Tema IV

APLICACIONES LINEALES

Objetivos

- ✓ Conocer el concepto de aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. Saber comprobar si una determinada transformación es lineal.
- ✓ Saber calcular las imágenes mediante una transformación lineal de un vector o de un subespacio completo.
- ✓ Saber buscar qué vectores se transforman en el vector nulo y qué vectores son la imagen de algún vector.
- ✓ Entender que cada aplicación lineal puede ser representada por una matriz. Saber realizar todo lo anterior trabajando con dicha matriz.

IV.1. DEFINICIÓN DE APLICACION LINEAL. PROPIEDADES.

Definición. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, de dimensiones *n* y *m* respectivamente. Una aplicación f de E en F que asigna a cada vector **x** de E un vector $f(\mathbf{x})$ de F

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \rightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \rightarrow & f(\mathbf{x}) \end{array}$$

es una *aplicación lineal* si verifica las condiciones

$$\begin{array}{ll} I)\forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in E & f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})+ f(\mathbf{y}) \\ II)\forall \mathbf{x}\in E \;\; y \;\; \alpha\in K & f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \end{array}$$

La condición I) indica que la imagen de la suma de dos vectores es la suma de las imágenes.

A veces nos referimos a las aplicaciones lineales como transformaciones lineales.

Ejemplo

Se define la aplicación

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Probar que *f* es lineal.

Solución. Sean $\mathbf{x}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t$ e $\mathbf{y}=(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Comprobemos las condiciones I) y II) de la definición de aplicación lineal.

I) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t+(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t=(x_1+y_1 \quad x_2+y_2 \quad x_3+y_3)^t$

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=(x_1+y_1+x_2+y_2 \quad x_3+y_3)^t=(x_1+x_2 \quad x_3)^t+(y_1+y_2 \quad y_3)^t=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$$

II) $\forall \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ y $\alpha\in\mathbb{K}$ se tiene que como $\alpha\mathbf{x}=\alpha(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t=(\alpha x_1 \quad \alpha x_2 \quad \alpha x_3)^t$,

$f(\alpha\mathbf{x})=(\alpha x_1+\alpha x_2 \quad \alpha x_3)^t=\alpha(x_1+x_2 \quad x_3)^t=\alpha f(\mathbf{x})$ ◄

Ejemplo

Se define la aplicación

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3+1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Veamos si *f* es una aplicación lineal.

Solución.

Sean $\mathbf{x}=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t$ e $\mathbf{y}=(y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$. Comprobemos las dos condiciones I) y II) anteriores.

Dado que $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}^t+\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}x_1+y_1 & x_2+y_2 & x_3+y_3\end{pmatrix}^t$ se tiene que $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\begin{pmatrix}x_1+y_1+x_2+y_2 & x_3+y_3+1\end{pmatrix}^t$

Por otro lado,

$$f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & x_3+1\end{pmatrix}^t+\begin{pmatrix}y_1+y_2 & y_3+1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}x_1+y_1+x_2+y_2 & x_3+y_3+2\end{pmatrix}^t.$$

De donde $f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})\neq f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$, luego *f* no es lineal. ◄

Ejemplo

Sea A una matriz real de tamaño m x n. Probar que la aplicación siguiente es lineal.

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \rightarrow & f(\mathbf{x})=A\cdot\mathbf{x} \end{array}$$

Solución.

Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$ y α un número real. La comprobación de las dos condiciones de linealidad es directa, utilizando las propiedades de las matrices

$$\begin{array}{l} f(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A(\mathbf{x}+\mathbf{y})=A\mathbf{x}+A\mathbf{y}=f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y}) \\ f(\alpha\mathbf{x})=A(\alpha\mathbf{x})=\alpha A\mathbf{x}=\alpha f(\mathbf{x}) \end{array}$$

Por lo tanto, *f* es lineal. ◄

Ejemplo

Sea E un espacio vectorial real y $B=\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\ldots,\mathbf{u_n}\}$ una base de E. Probar que la aplicación coordenada es lineal

$$\begin{array}{rcl} f:E & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} & \rightarrow & f(\mathbf{x})=\mathbf{x}_B \end{array}$$

Solución.

Supóngase que

$$\mathbf{x}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= \left(x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \ldots + x_n\mathbf{u_n}\right) + \left(y_1\mathbf{u_1} + y_2\mathbf{u_2} + \ldots + y_n\mathbf{u_n}\right) = \\ &= (x_1+y_1)\mathbf{u_1} + (x_2+y_2)\mathbf{u_2} + \ldots + (x_n+y_n)\mathbf{u_n} \end{aligned}$$

con lo que

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x_B} + \mathbf{y_B}$$

Es decir $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

Por otro lado

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha\left(x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \ldots + x_n\mathbf{u_n}\right) = \alpha x_1\mathbf{u_1} + \alpha x_2\mathbf{u_2} + \ldots + \alpha x_n\mathbf{u_n}$$

luego

$$(\alpha\mathbf{x})_{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{x_B}$$

y así $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$

En consecuencia, f es una aplicación lineal.

Esta propiedad se sigue verificando si se cambia $\mathbb{R}^n$ por $\mathbb{K}^n$. ◄

Son muchos los ejemplos de aplicaciones lineales definidas entre espacios vectoriales. Así la proyección y la simetría respecto de cualquier eje coordenado son también aplicaciones lineales en el espacio vectorial V^3.

Propiedades de las aplicaciones lineales.

Sea f una aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales E y F sobre $\mathbb{K}$. Entonces:

1) $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E \;\; y \;\; \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$ se tiene que $f(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x})+\mu f(\mathbf{y})$

Por extensión, la propiedad se puede generalizar a cualquier número de sumandos.

2) Si se denota por $\mathbf{0_E}$ el elemento neutro para la suma en E y por $\mathbf{0_F}$ el elemento neutro para la suma en F se tiene que $f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$ puesto que $f(\mathbf{0_E}) = f(0\cdot\mathbf{x}) = 0\cdot f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_F}$

Sin embargo puede haber más elementos de E que tengan por imagen el $\mathbf{0_F}$. Todos ellos constituirán un subespacio, que estudiaremos más adelante y se denominará núcleo de *f*.

3) Si el conjunto $S=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_p}\}$ es linealmente dependiente, entonces el conjunto $f(S)=\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}),\ldots, f(\mathbf{e_p})\}$ es también linealmente dependiente.

