MATEMATIKA II / MATEMÁTICAS II

ZUZENTZEKO IRIZPIDE OROKORRAK

1. Probaren puntuazioa, guztira, 0 eta 10 puntu bitartekoa izango da.
2. Ariketa guztiak berdin baloratuko dira: 0 eta 2,5 puntuen artean.
3. Ariketa baten ebazpenean teknika berezirik ez bada eskatzen, soluzio zuzena ematen duen edozein garapen baliozkoa izango da.
4. Ariketa zuzen badago (adierazitako teknikaren arabera, hala badagokio), osorik ontzat emango da. Bakarrik aplikatuko dira kalifikatzeko irizpideetan urrats bakoitzerako adierazitako puntuazioak ariketa osoki zuzena ez bada.
5. Planteamendu egokiak baloratuko dira, bai planteamendu orokorra, bai atal bakoitzaren planteamendua (halakorik balego).
6. Zenbakizko akatsak –kalkuluetan egindakoak eta abar– ez dira kontuan hartuko, baldin eta akats kontzeptualak ez badira.
7. Positiboki baloratuko dira soluzioa hobeto ikusarazten dituzten ideiak, eskemak, grafikoak, aurkezpenak, etab.
8. Azterketa txukun aurkeztea aintzat hartuko da.
9. Negatiboki baloratuko dira planteamendu okerrak, kontzeptuak nahastea eta kalkulu-errore asko egitea.
10. Errore bakanak negatiboki baloratuko dira hausnarketa kritikoaren edo sen arruntaren gabezia adierazten dutenean.
11. Negatiboki baloratuko da zehaztasun matematikoaren eza azalpenetan eta sinbolo matematikoen erabilera desegokia
12. Jarraibideetan adierazi baino galdera gehiagori erantzunez gero, erantzunak ordenari jarraituta zuzenduko dira, harik eta beharrezko kopurura iritsi arte.
13. Erantzunak boligrafo urdinez edo beltzez idatzita egon behar dira, ezin dira arkatza, ezabatu daitekeen boligrafoa edo beste kolore bateko boligrafoa erabili.

Ariketa bakoitza KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK

DERRIGORREZKO ARIKETA

(a)
- Probabilitate-banaketa tipifikatzea (0,25 puntu).
- Kalkulatu beharreko probabilitatea $P(Z < \alpha)$ formaren probabilitate baten funtzio gisa berridaztea, Z aldagai tipifikatua izanik eta $\alpha > 0$ (0,25 puntu).
- Bilatutako probabilitatea aurkitzea, banaketa normalaren taula erabiliz (0,5 puntu).

(b)
- Probabilitate-banaketa tipifikatzea (0,25 puntu).
- Kalkulatu beharreko probabilitatea $P(Z < \alpha)$ formaren probabilitateen funtzio gisa berridaztea, Z aldagai tipifikatua izanik eta $\alpha > 0$ (0,25 puntu).
- Bilatutako probabilitatea aurkitzea, banaketa normalaren taula erabiliz (0,25 puntu).
- Jaioberrien kopuru osoaren emaitza ematea (0,25 puntu).

(c)
- Emandako tartea (b) atalean emandakoaren azpimultzo bat dela kontuan izatea (0,25 puntu).
- Erantzun zuzena ematea, probabilitateen propietateak erabiliz (0,25 puntu).

BIGARREN ARIKETA

2A

(a)
- Koefizenteen matrizearen determinantearen kalkulua (0,75 puntu).
- Balioak aurkitzea zeinetarako determinantea ez den anulatzen (0,25 puntu).

(b) $\alpha = 1$ baliorako sistema bateragarri indeterminatua dela konprobatzea (0,75 puntu).

(c) Sistemaren bi soluzio aurkitzea $\alpha = 1$ denean (0,75 puntu).

2B

(a)
- A matrizearen determinantea ondo kalkulatzea (0,5 puntu).
- A-ren alderantzizkoaren existentziaren analisi zuzena (0,25 puntu).

(b)
- A^2 -ren kalkulu zuzena (0,5 puntu).
- A^{-1} -en kalkulu zuzena (0,75 puntu).
- Ekuazio matrizialaren ebazpen zuzena (0,5 puntu).

HIRUGARREN ARIKETA

3A

- Planoaren eta zuzenaren ebaki-puntua kalkulatzea (1 puntu).
- Eskatutako planoaren ekuazioa lortzea (1,5 puntu).

3B

(a)
- r eta s zuzenen norabide-bektoreak zuzen kalkulatzea (0,25 puntu).
- Ondorioztatzea zuzenak ez direla paraleloak ez eta kointzidenteak ere (0,25 puntu).
- Bi puntu, bakoitza zuzen batekoa, lotzen dituen bektorea kalkulatzea eta bi zuzenen norabide-bektoreek eta aurreko bektoreak osatzen duten biderkadura mistoa kalkulatzea; edo zuzenek puntu komunik ez dutela egiaztatzea (0,75 puntu).
- Zuzenak gurutzatzen direla ondorioztatzea (0,25 puntu).

