lehenengo berreturak kalkulatuz, hau da, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$,..., heldu gaitezke A^n matrizerako formula orokorrera. Bereziki,

$$A^{2025} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2025 \\ 0 & 1 & 2025 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

HIRUGARREN ARIKETA

(3A)A eta B puntuetatik pasatzen den r zuzenaren ekuazioa $r \equiv (-2,0,1) + \lambda(0,1,1)$ da.

r zuzenarekiko perpendikularra den eta P puntutik pasatzen den π planoaren ekuazioa $\pi \equiv y + z + 3 = 0$ da, eta r-ren eta π-ren arteko ebaki-puntua $M(-2,-2,-1)$ da.

P' baldin bada P-ren simetrikoa r zuzenarekiko, M puntua P eta P' puntuak lotzen dituen zuzenkiaren erdipuntua da; beraz, $P'(-8,-1,-2)$.

(3B)

(a) r zuzenaren norabide-bektorea $\vec{v}_r = (1,6,8)$ da, eta π planoaren bektore normala $\vec{AB} \times \vec{AC}$ bektorearekiko paraleloa da; beraz, $\vec{n}_\pi = (2,2,-1)$ har dezakegu.

Bilatzen den α angelua $\vec{n}_\pi$ eta $\vec{v}_r$ bektoreek osatzen dutenaren osagarria da:

$$\alpha = 90^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{n}_\pi|\,|\vec{v}_r|}\right) = 11,48^\circ.$$

Angelua, gradu, minutu eta segundotan emana $\alpha = 11^\circ 28' 48''$ da.

(b) $\vec{v}_r$ eta $\vec{n}_\pi$ bektoreek osatzen duten angelua ez denez 90°, r-k eta π-k elkar ebakitzen dute.

Planoaren ekuazioa $\pi \equiv 2x + 2y - z - 6 = 0$ da, eta zuzenaren ekuazio parametrikoa $r \equiv (6,-5,-4) + \mu(1,6,8)$ da. Zuzenaren puntu bat, $(6+\mu, -5+6\mu, -4+8\mu)$, planoaren ekuazioan ordeztuz, $\mu = 0$ dela lortzen da, eta r-ren eta π-ren arteko ebaki-puntua $M(6,-5,-4)$ da.

LAUGARREN ARIKETA

(4A)

(a) f funtzioaren izendatzailea, x^2-3x-4, anulatzen da $x=-1$ eta $x=4$ denean. Funtzioak bi asintota bertikal ditu, $x=-1$ eta $x=4$, zeren eta

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^-}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=+\infty$$

baitira. Beste aldetik,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=0,\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{(x+1)(x-4)}=0$$

dira; beraz, f-k asintota horizontala du, $y=0$, bai $-\infty$-n eta baita $+\infty$-n ere.

(b) f-ren deribatua

$$f'(x)=-\frac{x^2+4}{(x^2-3x-4)^2}$$

da, zeina negatiboa den definituta dagoen puntu guztietan; beraz, f beherakorra da haren definizio-eremu osoan, hau da, $(-\infty,-1)$, $(-1,4)$ eta $(4,+\infty)$ tarteetan.

(c) $f(0)=0$ eta $f'(0)=-1/4$ direnez, f-ren grafikoak $x=0$ abszisa-puntuan duen zuzen ukitzailea $y=-\dfrac{x}{4}$ da.

(4B) Izan bitez R katiluaren oinarriaren erradioa eta H altuera. Katiluaren bolumena $\pi R^2 H$ da, eta azalera $\pi R^2+2\pi RH$ da.

(a) Bolumenerako eman den baldintzatik $H=\dfrac{216}{R^2}$ dela dakigu. Azaleraren adierazpenean ordeztuz, optimizatu nahi den funtzioa lortzen dugu: $f(R)=\pi R^2+2\pi\dfrac{216}{R}$.

