MÉTODO DE LEIBNIZ-CARTAN

PARA OBTENER LA EVOLUCIÓN DE LA

ENERGÍA A LO LARGO DEL TIEMPO

EN SISTEMAS MECÁNICOS CLÁSICOS

Y

SISTEMAS MECÁNICOS RELATIVISTAS

VISTA CREADA CON IA (23/5/26)

"El método de Leibniz-Cartan es un enfoque geométrico
desarrollado por Juan Veguillas Losada
para estudiar como evoluciona la energía
a lo largo del tiempo en sistemas mecánicos
(tanto de mecánica clásica como relativista).
A diferencia de los de los **enfoques tradicionales**,
este procedimiento matemático destaca por utilizar
un marco unificado que simplifica
la obtención de las ecuaciones del movimiento".

El método se caracteriza por su sencillez y universalidad (Esto es mio)

Esto no es pedantería es, por el contrario,
una deferencia hacia los presentes
no versados en mecánica.

LA JUBILACIÓN ¿ANULA LA CREATIVIDAD?

¿Por qué un catedrático de Química Física

crea un nuevo método en mecánica?

Respuesta: existen dos tipos de investigadores

1.Especialistas

2.Sintetizadores

i) No soy especialista de nada,

por tanto, me incluyo entre

los sintetizadores

ii) Soy, sobre todo,

un estudioso

iii) Soy un relacionador

(esto se lo dedico a mi nieto Tristán)

iv) Por último, me defino como:

UN APRENDIZ DE TODO Y MAESTRO DE NADA

Estímulos externos:

La culpa del desarrollo del método la tuvo

Gonzalo Muga porque me propuso dar una charla,

que al final no di, y el remate final se lo debo a

Ildefonso Martínez de la Fuente.

Ortega y Gasset

MISIÓN DE LA UNIVERSIDAD:

"La necesidad de crear vigorosas síntesis
y sistematizaciones del saber.....
irá fomentando un talento científico
que hasta ahora se ha producido por
casualidad: **EL TALENTO INTEGRADOR.**

En rigor, significa éste.....**UNA ESPECIALIZACIÓN**;
pero aquí el hombre se **ESPECIALIZA**
precisamente en la construcción de una **TOTALIDAD"**
(Revista de Occidente en Alianza editorial, pag 72)

En términos taurinos, Ortega me echa un capote

Mostrar los dos libros sobre mecánica

Método de Leibniz-Cartan

Síntesis científica

1.Leibniz

Idea fundamental:"

FUERZA VIVA = 2 ENERGÍA CINÉTICA

Método: Cálculo Diferencial

2.Cartan

Idea fundamental: un sistema de PFAFF

está formado por formas diferenciales

grado cero(funciones) y

por formas diferenciales de grado uno

PUNTO DE PARTIDA DEL MÉTODO

En el método propuesto consideraremos un sistema de PFAFF formado por la **energía** (forma de grado cero) y **formas diferenciales de grado uno**: formas cinemáticas y, si el sistema no es libre, hay que añadir formas diferenciales de ligadura

Partícula libre que se mueve sobre una recta

SISTEMA DE PFAFF

1) Energía $E = (1/2)\, m\, \dot{x}^2$

2) Formas diferenciales cinemáticas

$dx = \dot{x}\, dt$; $d\dot{x} = \ddot{x}\, dt$

La diferencial de la energía se anula por ser un sistema conservativo:

$$E = Cte$$

$$dE = m\, \dot{x}\, d\dot{x} = 0$$

Sustituimos $d\dot{x}$ por $\ddot{x}\, dt$

$dE = m\, \dot{x}\, \ddot{x}\, dt = m\, \ddot{x}\, dx = 0$

Esta relación nos indica que el trabajo realizado por la fuerza de inercia, $m\, \ddot{x}$, es nulo. Como dx es diferente de cero, se ha de cumplir, por tanto,