(b)
- Kalkulatzeko erabilitako metodoa adieraztea (0,5 puntu).
- Eskatutako emaitza zuzen lortzea (0,5 puntu).

LAUGARREN ARIKETA

4A

(a)
- f funtzioaren deribatua zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).
- A eta B parametroen balioak zuzen kalkulatzea (0,5 puntu).

(b)
- f funtzioaren deribatuaren faktorizazio zuzena (0,5 puntu).
- f funtzioaren gorakortasun- eta beherakortasun-tarteak zuzen adieraztea (1 puntu).

4B

- Koadroaren dimentsioek betetzen duten baldintzaren adierazpen zuzena (0,25 puntu).
- Optimizatu beharreko funtzioaren adierazpen zuzena (0,5 puntu).
- Optimizatu beharreko funtzioaren lehenengo eta bigarren deribatuen kalkulu zuzena (0,5 puntu).
- Puntu kritikoen kalkulu zuzena, kontuan izanik, kasu honetan, aldagaiak balio positiboak baino ez dituela hartzen, eta puntu horietako bigarren deribatuaren ebaluazioa (0,5 puntu).
- Soluzioa unitate egokietan adieraztea (0,25 puntu).
- Fakturaren zenbatekoaren kalkulu zuzena (0,5 puntu).

BOSGARREN ARIKETA

5A

(a)
- Zatikako integrazioa aplikatzeko faktoreak zuzen hautatzea (0,5 puntu).
- Zatikako integrazioaren formula ondo erabiltzea (0,5 puntu).
- Integralaren kalkulu zuzena (0,25 puntu).

(b)
- Frakzio sinpleetan behar bezala deskonposatzea integrakizuna (0,75 puntu).
- Integralaren kalkulu zuzena (0,5 puntu).

5B

(a)
- Kurben ebaki-puntuen kalkulua (0,75 puntu).
- Eskatutako eremuaren irudikapen zuzena (0,5 puntu).

(b)
- Integralaren deskonposizioa bi batugaitan, eremuaren zati bakoitza zehazten duten kurbak kontuan hartuta (0,5 puntu).
- Jatorrizkoa kalkulatzea eta Barrow-en erregelaren aplikazioa (0,75 puntu).

MATEMATIKA II

DERRIGORREZKO ARIKETA. X =“2024ko Gurutzetako Ospitaleko jaioberrien pisua” aldagaiak $N(3372; 405)$ banaketa normal bati jarraitzen dio. Z bidez adierazten dugu banaketa normal tipifikatuari jarraitzen dion aldagai bat.

(a) Jaioberri baten pisua 3kg-tik gorakoa izateko probabilitatea honako hau da:

$$\begin{aligned} P(X > 3000) &= P\Big(Z > \frac{3000 - 3372}{405}\Big) \\ &= P(Z > -0,92) = P(Z < 0,92) = 0,8212. \end{aligned}$$

(b) Jaioberri baten pisua 3kg-tik 3,5kg-ra bitarteko tartean egoteko probabilitatea honako hau da:

$$\begin{aligned} P(3000 < X < 3500) &= P\Big(\frac{3000 - 3372}{405} < Z < \frac{3500 - 3372}{405}\Big) \\ &= P(-0,92 < Z < 0,32) = P(Z < 0,32) - P(Z < -0,92) \\ &= 0,6255 - (1 - 0,8212) = 0,4467. \end{aligned}$$

Tarte horretan pisua duten jaioberrien kopuru probablea 2024ko Gurutzetako Ospitaleko jaioberrien kopurua lortutako probabilitatearekin biderkatuz lortzen da, $9476 \times 0,4467 \sim 4233$.

(c) Azpimultzo baten probabilitatea ezin da izan bera barne duen multzoarena baino handiagoa. $P(3000 < X < 3500) = 0,4467$ dela lortu da, eta $(3100, 3300)$ multzoa $(3000, 3500)$ multzoaren parte da. Beraz, $P(3100 < X < 3300) < 0,4467$ da, eta 3,1kg eta 3,3kg arteko pisua izan duten jaioberrien kopurua ez litzateke 4233 baino handiagoa izan beharko.

BIGARREN ARIKETA

(2A) Emandako sistemaren koefizienteen matrizea honako hau da:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -2 & 1 \\ 1 & -2 & \alpha \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

(a) Matrize horren determinantea $|A| = -3(\alpha - 1)^2$ da. Beraz, $\alpha \neq 1$ bada, sistemak soluzio bakarra du.