Demostración. Si el conjunto $S=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_p}\}$ es linealmente dependiente entonces la combinación nula $\alpha_1\cdot\mathbf{e_1}+\alpha_2\cdot\mathbf{e_2}+\ldots+\alpha_p\cdot\mathbf{e_p}=\mathbf{0_E}$ se cumple con algún $\alpha_i \neq 0$. Sea

$$f\left(\alpha_1\cdot\mathbf{e_1}+\alpha_2\cdot\mathbf{e_2}+\ldots+\alpha_p\cdot\mathbf{e_p}\right) = f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F} = \alpha_1 f(\mathbf{e_1})+\alpha_2 f(\mathbf{e_2})+\ldots+\alpha_p f(\mathbf{e_p})$$

Esto es una relación nula de los $f(\mathbf{e_i})$ con algún $\alpha_i \neq 0$. Luego, $f(S)=\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}),\ldots, f(\mathbf{e_p})\}$ es linealmente dependiente. ■

4) Si $f(S)=\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}),\ldots, f(\mathbf{e_p})\}$ es linealmente independiente, entonces $S=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_p}\}$ es también linealmente independiente.

Demostración. Es evidente por la propiedad anterior, ya que si S es ligado, entonces $f(S)$ también es ligado. ■

5) Si el conjunto $S=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\ldots,\mathbf{e_p}\}$ es linealmente independiente, entonces el conjunto $f(S)=\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}),\ldots, f(\mathbf{e_p})\}$ puede ser o no linealmente dependiente.

Ejemplo

Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} f:\mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \rightarrow & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Consideremos el conjunto de vectores $B=\{(1\ \ 0\ \ 0)^t,(0\ \ 1\ \ 0)^t,(0\ \ 0\ \ 1)^t\}$ de $\mathbb{R}^3$ que es libre. Calculemos $f(B)$:

$f(B)=\{(1\ \ 0)^t,(1\ \ 0)^t,(0\ \ 1)^t\}$ que es un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^2$.

Si ahora se considera el conjunto $U=\{(1\ \ 0\ \ 0)^t,(0\ \ 0\ \ 1)^t\}$ de $\mathbb{R}^3$, se tiene que $f(U)=\{(1\ \ 0)^t,(0\ \ 1)^t\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^2$. ◄

IV.2. IMAGEN Y NUCLEO DE UNA APLICACION LINEA

Sea *f* una aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales E y F, $f:\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{F}$

Definición. Se llama *núcleo de f* al subconjunto de E $Ker\ f=\{\mathbf{x}\in\mathrm{E}\,/\,f(\mathbf{x})=\mathbf{0_F}\}$, es decir, Ker *f* es el conjunto de vectores de E, que tienen como imagen por *f* el vector nulo de F. También se le suele denotar por Nuc *f* ó N(*f*).

el núcleo de una aplicación lineal es un subespacio vectorial de E.

Teorema. El núcleo (Ker *f*) de una aplicación lineal *f* es un subespacio vectorial de E.

Demostración:

Hay que comprobar las tres condiciones de subespacio.

El vector $\mathbf{0_E} \in Ker\, f$ ya que $f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$.

I) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Ker\ f \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in Ker\ f$.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Ker\ f$: De donde: $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \underset{f\ lineal}{=} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \underset{x \in Ker\ f, y \in Ker\ f}{=} \mathbf{0_F} + \mathbf{0_F} = \mathbf{0_F}$

luego, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in Ker\ f$

II) $\forall \mathbf{x} \in Ker\ f \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in Ker\ f$. Sean $\mathbf{x} \in Ker\ f \wedge \alpha \in \mathbb{K}$, luego

$f(\alpha \mathbf{x}) \underset{f\ lineal}{=} \alpha f(\mathbf{x}) \underset{x \in Ker\ f}{=} \alpha \mathbf{0_F} = \mathbf{0_F}$

por lo tanto $\alpha \mathbf{x} \in Ker\ f$.

Queda así demostrado que Ker *f* es un subespacio vectorial de E. ■

Definición. Se llama *imagen de la aplicación lineal f* al subconjunto de F $\mathrm{Im}\ f = \{ f(\mathbf{x}) \in \mathrm{F} / \mathbf{x} \in \mathrm{E} \}$. Es decir, $\mathrm{Im}\ f$ es el subconjunto de F, formado por las imágenes, mediante *f*, de los vectores de E.

Teorema. La imagen (Im *f*) de una aplicación lineal $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es un subespacio vectorial de F.

Demostración:

Hay que comprobar las tres condiciones de subespacio vectorial. Puesto que $f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$, se tiene que Im f contiene al vector nulo.

I) $\forall\, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in \mathrm{Im}\ f \Rightarrow \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} \in \mathrm{Im}\ f$

Sean $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in \mathrm{Im}\ f$ Entonces existen dos vectores $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in E$ tales que

$f(\mathbf{x_1}) = \mathbf{y_1} \quad \wedge \quad f(\mathbf{x_2}) = \mathbf{y_2}$

Como $\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} = f(\mathbf{x_1}) + f(\mathbf{x_2}) \underset{f\ lineal}{=} f(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$

se tiene que $\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} \in \mathrm{Im}\ f$, ya que es imagen por *f* del vector $\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}$ de E.

II) $\forall \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\ f \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\ f$. Sean $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\ f \wedge \alpha \in \mathbb{K}$, luego

$\alpha\mathbf{y} = \alpha f(\mathbf{x}) \underset{f\ lineal}{=} f(\alpha\mathbf{x})$

por lo tanto $\alpha\mathbf{y} \in \mathrm{Im}\ f$.

Queda así demostrado que Im *f* es un subespacio vectorial de F. ■

Observación: La imagen de un subespacio vectorial S de E $f(\mathrm{S}) = \{ f(\mathbf{x}) \in \mathrm{F} / \mathbf{x} \in \mathrm{S} \}$ es un subespacio vectorial de F.

El subespacio imagen más importante es el *f* (E), es decir la imagen de todo el espacio vectorial de E, que se denota, tal y como hemos visto, como Im *f*

Ejemplo

Sea la aplicación lineal

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Siendo $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$. Se pide:

Hallar Ker *f*.

Encontrar los vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ con la misma imagen.

Calcular Im *f*.

