Tema III

NORMAS VECTORIALES Y PRODUCTO ESCALAR

Objetivos

- ✓ Generalizar conceptos como el de norma de un vector, distancia, ortogonalidad y ángulo entre dos vectores. En este capítulo, el cuerpo $\mathbb{K}$ de escalares será $\mathbb{R}$.

III.1. NORMA VECTORIAL

Definición. Sea E un espacio vectorial definido sobre el cuerpo de los números reales. Se llama *norma* sobre E, a una aplicación

$$\|\cdot\| : \quad E \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^+$$

tal que a cada vector **x** de E le asigna un número real no negativo, llamado norma de **x** que se denota $\|\mathbf{x}\|$, y que verifica los siguientes axiomas:

1- $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \ \forall \ \mathbf{x} \in E$ y $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2- $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \ \|\mathbf{x}\| \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall\mathbf{x} \in E$, donde $|\lambda|$ representa el valor absoluto de λ.

3- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \qquad \forall\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (*desigualdad triangular*).

La tercera condición, se llama *desigualdad triangular* porque es una generalización del hecho de que la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados.

Definición. El par (E, ||·||) se llama *Espacio Vectorial Normado*.

Ejercicio

Sea E_{2x2} = {A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ / $a_{ij} \in \mathbb{R}$ }. Se considera la aplicación :

$$T: E_{2x2} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad T(A) = (a_{11})^2$$

Comprobar si es norma. ◄

Se muestran a continuación las 3 normas sobre $\mathbb{R}^n$ más comúnmente usadas en las aplicaciones.

Definición. Para vectores **x** = $(x_1\ x_2\ ...\ x_n)^T$ de $\mathbb{R}^n$ se definen las siguientes normas:

Norma euclídea:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Norma del valor absoluto:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Norma del supremo:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = max \{ |x_1| , |x_2| , ... , |x_n| \}$$

Ejemplo

Sea **x** = $(-5\ 3\ -2)^T$. Entonces

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |-5| + |3| + |-2| = 10$$
$$\|\mathbf{x}\|_2 = (|-5|^2 + |3|^2 + |-2|^2)^{1/2} = 38^{1/2}$$ ◄
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max \{| -5|, |3|, |-2|\} = 5$$

Se puede demostrar que $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ y $\|\mathbf{x}\|_\infty$ son normas, sin más que comprobar que verifican los axiomas anteriormente citados. En el caso de $\|\mathbf{x}\|_2$, para demostrar que verifica la desigualdad triangular se empleará un importante resultado conocido como la desigualdad de Schwartz, que se estudiará en la sección III.3.

Definición (opcional). Si (E, $\|\cdot\|$) es un espacio vectorial normado, puede definirse una aplicación

$$\begin{array}{llll} d: & E\mathrm{x}E & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \rightarrow & d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \end{array}$$

que, como fácilmente puede comprobarse, verifica los axiomas correspondientes que hacen de *d* una distancia definida sobre E. Se le denomina *distancia inducida por la norma* $\|\cdot\|$.

Ejemplo

Si E=$\mathbb{R}^n$, las distancias inducidas por las tres normas vistas son:

$$d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \qquad (\text{ distancia euclídea })$$

$$d_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$d_\infty(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|, \ldots, |x_n-y_n|\}$$ ◄

III.2. PRODUCTO ESCALAR

Definición. Sea E un espacio vectorial real. Se llama *producto escalar o interior* a toda aplicación

$$\begin{array}{lll} E\mathrm{x}E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \rightarrow & <\mathbf{x},\mathbf{y}> \end{array}$$

que verifique los siguientes axiomas

1. $<\mathbf{x},\mathbf{x}> \ \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in E \qquad \wedge \qquad <\mathbf{x},\mathbf{x}> = 0 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Positividad)

2. $< \mathbf{x},\mathbf{y} > \; = \; < \mathbf{y},\mathbf{x} > \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$ (Simetría)

3. $< \mathbf{x}, (\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z}) > \; = \alpha < \mathbf{x},\mathbf{y} > + \, \beta < \mathbf{x},\mathbf{z} > \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in E \;\; \wedge \;\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Bilinealidad)

Al par formado por un espacio vectorial real y un producto escalar se le llama *espacio euclídeo*.