(b) $\alpha = 1$ bada, koefizienteen matrizearen heina 2 da eta baita ere matrize zabalduarena; beraz, ez dago α parametroaren baliorik zeinetarako sistemak soluziorik ez duen.

(c) Sistemak soluzio bat baino gehiago dauzka $\alpha = 1$ bada, eta kasu horretan soluzioek $y = z$ eta $x = 1 + 2y - z$ berdintzak betetzen dituzte. Balioak emanez y-ri (edo z-ri), soluzio desberdinak lortzen dira. Adibidez, $y = 0$ hartuz, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$ soluzioa lortzen da; eta $y = 1$ hartuz $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$ lortzen da. Argi denez, y edo z balioen beste aukeraketekin beste soluzio batzuk lortzen dira.

(2B) Emandako matrizearen determinantea $|A| = (a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$ da; beraz,matrizeak alderantzizkoa du $a \neq b$ bada.

Baldin eta $a = 1$ eta $b = 2$ badira, A matrizeak alderantzizkoa du, eta planteatutako ekuazio matriziala ebatz daiteke, zeina honela berridazten den:

$$AX = A^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies X = A^{-1}A^3 + A^{-1}I_2 = A^2 + A^{-1}.$$

A matrizea, haren karratua eta haren alderantzizkoa honako hauek dira:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Orduan,

$$X = A^2 + A^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}.$$

HIRUGARREN ARIKETA

(3A) $x - 3y - 2z + 7 = 0$ ekuazioko planoaren eta r_2 zuzenaren ebaki-puntua $P(0, 1, 2)$ da, eta P ez dago r_1 zuzenean. Bestalde, r_1 zuzenaren Q eta R bi puntu desberdin hartuta, adibidez $Q = (1/5, -1/5, 0)$ eta $R = (2/5, 0, 1/5)$, eskatutako planoa P, Q eta R barne dituen planoa da. Haren ekuazioa hau da: $4x - 11y + 7z - 3 = 0$.

Ariketa ebazteko beste era bat honako hau da: r_1 zuzena barnean duen plano-sorta $x + y - 2z + t(2x - 3y + z - 1) = 0$ da. Ondoren, $P(0, 1, 2)$ ordezkatzen dugu plano-sorta horren ekuazioan, eta $t = -3/2$ lortzen dugu; beraz, eskatutako planoaren ekuazioa $4x - 11y + 7z - 3 = 0$ da.

(3B)

(a) r eta s zuzenen norabide-bektoreak $\vec{v}_r = (5, -4, -2)$ eta $\vec{v}_s = (4, -4, 0)$ dira, hurrenez hurren. Ez denez existitzen k konstanterik zeinetarako $\vec{v}_s = k\vec{v}_r$ den, zuzenak ez dira paraleloak ezta kointzidenteak ere.

r eta s zuzenek elkar ebakitzen duten edo gurutzatzen diren ikusteko, zuzen bakoitzeko puntu bat hartzen dugu, adibidez A eta C puntuak, eta kalkulatzen dugu $\vec{AC} = (2, 3, -2)$ bektorea. Biderkadura mistoa $[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}] \neq 0$ da; beraz, zuzenak gurutzatzen dira.

Beste aukera bat da zuzenen ekuazio parametrikoak idaztea eta egiaztatzea ez dagoela ebaki-punturik.

$$r \equiv \{x = -4 + 5\lambda,\ y = 4 - 4\lambda,\ z = 1 - 2\lambda\},$$
$$s \equiv \{x = -2 + 4\mu,\ y = 7 - 4\mu,\ z = -1\}.$$

Ebaki-puntu bat egon dadin, existitu behar dira λ eta μ non

$$-4 + 5\lambda = -2 + 4\mu, \quad 4 - 4\lambda = 7 - 4\mu, \quad 1 - 2\lambda = -1$$

diren. Azken ekuaziotik ondorioztatzen da $\lambda = 1$ dela, eta beste bi ekuazioetan ordezkatzean ikusten da ezin direla biak aldi berean bete.

(b) r eta s zuzenen arteko distantzia honako hau da:

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \vec{AC}]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_r|} u = \frac{8}{3} u.$$

LAUGARREN ARIKETA

(4A) $f(x) = x^4 + Ax^3 + x^2 + Bx$ funtzioa hartzen da.