Solución:

(i) $\mathbf{x}=\left(\mathrm{x}_1 \quad \mathrm{x}_2 \quad \mathrm{x}_3\right)^{\mathrm{T}} \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1=x_2=0$

Así pues $\operatorname{Ker} f=\left\{\left(0 \quad 0 \quad \mathrm{x}_3\right)^{\mathrm{t}} / \mathrm{x}_3 \in \mathbb{R}\right\}$, siendo $\left\{\left(0 \quad 0 \quad 1\right)^{\mathrm{t}}\right\}$ una base de Ker *f*, y por tanto dim Ker *f* =1

(ii) De la definición de f se deduce que los vectores $\mathbf{u}=\left(1 \quad 1 \quad 1\right)^{\mathrm{t}}$ y $\mathbf{v}=\left(1 \quad 1 \quad 2\right)^{\mathrm{t}}$ cumplen $f(\mathbf{u})=f(\mathbf{v})=\left(2 \quad 0\right)^{\mathrm{t}}$

(iii) Sea $f(\mathbf{x})$ un vector de Im *f* siendo $\mathbf{x}=\left(x_1 \quad x_2 \quad x_3\right)^{\mathrm{t}}$, entonces

$$f(\mathbf{x})=\left(x_1+x_2 \quad x_1-x_2\right)^t=\left(x_1 \quad x_1\right)^t+\left(x_2 \quad -x_2\right)^t=x_1\left(1 \quad 1\right)^t+x_2\left(1 \quad -1\right)^t$$

Luego $\operatorname{Im} f=Span\left\{\left(1 \quad 1\right)^{\mathrm{t}} \quad \left(1 \quad -1\right)^{\mathrm{t}}\right\}$

Puesto que $\left\{\left(1 \quad 1\right)^{\mathrm{t}} \quad \left(1 \quad -1\right)^{\mathrm{t}}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente, es una base de Im *f*, con lo que dim Im *f* = 2, Obsérvese que se cumple la siguiente relación de dimensiones $\dim \mathbb{R}^3=\dim \operatorname{Ker} f+\dim \operatorname{Im} f$. Esto será así en general (ver el Teorema fundamental de las aplicaciones lineales en IV.3). ◄

Definición: Se llama *rango de una aplicación lineal* a la dimensión del subespacio imagen Im *f*: rango *f* = dim *f* (E)= dim Im *f*

Teorema: Sea $f: \mathrm{E} \rightarrow F$ una aplicación lineal. Si $\mathrm{B}=\left\{\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n\right\}$ es una base de E, entonces $f(\mathrm{B})=\left\{f(\mathbf{e}_1) \quad f(\mathbf{e}_2) \quad \cdots \quad f(\mathbf{e}_n)\right\}$ es un sistema generador de *f* (E) (es decir, de Im *f*).

Demostración:

Sea **x** un vector arbitrario de E y $\mathrm{B}=\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \cdots, \mathbf{e_n}\}$ una base de E. Entonces: $x = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}$

Y $f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \cdots + x_n\mathbf{e_n}) = x_1 f(\mathbf{e_1}) + x_2 f(\mathbf{e_2}) + \cdots + x_n f(\mathbf{e_n})$

Luego $\mathrm{Im}\, f = Span\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \cdots, f(\mathbf{e_n})\}$ y por tanto $f(\mathrm{B}) = \{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \cdots, f(\mathbf{e_n})\}$ es un sistema generador de la Im *f* ■

Como consecuencia de este teorema se tiene que $\dim \mathrm{Im}\, f \leq \dim \mathrm{E} = n$.

Observación. Si B es una base de E entonces *f* (B) genera Im *f*, por lo que quedándonos con los vectores linealmente independientes de *f* (B) tendremos una base de Im *f*.

IV.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS APLICACIONES LINEALES

Teorema. Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, siendo E de dimensión finita.

Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal entonces dim E = dim Ker *f* + dim Im *f*

Demostración (opcional):

Sea E un espacio vectorial de dimensión n, y $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p}\}$ una base del Ker *f*, luego dim Ker *f* = *p*. Se probará que dim (Im *f*) = *n* - *p*

Por el Teorema de la Base Incompleta (ya estudiado en el Tema 2), se puede encontrar una base de E de la forma

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{e}_{p+1}, \mathbf{e}_{p+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

Ahora bien, se tiene que

$$\mathrm{Im}\, f = Span\{f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \cdots, f(\mathbf{e_p}), f(\mathbf{e_{p+1}}), \cdots, f(\mathbf{e_n})\}$$

Y como $f(\mathbf{e_i}) = 0_{\mathrm{F}} \quad \forall\, \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, p$

Entonces:

$$\operatorname{Im} f = Span\left\{ f(\mathbf{e_{p+1}}), \quad f(\mathbf{e_{p+2}}), \quad \cdots, \quad f(\mathbf{e_n}) \right\}$$

Veamos que $\left\{ f(\mathbf{e_{p+1}}), \quad f(\mathbf{e_{p+2}}), \quad \cdots, \quad f(\mathbf{e_n}) \right\}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello se construye la combinación lineal nula

$$b_{p+1} f(\mathbf{e_{p+1}}) + b_{p+2} f(\mathbf{e_{p+2}}) + \cdots + b_n f(\mathbf{e_n}) = 0_F$$

Entonces:

$$f(b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$$

Luego el vector $b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n}$ está en Ker *f*, y por tanto es combinación lineal de los vectores de la base de Ker *f*, es decir

$$b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n} = a_1\mathbf{e_1} + a_2\mathbf{e_2} + \cdots + a_p\mathbf{e_p}$$

O equivalentemente

$$-a_1\mathbf{e_1} - a_2\mathbf{e_2} - \cdots - a_p\mathbf{e_p} + b_{p+1}\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\mathbf{e_n} = \mathbf{0_E}$$

y como $\left\{ \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_p}, \mathbf{e_{p+1}}, \mathbf{e_{p+2}}, \ldots, \mathbf{e_n} \right\}$ es una base de E, todos los coeficientes anteriores son nulos. En particular

$$b_{p+1} = b_{p+2} = \cdots = b_n = 0$$

Luego, $\left\{ f(\mathbf{e_{p+1}}), \quad f(\mathbf{e_{p+2}}), \quad \cdots, \quad f(\mathbf{e_n}) \right\}$ es un conjunto linealmente independiente y en consecuencia una base de Im *f*. Claramente dim (Im *f*) = *n* - *p*

Por tanto, dim Ker *f* + dim Im *f* = *p* + (*n* - *p*) = *n*. ■

Si Ker *f* = {$\mathbf{0_E}$}, la demostración del teorema no se empezaría construyendo una base de Ker *f* por no existir, sino que se partiría de una base B arbitraria de E y todo el razonamiento del teorema sería el mismo.

Si Ker *f* = E, entonces Im *f* = {$\mathbf{0_F}$} y se cumple trivialmente que dim Ker f + dim Im f = n + 0 = n.

IV.4. CLASIFICACION DE LAS APLICACIONES LINEALES

Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, y $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal.

Definición. Se dice que:

(i) f es *inyectiva* si $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \,/\, f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(ii) f es *sobreyectiva* si para cualquier vector y de F, se puede encontrar un vector x de E tal que f (**x**) = **y**. $\forall\, \mathbf{y} \in F \Rightarrow \exists\, \mathbf{x} \in E \,/\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

(iii) f es *biyectiva* si f es inyectiva y sobreyectiva. Si f es biyectiva se llama isomorfismo.