Para denotar el producto escalar de dos vectores **x** e **y**, además de $< \mathbf{x} , \mathbf{y} >$ se suele utilizar también $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ o $(\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y})$.

Ejemplos

- El producto escalar usual entre los vectores libres del espacio, definido de forma que dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, les asocia el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman

$$< \vec{u} , \vec{v} > = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos (\vec{u} , \vec{v})$$

cumple los axiomas de producto escalar.

- La aplicación que a dos n-tuplas de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

asocia

$$< \mathbf{x},\mathbf{y} > = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$$

es un producto escalar, que se denomina *producto escalar canónico o usual* en $\mathbb{R}^n$. ◄

Definición. Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar. Dos vectores **x** e **y** no nulos de E se dice que son ortogonales si $< \mathbf{x},\mathbf{y} > \; = 0$.

III.3. PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR. DESIGUALDAD DE SCHWARTZ

Sea E un espacio vectorial en el que se ha definido un producto escalar. Entonces

1. $\forall \mathbf{y} \in E$: $\quad < \mathbf{0}, \mathbf{y} > \; = \; < \mathbf{y}, \mathbf{0} > \; = 0$

   Demostración (opcional).

   $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \quad < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \; = \; < (\mathbf{x}+\mathbf{0}) , \mathbf{y} > \; = \; < \mathbf{x}, \mathbf{y} > + < \mathbf{0}, \mathbf{y} > \;\Rightarrow\; < \mathbf{0}, \mathbf{y} > \; = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in E$

2. Si $\forall \mathbf{y} \in E \quad < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \; = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{0}$

   Demostración (opcional).

   Si $\forall \mathbf{y} \in E \quad < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \; = 0 \;\Rightarrow$ como $\mathbf{x} \in E$, $< \mathbf{x}, \mathbf{x} > \; = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

3. Desigualdad de Schwartz: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E: \; \left| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \right| \le \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} \cdot \sqrt{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >}$

   Demostración (opcional). Si $\mathbf{x}$ o $\mathbf{y}$ son el vector $\mathbf{0}$, la desigualdad se cumple trivialmente. Se hará, pues, la demostración suponiendo que ambos son no nulos. Si se considera el vector $\mathbf{z}$ de E, $\quad \mathbf{z} = \mathbf{x} - \dfrac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} \mathbf{y}$, se tiene:

$$0 \le < \mathbf{z}, \mathbf{z} > = \left(\mathbf{x} - \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} \mathbf{y} \right) \cdot \left(\mathbf{x} - \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} \mathbf{y} \right) =$$

$$= < \mathbf{x}, \mathbf{x} > - \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} < \mathbf{x}, \mathbf{y} > - \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} < \mathbf{y}, \mathbf{x} > + \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} \cdot \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} < \mathbf{y}, \mathbf{y} > =$$

$$= < \mathbf{x}, \mathbf{x} > - \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >} < \mathbf{y}, \mathbf{x} > = < \mathbf{x}, \mathbf{x} > - \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >}$$

   Teniendo en cuenta que $< \mathbf{y}, \mathbf{x} > \; = \; < \mathbf{x}, \mathbf{y} >$, se tiene

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >^2 \le < \mathbf{x}, \mathbf{x} > \cdot < \mathbf{y}, \mathbf{y} > \quad \Rightarrow \quad \left| < \mathbf{x}, \mathbf{y} > \right| \le \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >} \cdot \sqrt{< \mathbf{y}, \mathbf{y} >}$$

III.4. NORMA INDUCIDA POR UN PRODUCTO ESCALAR

Proposición. Sea E un espacio vectorial real dotado de un producto escalar. La aplicación de E en $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ (\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) & \rightarrow & \sqrt{<\mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}>} \end{array}$$

que a cada elemento del espacio euclídeo **x** le asocia el escalar $\sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>}$ es una norma sobre E, que se denomina *norma asociada al producto escalar* $<\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}>$.