$$m\, \ddot{x} = 0$$

Partícula libre que se mueve en el plano

SISTEMA DE PFAFF

1)Energía $E= (1/2)\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

2)Formas diferenciales cinemáticas

$dx= \dot{x}\, dt;\ d\dot{x} = \ddot{x}\, dt$

$dy= \dot{y}\, dt;\ d\dot{y} = \ddot{y}\, dt$

La diferencial de la energía es nula

$dE=m\, \dot{x}\, d\dot{x} + m\, \dot{y}\, d\dot{y}$

Sustituimos $d\dot{x} = \ddot{x}\, dt$ y $d\dot{y} = \ddot{y}\, dt$

$dE= m\, \ddot{x}\, dx+ m\, \ddot{y}\, dy=0$

dx y dy son distintas de cero e independientes

Las ecuaciones del movimiento son:

$$m\, \ddot{x} =0;\ m\, \ddot{y} =0$$

Diferencial de la energía cinética de una partícula libre que se mueve en el plano en coordenadas polares

Hay que subrayar que la energía cinética de una partícula en coordenadas cartesianas se puede expresar como el producto la de la masa por el producto escalar de la aceleración por la diferencial del desplazamiento.

$$dE_{cin} = m\,(\mathbf{a}.\,d\mathbf{r})$$

las letras en negrillas indican vectores. Evidentemente, esta relación se cumple para coordenadas generalizadas ortogonales

$$dE_{cin} = m\,\{\mathbf{a}(\text{polares}).\,d\mathbf{r}(\text{polares})\}$$

$$dE_{cin} = m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,dr + m\,(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,(r\,d\theta)$$

LIGADURAS HOLÓNOMAS

Péndulo matemático

SISTEMA DE PFAFF

$$E= (1/2)\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m\, g\, y$$

Ecuación de ligadura: $x^2+y^2 = l^2$

l = longitud del péndulo

En coordenadas polares: $r = l,\ \dot{r} = 0;\ \ddot{r} = 0\ ;\ dr = 0$

$$V = -m\, g\, y = -\, m\, g\, l\, \cos\theta$$

$$dV = m\, g\, l\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

La diferencial de la energía es:

$$dE = m\,(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\, dr + m\,(2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,(r\, d\theta) + m\, g\, l\ \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Al considerar la ligadura dr=0 y $\dot{r}$=0,

la diferencial de la energía en coordenadas polares

se transforma en:

$$dE= (m\, l\, \ddot{\theta})\,(l\, d\theta) + m\, g\, l\, \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 0$$

De aquí se sigue la ecuación del movimiento:

$$\ddot{\theta} + (g/l)\, \operatorname{sen}\theta = 0$$

LIGADURAS NO HOLÓNOMAS

Ejemplo: partícula que se mueve en el espacio sujeta a la ligadura dada por la siguiente ecuación:

$$\dot{z} = y\,\dot{x}$$

SISTEMA DE PFAFF

1) Energía $E= (1/2)\, m\, (\dot{x}^2+ \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

2) Formas diferenciales cinemáticas

3) Multiplicamos los dos miembros de la ecuación de ligadura por dt y obtenemos la ecuación de ligadura en forma diferencial

$$dz= y\,dx$$

$$dE= m\,(\ddot{x}\,dx+ \ddot{y}\,dy + \ddot{z}\,dz)$$

Como las tres variables están relacionadas por la ligadura tenemos que calcular la derivada segunda de z

$\ddot{z} = y\,\ddot{x} + \dot{y}\,\dot{x}$ Sustituimos dz y $\ddot{z}$ en dE

$$dE= m\,(\ddot{x}\,dx+ \ddot{y}\,dy)+m\,(\, y\,\ddot{x} + \dot{y}\,\dot{x}\,)\, y\, dx =0$$

En esta ecuación hemos eliminado la ligadura.

Al ser dx y dy independientes podemos escribir las ecuaciones del movimiento:

$$\ddot{y} = 0\,; \quad \ddot{x} + (y/(1+y^2))\,\dot{x}\,\dot{y} =0$$

DIFERENCIAS ENTRE EL MÉTODO DE LAGRANGE Y EL MÉTODO DE LEIBNIZ-CARTAN

Ejemplo. Péndulo matemático

1. Método de Lagrange

Lagrangiana: $L= (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y)$

Ligadura: $x^2 + y^2 = r^2$; $r = cte$

Transformamos el Lagrangiano de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

2. Método de Leibniz-Cartan

Energía: $E= (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)+ V(x, y)$

Diferencial de la energía:

$dE = \ddot{x}\, dx + \ddot{y}\, dy + dV(x, y)$

Transformamos la diferencial de la energía de coordenadas cartesianas a coordenadas polares y tenemos en cuenta la ligadura: $dr =0$

Las ligaduras afectan a:

1) La energía cinética en el método de LAGRANGE

2)La diferencial de la energía cinética en el método de LEIBNIZ-CARTAN

MOVIMIENTOS QUE CONSERVAN LA ENERGÍA CINÉTICA

Los movimientos que se caracterizan por conservar la energía cinética se pueden denominar como simples

1) Movimiento en línea recta

$$E = (1/2)\, m\, (\dot{x}^2);$$

$$dE = m\, \dot{x}\, d\dot{x} = m\, \dot{x}\, \ddot{x}\, dt = 0$$

De aquí se sigue que $\dot{x}\, \ddot{x} = 0$, luego $\ddot{x} = 0$

El movimiento es uniforme

2) Movimiento en el plano

$$E = (1/2)\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2);$$

$$dE = m\, (\dot{x}\, d\dot{x} + \dot{y}\, d\dot{y}) = \dot{x}\, \ddot{x}\, dt + \dot{y}\, \ddot{y}\, dt = 0$$

Se cumple que: $\dot{x}\, \ddot{x} + \dot{y}\, \ddot{y} = 0$

Soluciones de la ecuación anterior

Primer caso:

$\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$, movimiento lineal uniforme

Segundo caso:

$$\ddot{x} = -w\, \dot{y} \qquad \ddot{y} = w\, \dot{x}$$

Estas ecuaciones corresponden a un movimiento circular uniforme.

3)***Movimiento en el espacio***

$$E = (1/2)\, m\, (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$dE = \dot{x}\, \ddot{x}\, dt + \dot{y}\, \ddot{y}\, dt + \dot{z}\, \ddot{z}\, dt = 0$$

Se cumple $\dot{x}\, \ddot{x} + \dot{y}\, \ddot{y} + \dot{z}\, \ddot{z} = 0$

Soluciones de la ecuación anterior.

Primer caso:

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = 0$$

movimiento lineal uniforme

Segundo caso:

$$\ddot{x} = -w\, \dot{y};\quad \ddot{y} = w\, \dot{x};\ \ddot{z} = 0$$

movimiento helicoidal

Los movimientos simples son:

Lineal, circular y helicoidal

SISTEMAS NO CONSERVATIVOS

Ejemplo n.1

Oscilador armónico dependiente del tiempo

$$E(t) = (1/2)\, m\, \dot{x}^2 + (1/2)\, k(t)\, x^2$$

$$dE = m\, \ddot{x}\, dx + k(t)\, x\, dx + (1/2)\, x^2\, dk(t)$$

En el intervalo de tiempo dt, k(t) se puede considerar constante. Podemos, por tanto, igualar a cero el término correspondiente a dx al conservarse la energía.

Ecuación del movimiento:

$$m\, \ddot{x} + k(t)\, x = 0$$

Ecuación que proporciona la variación de la energía en el intervalo dt es

$$dE(t) = (1/2)\, x^2\, \dot{k}(t)\, dt$$

Ejemplo n.2

Partícula libre con ligadura dependiente del tiempo.

Energía: $E = (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$; $m = 1$

Ligadura: $(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (1/t) = 0$

De aquí se sigue la relación siguiente:

$$\mathbf{2 E t = 1}$$

Diferenciamos la ecuación anterior:

$$2\, dt\, E + 2\, t\, dE = 0$$

Sustituimos E y dE

$$dt\, (1/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + t(\ddot{x}\, dx + \ddot{y}\, dy + \ddot{z}\, dz) = 0$$

$$(1/2)\{(\dot{x}(\dot{x}\, dt) + \dot{y}(\dot{y}\, dt) + \dot{z}(\dot{z}\, dt)\} + t\, (\ddot{x}\, dx + \ddot{y}\, dy + \ddot{z}\, dz) = 0$$