De acuerdo con las propiedades vistas al comienzo del tema, las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal. Sin embargo, en general, las aplicaciones lineales no conservan la independencia lineal. Ahora bien, cabría preguntarse si algún tipo determinado de aplicaciones la conserva. La clase de aplicaciones que pueden tener esta propiedad, son sin duda las aplicaciones inyectivas, ya que si un vector tiene antimagen, ésta es única. Los siguientes resultados prueban este comentario.

Teorema (Caracterización de las aplicaciones lineales inyectivas). La condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva es que Ker f = {$\mathbf{0_E}$}.

Demostración (opcional):

$\Rightarrow$) Supóngase que $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal inyectiva.

Sea $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\ f \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_F}$. Además, por ser f lineal se tiene que f ($\mathbf{0_E}$) = $\mathbf{0_F}$.

$$\left.\begin{array}{r} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_F} \\ f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F} \end{array}\right\} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0_E}) \underset{f\ inyectiva}{\Rightarrow} \mathbf{x} = \mathbf{0_E}$$

Como f es inyectiva **x** = $\mathbf{0_E}$. Por tanto Ker f = {$\mathbf{0_E}$}.

$\Leftarrow$) Sea Ker f = ($\mathbf{0_E}$). Se va a demostrar que entonces f es inyectiva. Sean $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E\,/\,f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y})$ o equivalentemente $f(\mathbf{x})-f(\mathbf{y})=\mathbf{0_F}$, y por ser f lineal $f(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\mathbf{0_F}$. Luego $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in Ker\ f=\{\mathbf{0_E}\}$,de donde **x** - **y** = {$\mathbf{0_E}$}, y por tanto **x** = **y**. Luego, f es inyectiva. ■

Nótese que como consecuencia del teorema anterior, si E y F son dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ es una aplicación lineal inyectiva, entonces $\dim\mathrm{E}\le\dim\mathrm{F}$.

Teorema. Si $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ es una aplicación lineal inyectiva y $\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p}\}$ es un conjunto de vectores de E linealmente independientes, entonces $\{f(\mathbf{e_1}),\ f(\mathbf{e_2}),\ \cdots\ f(\mathbf{e_p})\}$ son también linealmente independientes en F.

Demostración:

Sea $\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p}\}$ un conjunto de vectores de E.

La combinación lineal nula $\alpha_1 f(\mathbf{e_1})+\alpha_2 f(\mathbf{e_2})+\cdots+\alpha_p f(\mathbf{e_p})=\mathbf{0_F}$ puede escribirse como $f(\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\cdots+\alpha_p\mathbf{e_p})=\mathbf{0_F}$. Luego $\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\cdots+\alpha_p\mathbf{e_p}\in\mathrm{Ker}\ f$

y por ser f inyectiva, Ker f = ($\mathbf{0_E}$), de donde

$$\alpha_1\mathbf{e_1}+\alpha_2\mathbf{e_2}+\cdots+\alpha_p\mathbf{e_p}=\mathbf{0_E}$$

Como los vectores $\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p}\}$ son linealmente independientes, entonces $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$

Por tanto $\{f(\mathbf{e_1}),\ f(\mathbf{e_2}),\ \cdots\ f(\mathbf{e_p})\}$ son linealmente independientes. ■

Teorema (Caracterización de las aplicaciones lineales sobreyectivas).

Sea $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que f sea sobreyectiva es que Im f = F.

Demostración (opcional):

$\Rightarrow$) Supóngase que $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal sobreyectiva, es decir, para cualquier vector **y** de F se puede encontrar un vector **x** de E tal que f (**x**) = **y**. Luego Im f = F.

$\Leftarrow$) Sea **y** un vector de F = Im f, entonces existe un vector $\mathbf{x} \in \mathrm{E}$ tal que f (**x**) = **y** ■

Si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal sobreyectiva, y E y F son dos espacios vectoriales de dimensión finita, se sigue, del teorema anterior, que $\dim \mathrm{E} \geq \dim \mathrm{F}$.

Corolario: Sea $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ una aplicación lineal. La condición necesaria y suficiente para que f sea biyectiva es que $\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0_E}\}$ e Im f = F.

Como consecuencia de este corolario, se deduce que, si E y F son dos espacios vectoriales de dimensión finita y $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ es una aplicación lineal biyectiva, entonces dim E = dim F.

Recíprocamente, si dim E = dim F, entonces la aplicación lineal $f: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, cumple:

a) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva ($\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0_E}\}$)

b) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es sobreyectiva (Im f = F).

Definición: Si la aplicación lineal está definida de un espacio vectorial E en sí mismo, $f: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, recibe el nombre de *endomorfismo*.

Corolario: Según lo anteriormente expuesto, si $f: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ endomorfismo y la dim E es finita, entonces se cumple que

a) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es inyectiva ($\mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0_E}\}$)

b) f es biyectiva $\Leftrightarrow$ es sobreyectiva (Im f = E).

IV.5. EXPRESION MATRICIAL DE UNA APLICACION LINEAL. CAMBIO DE BASE.

IV.5.1. Expresión matricial de una aplicación lineal

En este apartado se va a calcular la imagen de un vector **x** de E en función de las coordenadas de dicho vector respecto a una base de E.

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea f una aplicación lineal definida entre E y F. Sean $U=\{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \cdots,\ \mathbf{u_n}\}$ y $V=\{\mathbf{v_1},\ \mathbf{v_2},\ \cdots,\ \mathbf{v_m}\}$ bases de E y F, respectivamente.

Si **x** es un vector de E, entonces

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{u_1}+x_2\mathbf{u_2}+\cdots+x_n\mathbf{u_n}$$

con lo que $\mathbf{x}_{\mathrm{U}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Entonces, la imagen de **x** puede expresarse de la forma siguiente

$$f(\mathbf{x})=f(x_1\mathbf{u_1}+x_2\mathbf{u_2}+\cdots+x_n\mathbf{u_n})\underset{\text{lineal}}{\overset{\text{por ser } f}{=}}x_1 f(\mathbf{u_1})+x_2 f(\mathbf{u_2})+\cdots+x_n f(\mathbf{u_n}) \qquad (1)$$

Es decir, la imagen del vector **x** es combinación lineal de las imágenes de los vectores de la base U de E.