Demostración. Se comprueba fácilmente que dicha aplicación cumple los axiomas de norma:

1. $\|\mathbf{x}\|\geq 0 \quad \forall \mathbf{x}\in \mathrm{E} \quad \wedge \quad \|\mathbf{x}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=0$

La primera parte es evidente por ser la raíz positiva. Y en cuanto a la segunda parte

$$\|\mathbf{x}\|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{<\mathbf{x}\,,\mathbf{x}>}=0 \quad \Leftrightarrow \quad <\mathbf{x},\mathbf{x}>=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}=0$$

2. $\|\lambda\,\mathbf{x}\| = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\| \quad \forall\, \mathbf{x}\in \mathrm{E} \quad \wedge \quad \forall\, \lambda\in\mathbb{R}$

$$\|\lambda\,\mathbf{x}\|=\sqrt{<\lambda\mathbf{x}\,,\lambda\mathbf{x}>}=\sqrt{\lambda^2<\mathbf{x}\,,\mathbf{x}>} = |\lambda|\cdot\|\mathbf{x}\|$$

3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in \mathrm{E}$

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 =<(\mathbf{x}+\mathbf{y}),(\mathbf{x}+\mathbf{y})>=<\mathbf{x},\mathbf{x}>+<\mathbf{x},\mathbf{y}>+<\mathbf{y},\mathbf{x}>+<\mathbf{y},\mathbf{y}> =$$

$$= <\mathbf{x},\mathbf{x}> +2<\mathbf{x},\mathbf{y}> + <\mathbf{y},\mathbf{y}>$$

por otra parte

$$\left(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|\right)^2 =<\mathbf{x},\mathbf{x}>+2\sqrt{<\mathbf{x}\,,\mathbf{x}>}\sqrt{<\mathbf{y}\,,\mathbf{y}>}+<\mathbf{y},\mathbf{y}>$$

teniendo en cuenta la desigualdad de Schwartz se cumple que

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 \leq \left(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

De donde se puede concluir que todo producto escalar tiene una norma asociada.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^n$, la norma inducida por el producto escalar usual

$$< \mathbf{x},\mathbf{y}> = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$$

es

$$\| \mathbf{x} \| = < \mathbf{x},\mathbf{x} >^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

que es la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$. ◄

Opcional: Ahora bien, no toda norma ha de proceder de un producto escalar. La condición necesaria y suficiente para que una norma proceda de un producto escalar es que se verifique la *Ley del Paralelogramo*:

$$\| \mathbf{x}+\mathbf{y} \|^2 + \| \mathbf{x}-\mathbf{y} \|^2 = 2\left(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 \right) \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y}\, \varepsilon\, \mathrm{E}$$

Definición. Sea E un espacio euclídeo, y sean **x** e **y** dos vectores de E no nulos. Se llama *ángulo formado* por **x** e **y** al ángulo cuyo coseno es

$$\frac{< \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y} >}{\| \mathbf{x} \|\, \| \mathbf{y} \|}$$

donde $\| \mathbf{x} \|$ y $\| \mathbf{y} \|$ representan la norma inducida por el producto escalar definido en E, es decir, $\sqrt{< \mathbf{x},\mathbf{x} >}$ y $\sqrt{< \mathbf{y},\mathbf{y} >}$, respectivamente.

Nótese que por la desigualdad de Schwartz, este cociente siempre es un número real comprendido entre -1 y 1.

En el caso de considerar el espacio vectorial de los vectores libres, esta definición coincide con la de ángulo geométrico. En un espacio vectorial cualquiera si **x**=**y** el ángulo correspondiente es 0º, y si los vectores son ortogonales, es decir si <**x**,**y**>=0, el ángulo formado por **x** e **y** es 90º.