Azalera minimoa izan dadin, f-ren deribatuak nulua izan behar du.

$$f'(R)=2\pi R-2\pi\frac{216}{R^2}=0 \iff R=6.$$

f-k $R_0=6$ puntuan minimo erlatibo bat izan dezan, f-ren bigarren deribatuak positiboa izan behar du puntu horretan.

$$f''(R) = 2\pi + \frac{864\pi}{R^3} \implies f''(6) > 0$$

da; beraz, f-k minimo erlatibo bat du $R_0 = 6$ denean. f jarraitua denez $(0, \infty)$-n, eta tarte horretan puntu kritiko gehiagorik ez duenez, f-ren minimo absolutua $R_0 = 6$ puntuan lortzen da. Altueraren balioa kasu horretan $H_0 = \frac{216}{R_0^2} = 6$ da. Hau da, katiluaren oinarriaren erradioak eta katiluaren altuerak 6 cm-koa izan behar dute.

(b) Katiluaren kanpoko azalera, aurreko atalean lortutako neurriekin, $S = \pi R_0^2 + 2\pi R_0 H_0 = 108\pi$ cm^2 $= 0,0108\pi$ m^2 da. Katilu bakoitza koloreztatzeko prezioa azalera m^2-tan kostuarekin biderkatuz lortzen da, hots, $0,0108\pi$ m^2 $\times\ 3$ €/m^2 $=\ 0,102$ €. Katilu bakoitza koloreztatzeko prezioa 10,2 zentimokoa da.

BOSGARREN ARIKETA

(5A)

(a) Lehenengo integrala zatikako integrazioarekin ebazten da, berdintza hauek hartuz:

$$u = 2x + 5, \quad dv = e^{2x} dx,$$
$$du = 2dx, \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$$

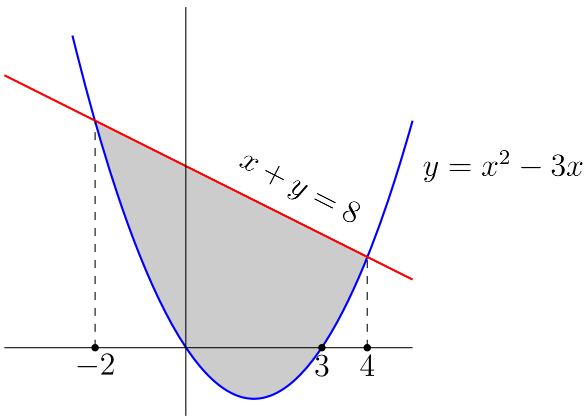
Orduan,

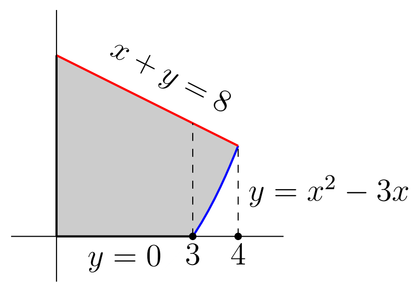
$$\int (2x+5)e^{2x}\, dx = (2x+5)\frac{e^{2x}}{2} - \int 2\frac{e^{2x}}{2}\, dx = \frac{2x+5}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + k = (x+2)e^{2x} + k.$$

(b) Funtzio arrazional bat integratu behar da, zeinaren izendatzailea $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$ moduan berridazten den; beraz,

$$\int \frac{x+7}{x^2+10x+25}\, dx = \int \frac{dz}{x+5} + \int \frac{2}{(x+5)^2}\, dx = \ln|x+5| - \frac{2}{x+5} + k.$$

(5B) $y = x^2 - 3x$ ekuazioko parabolak ardatz horizontala ebakitzen du $x = 0$ eta $x = 3$ denean. Zuzenak malda negatiboa du eta parabola ebakitzen du $x = -2$ eta $x = 4$ denean. Bi kurbek mugatzen duten eremua irudiaren ezkerraldean agertzen dena da:





Lehen koadrantean geratzen den eremuaren zatiaren azalera, irudiaren eskuinaldean agertzen dena, honako hau da:

$$A = \int_0^3 (8 - x)\, dx + \int_3^4 \Big(8 - x - (x^2 - 3x)\Big)\, dx = \frac{133}{6} u^2.$$