Los vectores $f(\mathbf{x}),\ f(\mathbf{u_1}),\ f(\mathbf{u_2}),\ldots,\ f(\mathbf{u_n})$ pertenecen al espacio vectorial V. Si la relación (1) se cumple, también se cumplirá la misma relación entre las coordenadas de estos vectores en cualquier base de F, en nuestro caso la base V. Por tanto:

$$\left(f(\mathbf{x})\right)_V=x_1\left(f(\mathbf{u}_1)\right)_V+x_2\left(f(\mathbf{u}_2)\right)_V+\cdots+x_n\left(f(\mathbf{u}_n)\right)_V$$

Y escribiendo la relación anterior como un producto matricial

$$\left(f(\mathbf{x})\right)_V = \left(\left(f(\mathbf{u_1})\right)_V \mid \left(f(\mathbf{u_2})\right)_V \mid \cdots \mid \left(f(\mathbf{u_n})\right)_V\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

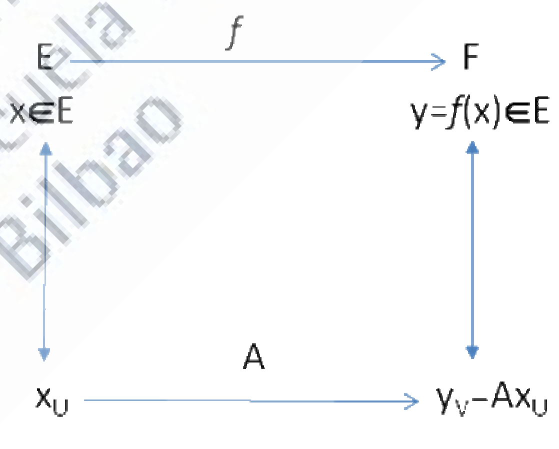
O

$$\left(f(\mathbf{x})\right)_V = M_{VU}(f) \cdot \mathbf{x}_B \qquad (2)$$

Donde la matriz $M_{VU}(f)$ se llama *matriz de f respecto a las bases* U *y* V. Nótese que la primera columna de $M_{VU}(f)$ está formada por las coordenadas (respecto a la base V), de la imagen del primer vector de la base U; la segunda columna por las coordenadas (respecto a la base V) de la imagen del segundo vector de la base U. En general, la j-ésima columna está formada por las coordenadas (respecto a la base V) de la imagen del j-ésimo vector de la base U.

$M_{VU}(f)$ es una matriz de orden *m* x *n*, si dim E = *n* y dim F = *m*.

Del resultado anterior se deduce que todas las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita reales o complejos son equivalentes a la multiplicación matricial de vectores coordenados. Esquemáticamente:



donde A es la matriz de *f* respecto a las bases U y V, es decir, $M_{VU}(f)$.

Ejemplo

Sea la aplicación

$$f: \quad \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$$
$$v(t) \rightarrow f(v) = \frac{v(t) - v(0)}{t}$$

(i) Hallar la matriz de f respecto a las bases $U = \{1+t, \quad t+t^2, \quad t^2+1\}$ de $\mathbb{P}_3$, y $V = \{1+t, \quad 1-t\}$ de $\mathbb{P}_2$.

(ii) Empleando la expresión matricial de la aplicación lineal, obtener $f(1+t+t^2)$

Solución:

(i) La matriz de f respecto a las bases U y V es de la forma:

$$M_{VU}(f) = \left((f(1+t))_V \quad (f(t+t^2))_V \quad (f(t^2+1))_V \right)$$

Calculemos $(f(1+t))_V$. Obsérvese que f(1+t) = 1 y este vector se expresa en función de la base V como 1 = 0.5 (1+t) + 0.5 (1-t)

Luego $(f(1+t))_V = (1)_V = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Por otra parte $f(t+t^2) = 1+t$ que en la base V se expresa como 1 + t = 1 (1+t) + 0 (l-i)

Luego $(f(t+t^2))_V = (1+t)_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finalmente $f(t^2+1)$ = t = 0.5 (1 + t) – 0.5 (1 – t)

Luego $(f(t^2+1))_V = (t)_V = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz de f respecto a las base U y V es

$$M_{VU}(f)=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0.5\\ 0.5 & 0 & -0.5\end{pmatrix}$$

(ii) Sea **v** = $1+t+t^2$, que se expresa en la base U como

$$1+t+t^2 = 0.5\,(1+t) + 0.5\,(t+t^2) + 0.5\,(t^2+1)$$

luego

$$\left(1+t+t^2\right)_U=\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}$$

Por lo tanto $M_{VU}(f)\cdot\left(1+t+t^2\right)_U=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0.5\\ 0.5 & 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\left(f(1+t+t^2)\right)_V$

siendo $\left(f(1+t+t^2)\right)_V$ el vector coordenado, en la base V, de $f(1+t+t^2)$. Según la notación comentada anteriormente

$$M_{VU}(f)\cdot\left(1+t+t^2\right)_U=A\cdot x=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0.5\\ 0.5 & 0 & -0.5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=y=\left(f(1+t+t^2)\right)_V$$ ◄

Ejemplo

Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ & \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} & \to & f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}\end{array}$$

Se pide

(i) Hallar la matriz de *f* respecto a las bases canónicas.

(ii) Calcular *f* (**z**), donde z = $(2\ -3)^t$, utilizando la matriz de *f*

Solución:

(i) Sea $\mathrm{B} = \left\{ \mathbf{e_1} = (1 \quad 0)^{\mathrm{t}} \quad \mathbf{e_2} = (0 \quad 1)^{\mathrm{t}} \right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Entonces

$$M_{\mathrm{BB}}(f) = \left(C_{\mathrm{B}}\left(f(\mathbf{e_1})\right) \quad C_{\mathrm{B}}\left(f(\mathbf{e_2})\right) \right)$$

Como

$$f(\mathbf{e_1}) = (-1 \quad 0)^{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{B}}\left(f(\mathbf{e_1})\right)$$

$$f(\mathbf{e_2}) = (0 \quad -1)^{\mathrm{t}} = C_{\mathrm{B}}\left(f(\mathbf{e_2})\right)$$

se tiene que $M_{\mathrm{BB}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) Como $C_{\mathrm{B}}\left(f(\mathbf{z})\right) = M_{\mathrm{BB}}(f) \cdot C_{\mathrm{B}}(\mathbf{z})$ entonces

$$C_{\mathrm{B}}\left(f(\mathbf{z})\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = f(\mathbf{z}) \quad ◄$$

IV.5.2. Cambio de base: relación entre las matrices de una aplicación lineal en bases distintas