III.5. EXPRESIÓN MATRICIAL DEL PRODUCTO ESCALAR. CAMBIO DE BASE

III.5.1. Expresión matricial del producto escalar

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita *n* dotado de un producto escalar, y sea B={$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e}_n$} una base de E. Sean **x** e **y** dos vectores de E, que se expresan en la base B de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \dots + x_n\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{y} = y_1\mathbf{e_1} + y_2\mathbf{e_2} + \dots + y_n\mathbf{e}_n$$

es decir, tales que

$$\mathbf{x_B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y_B} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Entonces el producto escalar de **x** e **y** puede expresarse de la forma siguiente:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = < (x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \dots + x_n\mathbf{e}_n), (y_1\mathbf{e_1} + y_2\mathbf{e_2} + \dots + y_n\mathbf{e}_n) > =$$

$$\begin{aligned} &= x_1y_1 <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> + x_1y_2 <\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> + \dots + x_1y_n <\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}> + \\ &\quad x_2y_1 <\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}> + x_2y_2 <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> + \dots + x_2y_n <\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}> + \\ &\quad \vdots \\ &\quad x_ny_1 <\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}> + x_ny_2 <\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}> + \dots + x_ny_n <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}> = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} <\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}> & \dots & <\mathbf{e_1},\mathbf{e_n}> \\ <\mathbf{e_2},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}> & \dots & <\mathbf{e_2},\mathbf{e_n}> \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ <\mathbf{e_n},\mathbf{e_1}> & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_2}> & \dots & <\mathbf{e_n},\mathbf{e_n}> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} > = \mathbf{x_B}^T \cdot G_B \cdot \mathbf{y_B} \qquad (1)$$

A la matriz $G_B = \left(<\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j>\right)_{nxn}$ se le llama *matriz del producto escalar en la base B*. G_B es simétrica.

Observaciones:

1. Se demostrará posteriormente que G_B es equivalente (y más concretamente

congruente) con la matriz unidad. Por lo tanto G_B siempre es regular.

2. Los elementos de la diagonal principal de G_B siempre son positivos, ya que dichos elementos son: $<\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}>$, $<\mathbf{e_2},\mathbf{e_2}>$, … $<\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_n>$, los cuales han de ser >0 por el primer axioma del producto escalar.

III.5.2. Cambio de base: relación entre la matriz del producto escalar en bases distintas

Si se considera en el espacio vectorial E otra base $B'=\{\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\ldots,\mathbf{e'}_n\}$, los vectores **x** e **y** se expresarán en esta base como

$$\mathbf{x} = x'_1\,\mathbf{e'_1} + x'_2\,\mathbf{e'_2} + \ldots + x'_n\,\mathbf{e'_n} \qquad \wedge \qquad \mathbf{y} = y'_1\,\mathbf{e'_1} + y'_2\,\mathbf{e'_2} + \ldots + y'_n\,\mathbf{e'_n}$$

es decir

$$\mathbf{x}_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \mathbf{y}_{B'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \ldots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Llamando P a la matriz de paso de B a B' sabemos que la relación entre las coordenadas de **x** e **y** en ambas bases viene dada por

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{P}\cdot\mathbf{x}_{B'} \quad \wedge \quad \mathbf{y}_B = \mathbf{P}\cdot\mathbf{y}_{B'} \qquad (2)$$

Según lo visto en el apartado anterior la expresión del producto escalar relativa a la base B viene dada por la expresión (1)

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = \mathbf{x_B}^T \cdot G_B \cdot \mathbf{y_B}$$

y relativa a la base B' por

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}> = \mathbf{x_{B'}}^T \cdot G_{B'} \cdot \mathbf{y_{B'}} \qquad (3)$$

donde $$\mathbf{G}_{B'} = \begin{pmatrix} <\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_1> & <\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2> & \ldots & <\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_n> \\ <\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_1> & <\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_2> & \ldots & <\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_n> \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ <\mathbf{e}'_n,\mathbf{e}'_1> & <\mathbf{e}'_n,\mathbf{e}'_2> & \ldots & <\mathbf{e}'_n,\mathbf{e}'_n> \end{pmatrix}$$

Pero el producto escalar de dos vectores es un invariante, es decir no depende de la base que se esté considerando en el espacio vectorial, luego (1) y (3) han de ser iguales