(a) f funtzioaren grafikoaren zuzen ukitzaileak $x = 0$ eta $x = 1$ abzisa duten puntuetan horizontalak izan daitezen, funtzioaren deribatuak puntu horietan nulua izan behar du. $f'(x) = 4x^3 + 3Ax^2 + 2x + B$ denez,

$$\begin{cases} f'(0) = B = 0 \\ f'(1) = 4 + 3A + 2 + B = 0 \end{cases} \implies A = -2, B = 0.$$

(b) Aurreko atalean lortu diren A eta B parametroen balioekin f funtzioa eta haren deribatua honako hauek dira:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2,$$
$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1).$$

f' positiboa da baldin eta $x \in (0, 1/2) \cup (1, +\infty)$ bada eta negatiboa da baldin eta $x \in (-\infty, 0) \cup (1/2, 1)$ bada. Beraz, f gorakorra da $(0, 1/2)$ eta $(1, +\infty)$ tarteetan; eta f beherakorra da $(-\infty, 0)$ eta $(1/2, 1)$ tarteetan.

(4B) Alde horizontalen luzera x-ren bidez adierazten da, eta alde bertikalena y-ren bidez.

(a) Marko baten kostua $g(x,y) = 12 \times 2x + 10 \times 2y = 24x + 20y$ funtzioaren bidez emanda dago. Koadro bakoitzaren azalera $xy = 0,3$m^2 da; beraz, $y = 0,3/x$ da. Baldintza hori g funtzioan ordezkatuz lortzen da optimizatu nahi den aldagai bateko funtzioa,

$$f(x) = 24x + 20\frac{0,3}{x} = 24x + \frac{6}{x}.$$

Bilatzen ditugu puntuak non deribatua anulatzen den:

$$f'(x) = 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \implies x = \pm\frac{1}{2}.$$

Neurriek positiboak izan behar dute; beraz, kontuan hartu behar den puntu bakarra $x_0 = 1/2$ da. Funtzioak x_0 puntuan minimo bat duen egiaztatzeko, f-ren puntu horretako bigarren deribatua kalkulatzen dugu, zeinak positiboa izan behar duen:

$$f''(x) = \frac{12}{x^3} \implies f''(x_0) > 0.$$

f jarraitua denez $(0,\infty)$-n, eta tarte horretan puntu kritiko gehiagorik ez duenez, f-ren minimo absolutua $x_0 = 1/2$ puntuan lortzen da, eta koadroen dimentsioek honako hauek izan behar dute: $x = 0,5$m alde horizontalen luzera eta $y = 0,3/0,5 = 0,6$m alde bertikalen luzera.

(b) Koadro bakoitzaren prezioa $g(x,y) = g(1/2, 3/5) = 24$€ da eta 274 koadroen prezioa unitate bakoitzaren prezioa koadroen kopuruarekin biderkatuz lortzen da, hau da, faktura 6.576€-koa izango da.

BOSGARREN ARIKETA

(5A)

(a) Lehenengo integrala zatikako integrazioaren bidez ebazten da,

$$u = 2x, \quad dv = \cos(2x+5)dx,$$
$$du = 2dx, \quad v = \frac{\sin(2x+5)}{2}.$$

Orduan,

$$\int 2x\cos(2x+5)\,dx = 2x\frac{\sin(2x+5)}{2} - \int 2\frac{\sin(2x+5)}{2}\,dx$$
$$= x\sin(2x+5) - \int \sin(2x+5)\,dx = x\sin(2x+5) + \frac{\cos(2x+5)}{2} + k.$$

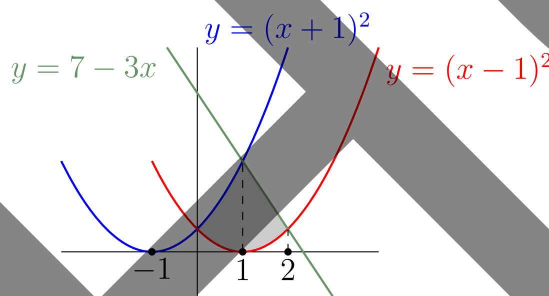
(b) $2025 = 45^2$ denez, integrakizuna bi frakzio sinpleren batura gisa deskonposatzen da:

$$\frac{x+495}{x^2-2025} = \frac{6}{x-45} - \frac{5}{x+45}$$

eta, beraz,

$$\int \frac{x+495}{x^2-2025}\,dx = 6\ln|x-45| - 5\ln|x+45| + k.$$

(5B) $y = (x-1)^2$ eta $y = (x+1)^2$ ekuazioetako parabolek $x = 0$ denean elkar ebakitzen dute. $y = (x-1)^2$ ekuazioko parabolak eta zuzenak $x = 2$ denean eta $x = -3$ denean elkar ebakitzen dute. Azkenik, $y = (x+1)^2$ ekuazioko parabolak eta zuzenak $x = -6$ denean eta $x = 1$ denean elkar ebakitzen dute. Hiru kurbek mugatzen duten eremua honako hau da:



Eremu horren azalera honako hau da:

$$A = \int_0^1 \left((x+1)^2 - (x-1)^2\right) dx + \int_1^2 \left(7 - 3x - (x-1)^2\right) dx = \frac{25}{6}u^2.$$