Si se consideran ahora otras dos bases $U' = \{\mathbf{u'_1}, \ \mathbf{u'_2}, \ \cdots, \ \mathbf{u'_n}\}$ y $V' = \{\mathbf{v'_1}, \ \mathbf{v'_2}, \ \cdots, \ \mathbf{v'_m}\}$ para E y F, respectivamente, según lo visto en el apartado anterior la expresión de la aplicación lineal respecto de estas bases vendrá dada por

$$\mathbf{y}_{V'} = M_{V'U'}(f) \cdot \mathbf{x}_{U'} \qquad (3)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la relación que existe entre las coordenadas de un vector de un espacio vectorial respecto a dos bases distintas vista en el Tema II, sabemos que si $\mathbf{x} \in E$ y P es la matriz de paso (regular) de la base U de E a la base U' de E, se tiene que

$$\mathbf{x}_U = P \cdot \mathbf{x}_{U'} \qquad (4)$$

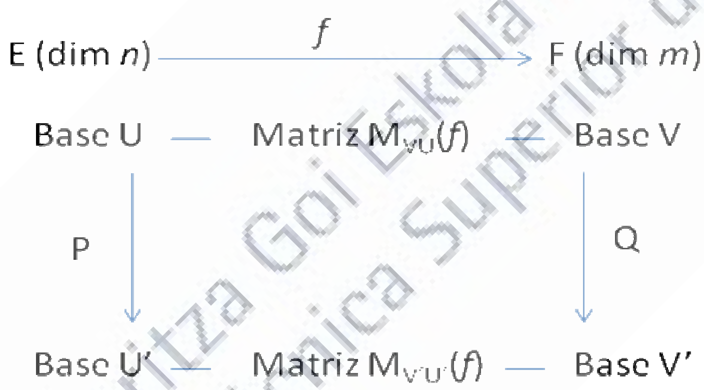
Análogamente, si $\mathbf{y} \in F$ y Q es la matriz de paso (regular) de la base V de F a la base V' de F

$$\mathbf{y}_V = Q \cdot \mathbf{y}_{V'} \qquad (5)$$

Según lo visto en el subapartado anterior, la expresión matricial de f respecto de las bases U y V de E y F, respectivamente, viene dada por la ecuación (2)

$$\mathbf{y}_V = M_{VU}(f) \cdot \mathbf{x}_U$$

Esquemáticamente:



Si la matriz $M_{VU}(f)$ se representa como A_1, la expresión (2) queda:

$$\mathbf{y}_V = A_1 \cdot \mathbf{x}_U \qquad (6)$$

Si la matriz $M_{V'U'}(f)$ se representa como A_2 la expresión anterior resulta:

$$\mathbf{y}_{V'} = A_2 \cdot \mathbf{x}_{U'} \qquad (7)$$

Sustituyendo en (6) las expresiones (4) y (5) que relacionan las coordenadas de los vectores en bases distintas se obtiene:

$$Q \cdot \mathbf{y}_{V'} = A_1 \cdot P \cdot \mathbf{x}_{U'}$$

Premultiplicando por R^{-1} resulta:

$$\mathbf{y}_{V'} = Q^{-1} \cdot A_1 \cdot P \cdot \mathbf{x}_{U'} \qquad (8)$$

Como la expresión matricial de una aplicación lineal, una vez elegidas una base para E y otra para V, es única, las expresiones (7) y (8) han de ser iguales, con lo que se obtiene que

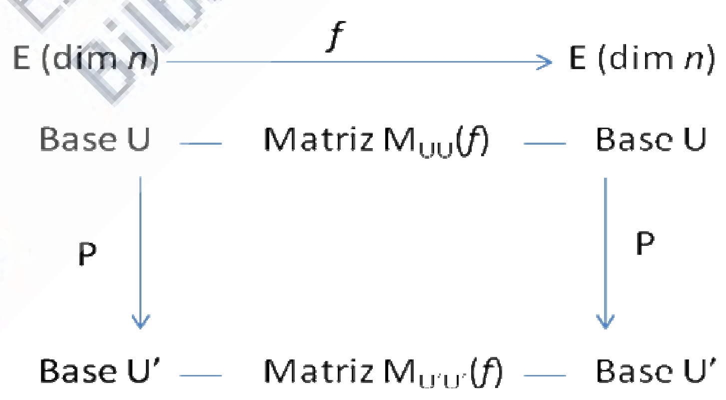
$$A_2 = Q^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

o lo que es lo mismo $M_{V'U'}(f) = Q^{-1} \cdot M_{VU}(f) \cdot P$

Esta es la relación que verifican las matrices asociadas a una misma aplicación lineal f cuando se cambian las bases de E y de F. Se dice que A_1 y A_2 son equivalentes, como establece la siguiente definición.

Definición: Dos matrices A_1 y A_2 , ambas pertenecientes a $E_{mxn}(\mathbb{K})$, se dicen *equivalentes* si están asociadas a una misma aplicación lineal de E en F (respecto de bases adecuadas) o, lo que es lo mismo, si existen dos matrices regulares P y Q cuadradas de orden n y m respectivamente , tales que $A_2 = Q^{-1} \cdot A_1 \cdot P$. Recordando la teoría vista en el Tema I podemos decir que las matrices equivalentes A_1 y A_2 ,se caracterizan también por tener la misma dimensión y rango.

En el caso particular en que E=F, es decir, en el caso de un endomorfismo se pueden tomar iguales las bases U y V entre sí, así como las bases U' y V' entre sí, por lo que las matrices de paso P y Q son idénticas. Esquemáticamente:



Así, la relación entre las matrices del endomorfismo f al cambiar de base en E es:

$$M_{U'U'}(f) = P^{-1} \cdot M_{UU}(f) \cdot P$$

O bien llamando A_1 a la matriz $M_{U\,U}(f)$ y A_2 a la matriz $M_{U'U'}(f)$

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P \, .$$

Se dice en este caso que las matrices A_1 y A_2 son semejantes, como establece la siguiente definición.

Definición: Dos matrices cuadradas A_1 y A_2 , ambas pertenecientes a $E_{nxn}(\mathbb{K})$, se dicen *semejantes* si están asociadas a un mismo endomorfismo (respecto de bases adecuadas) , lo que equivale a que exista una matriz P regular , cuadrada de orden n, tal que $A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$. Se observa que la semejanza de matrices es un caso particular de la equivalencia; por lo tanto, las matrices semejantes también tienen la misma dimensión y el mismo rango.