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}'}{}^{T} \cdot G_{B'} \cdot \mathbf{y}_{\mathbf{B}'} \;=\; \mathbf{x}_{\mathbf{B}}{}^{T} \cdot G_{B} \cdot \mathbf{y}_{\mathbf{B}} \quad \Rightarrow$$

y sustituyendo (2) en el segundo miembro se tiene

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}'}{}^{T} \cdot G_{B'} \cdot \mathbf{y}_{\mathbf{B}'} \;=\; \mathbf{x}_{\mathbf{B}'}{}^{T} \cdot P^{T} \cdot G_{B} \cdot P \cdot\; y_{B'} \quad \Rightarrow$$

Dado que la matriz asociada a un producto escalar en una base es única, se tiene que

$$G_{B'} = P^{T}\, G_{B}\, P$$

Se dice que las matrices $G_{B'}$ y G_B son *congruentes*. Como se ve, la congruencia de matrices es un caso particular de la equivalencia (ver Apartado I.5) donde $Q=P^T$.

III.6. VECTORES ORTOGONALES, NORMADOS Y ORTONORMADOS.

Sea E un espacio vectorial dotado de un producto escalar.

Definición. Un sistema S={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, …,$\mathbf{u}_p$} de vectores de E que no incluya al vector **0** es un *sistema ortogonal* si todos sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, si $<\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j>= 0 \;\; \forall i\neq j$.

Definición. Un sistema S={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,…, $\mathbf{u}_p$} de vectores de E es un *sistema normado* si todos sus vectores tienen norma 1, es decir, si $<\mathbf{u}_i , \mathbf{u}_i>= 1 \quad \forall i = 1,2,\ldots,p$.

Definición. Un sistema S={$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,…, $\mathbf{u}_p$} de vectores de E es un *sistema ortonormado u ortonormal* si es ortogonal y normado.

Ejemplos

La comprobación de las siguientes afirmaciones se deja al alumno como ejercicio.

1- Los vectores $\{ (1\ 0 \ldots 0)^T, (0\ 1 \ldots 0)^T, \ldots, (0\ 0 \ldots 1)^T \}$ son una familia ortonormada de vectores de $\mathbb{R}^n$ para el producto usual.

2- En el espacio de funciones definidas y continuas en el intervalo $[-\pi , \pi]$ considerando el producto escalar

$$< f, g > \; = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

las funciones { 1, sen(x), cos(x), sen($2x$), cos($2x$), ..., sen(px), cos(px) } forman un sistema ortogonal. ◄

Proposición. Si un sistema S={$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ...,$\mathbf{u}_p$} de vectores de E es ortogonal entonces es un sistema libre.

Demostración. Sea S = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ...,$\mathbf{u}_p$} un sistema ortogonal de vectores de E. Supóngase que existen α_1, α_2, ..., α_p escalares de $\mathbb{R}$, tales que

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \ldots + \alpha_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

Si se multiplica escalarmente esta expresión por un vector $\mathbf{u}_j$ de S, se obtiene

$$< (\alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \ldots + \alpha_p \mathbf{u}_p) , \mathbf{u}_j > \; = \; < \mathbf{0} , \mathbf{u}_j > \; = 0 \quad \xRightarrow{\text{por la bilinealidad del producto escalar}}$$

$$\alpha_1 < \mathbf{u_1} , \mathbf{u}_j > + \; \alpha_2 < \mathbf{u_2} , \mathbf{u}_j > + \ldots + \; \alpha_p < \mathbf{u}_p , \mathbf{u}_j > \; = \; \alpha_j < \mathbf{u}_j , \mathbf{u}_j > \; = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \alpha_j = 0$$

Repitiendo el proceso para $j \in \{1,2,\ldots,p\}$, se obtiene

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$$

Es decir, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, ...,$\mathbf{u}_p$ son linealmente independientes.