Sustituimos $\dot{x}\, dt$ por dx, $\dot{y}\, dt$ por dy , $\dot{z}\, dt$ por dz

$$(2\, t\, \ddot{x} + \dot{x})\, dx + (2\, t\, \ddot{y} + \dot{y})\, dy + (2\, t\, \ddot{z} + \dot{z})\, dz = 0$$

Ahora hemos eliminado dt y, al ser dx, dy, dz independientes, podemos obtener las ecuaciones del movimiento

$$\ddot{x} = -(1/2\, t)\, \dot{x}; \qquad \ddot{y} = -(1/2\, t)\, \dot{y}; \qquad \ddot{z} = -(1/2\, t)\, \dot{z}$$

Mostrar el artículo : “Several examples of nonholonomic mechanical systems”

MECÁNICA RELATIVISTA

El método de Leibniz-Cartan permite estudiar sistemas formados por una partícula sobre la que actúa una fuerza que se mantiene siempre sobre una línea recta. Ejemplo notable es el oscilador armónico lineal que consideraremos a continuación. Para aplicar dicho método tenemos que sustituir la energía cinética clásica por la energía cinética relativista.

Datos:

$$E = \gamma\, m_0\, c^2$$

$$\gamma = (1-(v^2/c^2))^{(-1/2)} \text{ (Factor de Lorentz)}$$

m_0 = masa en reposo

Diferencial de γ

$$d\gamma = \gamma^3\, (\dot{x}\, d\dot{x} + \dot{y}\, d\dot{y} + \dot{z}\, d\dot{z})\, /c^2$$

Ejemplo n.1

Partícula libre que se mueve a lo largo del eje x

SISTEMA DE PFAFF

Energía: $E = \gamma\, m_0\, c^2$

Ligaduras: $dx = \dot{x}\, dt$; $d\dot{x} = \ddot{x}\, dt$

Diferencial de la energía:

$$dE = ((\gamma^3\, \dot{x}\, d\dot{x})/c^2)\, m_0\, c^2 = m_0\, \gamma^3\, \ddot{x}\, dx$$

Como el sistema es conservativo $dE = 0$

La ecuación del movimiento es:

$$m_0\, \gamma^3\, \ddot{x} = 0$$

Ejemplo n.2

Oscilador armónico lineal

SISTEMA DE PFAFF

Energía: $E = \gamma\, m_0 c^2 + (1/2)\, k x^2$

Ligaduras: $dx = \dot{x}\, dt$; $d\dot{x} = \ddot{x}\, dt$

Diferencial de la energía:

$$dE = ((\gamma^3 \dot{x}\, d\dot{x})/c^2)\, m_0 c^2 + k x\, dx = 0$$

$$dE = (m_0 \gamma^3 \ddot{x} + k x)\, dx = 0$$

La ecuación del movimiento es:

$$m_0 \gamma^3 \ddot{x} + k x = 0$$

Ejemplo n.3

Oscilador armónico dependiente del tiempo

SISTEMA DE PFAFF

Energía: $E= \gamma\, m_0\, c^2 + (1/2)\, k(t)\, x^2$

Ligaduras: $dx = \dot{x}\, dt$; $d\dot{x} = \ddot{x}\, dt$

Diferencial de la energía:

$$dE = ((\gamma^3\, \dot{x}\, d\dot{x})/c^2)\, m_0\, c^2 + k(t)\, x\, dx + (1/2) x^2 dk(t)$$

La ecuación del movimiento es:

$$m_0\, \gamma^3\, \ddot{x} + k(t)\, x = 0$$

Para obtener esta ecuación se utiliza el mismo razonamiento que en el sistema clásico.

Ecuación que proporciona la variación de la energía en el intervalo dt es:

$$dE(t) = (1/2)\, x^2\, \dot{k}(t)\, dt$$

ARTÍCULOS PUBLICADOS

1.MÉTODO DE LEIBNIZ-CARTAN PARA OBTENER LA EVOLUCION DE LA ENERGÍA A LO LARGO DEL TIEMPO EN SISTEMAS MECÁNICOS CLÁSICOS Y SISTEMAS MECÁNICOS RELATIVISTAS

2.MÉTODO DE LEIBNIZ-CARTAN II. CONCLUSIÓN

3.MÉTODO DE LEIBNIZ-CARTAN III. COMPLEMENTOS