***Observación* 1** (sobre el rango de una aplicación lineal): es fácil darse cuenta de que el rango de una aplicación lineal f (es decir, la dimensión del subespacio imagen de la aplicación)es igual al rango de su matriz A asociada en cualquier pareja de bases U y V de los espacios E y F, respectivamente. Es decir

$$\text{Rang}\, f = \dim \text{Im}\, f = \text{Rang A}$$

Esto es así porque, como se ha visto anteriormente, si $U = \{\mathbf{u_1}, \ \mathbf{u_2}, \ \cdots, \ \mathbf{u_n}\}$ es base de E, entonces $f(U) = \{f(\mathbf{u_1}), \ f(\mathbf{u_2}), \ \cdots, \ f(\mathbf{u_n})\}$ genera el subespacio imagen de la aplicación: Im f = f (E), por lo que para obtener una base de Im f bastará con extraer de este conjunto los vectores que sean linealmente independientes. Pero las coordenadas de $f(\mathbf{u_1}), \ f(\mathbf{u_2}), \ \cdots, \ f(\mathbf{u_n})$ (respecto de la base V) son precisamente las columnas de la matriz A, por lo que el número de estos vectores que son independientes (y por lo tanto el rango de f) coincide con el rango de A.

Observación 2: nótese que, fijadas las bases, la matriz de una aplicación lineal es única, si bien una aplicación lineal puede representarse mediante distintas matrices si se se consideran diferentes bases. Cualquier aplicación lineal entre espacios vectoriales E y F de dimensiones *n* y *m* respectivamente, tiene asociada una matriz de dimensión *m*x*n* en función de las bases de E y de F que se hayan elegido. Recíprocamente, dada una matriz de dimensión *mxn*, cuyos elementos están definidos en un cierto cuerpo, es posible encontrar una aplicación lineal que respecto a ciertas bases de los espacios vectoriales considerados, tiene como matriz asociada la matriz dada.

Tema IV. Ejercicios

IV.1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x_1,x_2)=x_1^{\,2}\cdot x_2^{\,2}$

b) $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, g(x_1,x_2,x_3)=(0,x_2,x_3)$

IV.2. En el espacio vectorial V de las matrices cuadradas de orden n sobre ℝ se considera la aplicación $F:V \to V \,/\, F(A)=A^t+A$.

Demostrar que F es lineal, calculando su nucleo y su imagen.

IV.3. Sea el endomorfismo:

$$\begin{array}{cccc} f: & V_3 & \to & V_3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -2x+4y+2z \\ x+\lambda y+\lambda z \\ -x+2y+z \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Demostrar que Rango(*f*)=2 ∀ λ ∈ℝ

b) Hallar Ker(*f*) e Im(*f*)para λ=-2

IV.4. Sea V el espacio vectorial de las funciones reales de variable real con las operaciones usuales. Si $f:\mathbb{R}^3 \to V$, es la aplicación que a cada terna $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ le asocia la función $f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\cdot Sin^2(x)+b\cdot Cos^2(x)+c$, hallar una base de Ker(*f*) y otra de Im(*f*), analizando si *f* es inyectiva, y si es sobreyectiva.

IV.5. Sean P_3 y P_2 los espacios vectoriales de los polinomios de grado menor o igual que tres y dos respectivamente. Se define una aplicación:

$$\begin{array}{cccc} T: & P_2 & \to & P_3 \\ & p & \to & T(p)=\int_0^x p(t)dt \end{array}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz de la transformación.

b) Hallar $T(2x^2+4x)$ y el vector o vectores originales de x^3-2x^2+2x respecto de la transformación lineal T.

IV.6. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres:

a) Demostrar que $\{1,(x+1),(x+1)^2,x^3\}$ forman una base.

b) Hallar las coordenadas del vector $(x+1)^3$ en esta base.

c) Sea la plicación lineal f que a cada polinomio le hace corresponder su derivada. Hallar la matriz de dicha aplicación en la base usual $B=\{1,x,x^2,x^3\}$ y también en la definida en el apartado a)

IV.7. Se considera el espacio vectorial V_2 de las matrices cuadradas de orden 2 sobre los números reales y el espacio P_3 de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que tres. Se define la aplicación:

$$f:V_2 \to P_3 \,/\, \forall B\in V_2 \quad f(B)=\begin{pmatrix}1 & x\end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x \\ x^2\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Demostrar que es aplicación lineal.

b) Calcular la matriz A de f en las bases canónicas y dar bases de la imagen y del núcleo.

c) Calcular el conjunto de matrices que se transforman en el polinomio x^3+x^2+2x

IV.8. En el espacio vectorial: $E=\left\{A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t\end{bmatrix} / \, x,y,z,t\in\mathbb{R}\right\}$ se define la transformación T de E en si mismo :

$$\begin{aligned} T:\ & E \to E \\ & A \to T(A)= M\bullet A - A\bullet M \quad \text{,siendo } M=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Se pide:

a) ¿Es la transformación T lineal?

b) Ecuación matricial de la transformación.

c) Dimensión y base del núcleo de T: Ker(T)

d) Dimensión y base del subespacio imagen de T: Im(T)

e) Naturaleza de la transformación.

IV.9. Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que en la base canónica viene dada por la expresión $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz A de la aplicación lineal en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? Si las coordenadas del vector x respecto de la base $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son

$C_{B'}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hallar su transformado, es decir $f(\mathbf{x})$.

IV.10. En el espacio E_3 de los vectores libres del espacio, se define una aplicación que transforma un vector en su simétrico respecto del plano horizontal Z=0. Se pide:

a) Ecuación matricial de la transformación lineal y naturaleza de la misma.

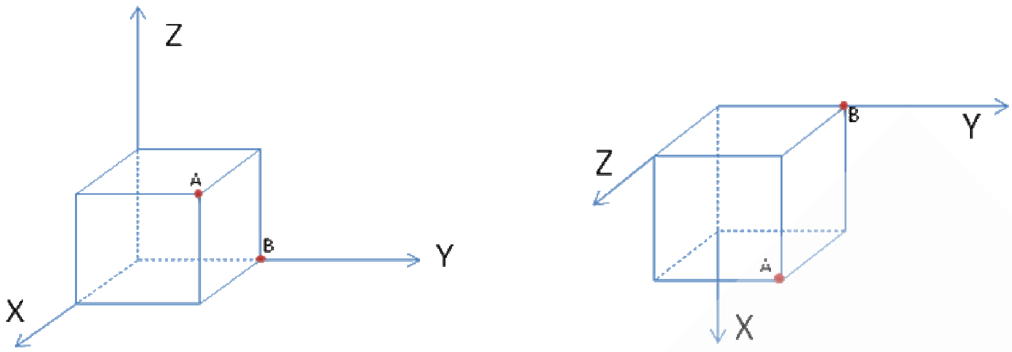
b) Dimensión, base y ecuaciones cartesianas del subespacio imagen.

c) Dimensión, base y ecuaciones cartesianas del núcleo de la aplicación.