III.7. MÉTODO DE ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

Como se ha dicho anteriormente el producto escalar de dos vectores es un invariante que no depende de la base que se esté considerando en el espacio vectorial E. Ahora bien, al cambiar la base del espacio vectorial cambia la expresión del producto escalar (en concreto G).En muchos casos es conveniente considerar en el espacio vectorial una base en la cual la expresión del producto se simplifique lo máximo posible, lo cual sucede cuando la base es ortonormada (entonces G = I_n). En este apartado se va a estudiar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt que permite obtener a partir de una familia de vectores linealmente independientes una familia ortogonal (y, por lo tanto, a partir de una base cualquiera de un espacio vectorial, una base ortogonal). Existen otros métodos para obtener bases ortogonales.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita *n*, y sea B = { $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ } una base de E; a partir de ella se obtiene la base ortogonal B′ = { $\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \ldots, \mathbf{e'_n}$ } de la forma siguiente

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e_1} \\
&\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e_2} + \alpha\mathbf{e}'_1 \;\; / \quad <\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_1>=0 && \lambda \in \mathbb{R} \\
&\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e_3} + \beta\mathbf{e}'_2 + \gamma\mathbf{e}'_1 \;\; / \quad \begin{cases} <\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_2>=0 \\ <\mathbf{e}'_3,\mathbf{e}'_1>=0 \end{cases} && \beta,\gamma \in \mathbb{R} \\
&\vdots \\
&\mathbf{e}'_n = \mathbf{e}_n + \lambda\mathbf{e}'_{n\text{-}1} + \ldots + \psi\mathbf{e}'_1 \;\; / \quad <\mathbf{e}'_n,\mathbf{e}'_k>=0 \quad k=1,\ldots,n-1 && \lambda,\psi \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Si se requiere una base ortonomada basta con tomar B* = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$,..., $\mathbf{u}_n$}, siendo

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{e}_i'}{\left\|\mathbf{e}_i'\right\|} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Donde $\left\|\mathbf{e}_i'\right\|$ representa la norma inducida por el producto escalar considerado, es decir, $\sqrt{<\mathbf{e}'_i,\mathbf{e}'_i>}$.

Ejemplo

A partir de los vectores linealmente independientes {$\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$} aplicar el método de Gram-Schmidt para obtener una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto del producto escalar ususal.

$$\mathbf{e_1} = (\,1\;1\;\text{-}1\,)^T \qquad \mathbf{e_2} = (\,\text{-}1\;2\;2\,)^T \qquad \mathbf{e_3} = (\,1\;2\;0\,)^T$$

Solución.

$\mathbf{e'_1} = \mathbf{e_1} = (\,1\;1\;\text{-}1\,)^T$

$\mathbf{e'_2} = \mathbf{e_2} + \alpha\,\mathbf{e'_1} = (\,\text{-}1\;2\;2\,)^T + \alpha\,(\,1\;1\;\text{-}1\,)^T = (\,\text{-}1+\alpha\;\;2+\alpha\;\;2\text{-}\alpha\,)^T$ /

$$<\mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_1}> = 0 \;\Rightarrow\; (\text{-}1+\alpha)\cdot 1 + (2+\alpha)\cdot 2 + (2\text{-}\alpha)\cdot(\text{-}1) = 0 \;\Rightarrow\; 3\alpha\text{-}1 = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \quad \mathbf{e'_2} = \left(-\frac{2}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{5}{3}\right)^T$$

$\mathbf{e'_3} = \mathbf{e_3} + \beta\, \mathbf{e'_2} + \gamma\, \mathbf{e'_1} = (1\ 2\ 0)^T + \beta \left(-\frac{2}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{5}{3}\right) + \gamma\,(1\ 1\ {-1})^T =$

$$= \left(1 - \frac{2}{3}\beta + \gamma \quad 2 + \frac{7}{3}\beta + \gamma \quad \frac{5}{3}\beta - \gamma\right)^T \quad / \quad \begin{cases} < \mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_1} > = 0 \\ < \mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_2} > = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} < \mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_1} > = 0 \Rightarrow \\ \quad \left(1 - \frac{2}{3}\beta + \gamma\right) \cdot 1 + \left(2 + \frac{7}{3}\beta + \gamma\right) \cdot 1 + \left(\frac{5}{3}\beta - \gamma\right) \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \\ \quad 3 + 3\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1 \\ < \mathbf{e'_3}, \mathbf{e'_2} > = 0 \Rightarrow \\ \quad \left(1 - \frac{2}{3}\beta + \gamma\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(2 + \frac{7}{3}\beta + \lambda\right) \cdot \frac{7}{3} + \left(\frac{5}{3}\beta - \gamma\right) \cdot \frac{5}{3} = 0 \Rightarrow \\ \quad 4 + \frac{78}{9}\beta = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{6}{13} \end{cases}$$

$$\mathbf{e'_3} = \left(\frac{4}{13} \quad -\frac{1}{13} \quad \frac{3}{13}\right)^T$$