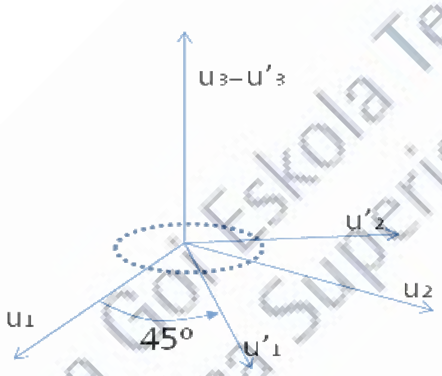
IV.11. A un cubo de arista unidad y colocado según la figura, se le aplica un giro de $\frac{\pi}{2}$ radianes en el sentido positivo alrededor del eje Y y una traslación de vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcular las coordenadas de los vértice A y B del cubo transformado, escribiendo las ecuaciones matriciales del giro y la traslación efectuados.

b) ¿Se pueden considerar el giro y la traslación como aplicaciones lineales? ¿Y la combinación de ambos?.



IV.12. En el espacio afín tridimensional E_3 de vectores libres se dan las referencias ortonormadas de la figura, obteniéndose la base B' a partir de la base B mediante un giro de 45º alrededor de $\mathbf{u_3}$==$\mathbf{u'_3}$, siendo $B=\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3}\}$ y $B'=\{\mathbf{u'_1},\mathbf{u'_2},\mathbf{u'_3}\}$.



Se pide:

a) Hallar la matriz de paso entre las bases, comprobando que es ortogonal.

b) Obtener en las dos bases B y B' la matriz de la transformación lineal que aplica E_3 en sí mismo, haciendo corresponder a cualquier vector su simétrico respecto del plano $x_1=0$.

c) Relacionar mediante la matriz de paso las expresiones de la matriz de la transformación T en ambas bases.

IV.13. Sean $B=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3},\mathbf{e_4}\}$ y $B'=\{\mathbf{e'_1},\mathbf{e'_2},\mathbf{e'_3}\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente y sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$Ker(f)=Span\{\mathbf{e_1},\mathbf{3e_2}+\mathbf{e_3}\}$$

$$f(\mathbf{e_2})=\mathbf{e'_1}+\mathbf{e'_3}$$

$$f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4})=\mathbf{e'_2}-2\mathbf{e'_1}-2\mathbf{e'_3}$$

a) Hallar la matriz de *f* en las bases canónicas.

b) Hallar el rango de *f*.

c) Hallar(obtener una base) el subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=\lambda+2\mu \\ y=-6\mu \\ z=-\lambda-3\mu \\ t=2\lambda+2\mu \end{cases} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Calcular una base de *f*(F).

IV.14. En el conjunto de los vectores libres del espacio se define una transformación lineal T de modo siguiente:

T(**v**)=**v** ∀**v** perteneciente al plano $x_1-x_2-x_3=0$

El vector $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ pertenece al núcleo.

Se pide:

a) Transformados de los vectores de la base usual.

b) Ecuación matricial de la transformación y naturaleza de la misma.

c) Dimensión, base y ecuaciones de los subespacios núcleo e imagen.

IV.15. En el espacio vectorial E_3 sobre ℝ relativo a la base $B=\{\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}\}$ se define una transformación lineal T del siguiente modo:

- $T(\mathbf{e_3})=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
- El transformado del subespacio de ecuación $x_1-x_2+x_3=0$ es el vector nulo.

Se pide:

a) Ecuación matricial y naturaleza de la transformación.

b) Dimensión, base y ecuaciones de Im T

c) Transformado (ecuaciones cartesianas)del subespacio S de ecuación $x_1-x_3=0$, razonando la respuesta.

d) Expresión de la transformación lineal en la base $B' = \{\mathbf{e'_1}, \mathbf{e'_2}, \mathbf{e'_3}\}$ si

$$\begin{cases} \mathbf{e'_1} = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} \\ \mathbf{e'_2} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e'_3} = \mathbf{e_1} \end{cases}$$

Tema IV. Soluciones Ej.

IV.1.

a) No.

b) Si.

IV.2. Ker F={ B∈ M_{nxn}/B antisimétrica}

Im F={ B∈ M_{nxn}/B simétrica}

IV.3. b) $B_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad B_{\mathrm{Ker}\, f} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

IV.4. $B_{\mathrm{Ker}\, f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad B_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{ Sen^2(x), Cos^2(x) \right\}$

f no es inyectiva, *f* no es sobreyectiva.

IV.5.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

b) $T(2x^2 + 4x) = 2x^2 + \frac{2}{3}x^3$

el vector original de $x^3 - 2x^2 + 2x$ es $2 - 4x + 3x^2$

IV.6.

a) ...

b) $C\left((x+1)^3\right)=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\1\end{pmatrix}$

c) en la base del apartado a: $\begin{pmatrix}0&1&0&3\\0&0&2&-6\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; en la base usual: $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

IV.7.

a) ...

b) $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$$B_{\mathrm{Im}\,f}=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\};\quad B_{\mathrm{Ker}f}=\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

c) $B=\begin{pmatrix}2&b\\1-b&1\end{pmatrix}$

IV.8.

a) Si

b) $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&2&0\\-2&0&0&2\\0&0&0&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$

c) Dim Ker T=2 $\qquad B_{\mathrm{Ker}\,T}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

d) Dim Im T=2 $\qquad B_{\mathrm{Im}\,T}=\left\{\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$

e) Endomorfismo no inyectivo y no sobreyectivo.

IV.9. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

No es inyectiva

Es sobreyectiva

$$f(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$$

IV.10.

a) $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$; endomorfismo biyectivo.

b) Im T=E_3; una base de Im T será cualquier base de E_3, no hay ecuaciones cartesianas o implícitas para la Im T.

c) Ker T={**0**}; sus ecuaciones cartesianas son: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$.

IV.11.

a) $A'=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}; B'=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$

Giro: $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$;

Traslación: $\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

b) El giro si es una aplicación lineal, la traslación no y por tanto la composición de ambos movimientos no puede ser una aplicación lineal.

IV.12.

a) $P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P\cdot P^t = I$

b) $A_B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{B'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A_{B'} = P^{-1}\cdot A_B \cdot P$

IV.13.

a) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

b) Rango *f*=rango (A)=2

c) F=Span$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

IV.14.

a) Tomando como base $B^*=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$A_{B^*}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) No es sobreyectiva y por lo tanto no es biyectiva.

c) Dim Im f=2; Ecuaciones cartesianas: $y_1-y_2-y_3=0$; $B_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \right\}$

Dim Ker f=1, Ecuaciones: $x_1=0$ y $x_3-x_2=0$; $B_{\mathrm{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

IV.15.

a) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, T no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

b) $B_{\mathrm{Im} T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Ecuaciones de Im T: $y_1=y_2 \wedge y_3=y_2$

c) T(S)= $Span \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \equiv$ Im T

d) $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$