Si quisiéramos un sistema ortonormado de vectores {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$} dividiríamos cada vector entre su norma (la inducida por el producto escalar usual, en este caso)

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{e}'_1}{\|\mathbf{e}'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 \quad 1 \quad -1\right)^T$$

$$\|\mathbf{e}'_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{e}'_2}{\|\mathbf{e}'_2\|} = \frac{3}{\sqrt{78}} \left(-\frac{2}{3} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{5}{3}\right)^T = \frac{1}{\sqrt{78}} \left(-2 \quad 7 \quad 5\right)^T$$

$$\|\mathbf{e}'_2\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{78}}{3}$$

$$\mathbf{u_3} = \frac{\mathbf{e}_3'}{\left\|\mathbf{e}_3'\right\|} = \frac{13}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}\frac{4}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{3}{13}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}4 & -1 & 3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\left\|\mathbf{e}_3'\right\| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(-\frac{1}{13}\right)^2 + \left(\frac{3}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

Tema III. Ejercicios

III.1. Sea C [a,b] = {f: [a,b] $\longrightarrow \mathbb{R}$ / f continua} , y sean x_1 , x_2 , . . . , x_m *m* puntos de [a,b] . Se considera la aplicación:

$$\|\ \| : C\,[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} /\ \| f \| = | f(x_1) | + | f(x_2) | + \ldots + | f(x_m) |$$

¿Es dicha aplicación norma? . Estudiar qué propiedades fallan.

III.2. Sea C [0,1] = {f: [0,1] $\longrightarrow \mathbb{R}$ / f continua} . Se considera la aplicación :

$$\|\ \|_\infty : C\,[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} /\ \| f \|_\infty = \max_{x\in[0,1]} \left| f(x) \right|$$

¿ Es dicha aplicación norma?. Estudiar qué propiedades fallan.

III.3. Dadas las aplicaciones siguientes, discutir si son normas:

a) $\|\ \|_1 : E_{nxn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} /\ \| A \|_1 = \det(A)$

b) $|\ \|_2 : E_{nxn}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} /\ \| A \|_2 = n^{*}\max | a_{ij} |$

III.4. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar que referido a la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se define mediante la matriz $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Estudiar si $\mathbb{R}^3$ con el producto anterior es un espacio euclídeo.

b) Calcular la norma del vector $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$.

c) Considérese el subespacio $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / y = 0 \right\}$. Dar una base ortonormal del mismo.

d) Demostrar que los vectores

$$\left\{x=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}^T / a=<\mathbf{x},\mathbf{e_1}>, b=<\mathbf{x},\mathbf{e_2}>, c=<\mathbf{x},\mathbf{e_3}>\right\}$$

forman un subespacio vectorial y dar una base del mismo.

III.5. Sea $\mathrm{B}=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}\}$ una base de un espacio euclídeo E bidimensional, y sean **x** e **y** dos vectores de E, cuyos vectores coordenados referidos a la base son $\mathbf{x_B}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y_B}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ y cuyo producto escalar viene definido por:

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>=4x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$$

a) Probar que se cumplen los axiomas de producto escalar.

b) Hallar la matriz G que caracteriza el producto escalar en la base B y las normas y ángulos que forman los vectores de dicha base.

c) Hallar la matriz del producto escalar referida a una nueva base $\mathrm{B}'=\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\right\}$, donde los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ están referidos a la base B.

d) Sean $\mathbf{x_B}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y_B}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, dos vectores referidos a la base B. Hallar $<\mathbf{x},\mathbf{y}>$ utilizando las expresiones matriciales en B y en B'.

III.6. Demostrar que en el espacio vectorial de las funciones reales $x(t)$ continuas en el intervalo -1 ≤ t ≤1, la expresión $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\int_{-1}^{1}t^2x(t)y(t)dt$ define un producto escalar.

a) Hallar el ángulo formado por los vectores $x(t)=1$ e $y(t)=t$

b) ¿Para qué valor de a serán ortogonales los vectores $x(t)=t+a$ e $y(t)=t-a$?

c) Ortonormalizar el conjunto $\{1, t, t^2\}$

III.7. Sea $G=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ la matriz que define el producto escalar en la base $B=\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3}\}$ de un espacio euclídeo.

a) Calcular las normas de los vectores de la base B.

b) Calcular los cosenos de los ángulos que forman entre sí los vectores de la base B.

III.8. Sea E un espacio euclídeo tridimensional y sea $B=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\}$ una base del mismo tal que siendo $\mathbf{u}=\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}$ se cumple que:

$$<\mathbf{u},\mathbf{u}>=14 \qquad \mathbf{e_3} \text{ es ortogonal a } \mathbf{e_1}$$

$$<\mathbf{u},\mathbf{e_1}>=4 \qquad cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$<\mathbf{e_1},\mathbf{e}_1>=<\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2> \qquad <\mathbf{e}_3,\mathbf{e_3}>=3$$

a) Obtener la expresión matricial del producto escalar en la base B.

b) Por el método de ortogonalización de Gram-Schmidt obtener una base ortonormada B^*para el producto escalar.

c) Calcular la matriz de paso P de la base B a la base B^*.

d) Hallar la expresión matricial del producto escalar en la base B^*.

III.9. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a la base canónica se definen los subespacios:

$$S_1=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} / x_1-x_2-x_3=0 \ \wedge \ 2x_1-2x_2+3x_3=0\right\}$$

$$S_2=\left\{\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} / x_1+x_2-x_3=0\right\}$$

Hallar una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormada en la que, si es posible, uno de los vectores de la misma pertenezca a S_1 y otro pertenezca a S_2.

III.10. Sea E un espacio vectorial de dimensión 3, y sea $\mathrm{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ una base de E. Se define un producto escalar de forma que $<\mathbf{e}_i\,,\mathbf{e}_j>=\text{mínimo}\{4-i,4-j\}$

a) Hallar la matriz del producto escalar en la base B.

b) Hallar una base ortogonal.

III.11. En un espacio vectorial E de dimensión 3 y referido a una base $\mathrm{B}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ se define un producto escalar mediante la matriz $\mathrm{G}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&16\end{pmatrix}$.

Determinar una base de E ortonormal respecto de dicho producto escalar.

Tema III. Soluciones Ej.

III.1. No es norma. Falla el primer axioma.

III.2. Sí es norma

III.3.

a) No es norma. Fallan todos los axiomas.

b) Sí es norma.

III.4. Sí tiene estructura de espacio euclídeo.

a) $\cdots$

b) $\|\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\| = 2$

c) $B_U^* = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

d) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

III.5.

a) ...

b) $G = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{e}_1\| = 2, \|\mathbf{e}_2\| = 1, \alpha = \frac{\pi}{3}$

c) $G^* = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 3 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$

d) $<\mathbf{x}, \mathbf{y}> = 9$

III.6.

a) $\alpha = \frac{\pi}{2}$

b) $a=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

c) $\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{5}{2}}t,\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^2-\frac{3}{5}\right)\right\}$

III.7.

a) $\|\mathbf{u_1}\|=1, \|\mathbf{u_2}\|=\sqrt{2}, \|\mathbf{u_3}\|=\sqrt{3}$

b) $\cos(\mathbf{u_1},\mathbf{u_2})=\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos(\mathbf{u_1},\mathbf{u_3})=\frac{\sqrt{3}}{3}, \cos(\mathbf{u_2},\mathbf{u_3})=\frac{\sqrt{6}}{3}$

III.8.

a) $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

b) $\mathrm{B}^*=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{21}} \\ -\frac{2}{21} \\ \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}\right\}$

c) $\mathrm{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{2}{21} \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{7}} \end{pmatrix}$

d) $<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

III.9. $B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}^T \right\}$

III.10.

a) $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

III.11. $B^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\}$