Tema V

DIAGONALIZACIÓN POR TRANSFORMACIONES DE SEMEJANZA

Objetivos

- ✓ Presentar los conceptos de autovalor y autovector, los cuales tienen gran importancia en las aplicaciones prácticas (tanto es así, que podría decirse que los autovalores son los rasgos más importantes de prácticamente cualquier sistema dinámico).
- ✓ Analizar el problema de diagonalización de una matriz cuadrada mediante una transformación de semejnza.

V.1. INTRODUCCIÓN

El estudio de autovalores y autovectores (o valores y vectores propios) de matrices cuadradas y de endomorfismos es de fundamental importancia en matemática aplicada.

Debido a que todo endomorfismo se puede representar mediante matrices cuadradas, y que dada una matriz cuadrada se puede interpretar como un endomorfismo sobre un espacio vectorial fijada una base, podemos restringir nuestro estudio a autovalores y autovectores de matrices cuadradas, dado que este estudio se puede extender a los endomorfismos representados por éstas.

Sea f un endomorfismo definido en un espacio vectorial E de dimensión finita n. Sea A la matriz cuadrada de orden n que representa este endomorfismo en una base dada B_E. Como se ha visto en el Tema IV, si se considera otra base B'_E, el endomorfismo vendrá representado por una matriz A_1 semejante a A: $A_1 = P^{-1} A P$, siendo P la matriz de paso

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

de B_E a B'_E.

De forma esquemática

$$
\begin{tikzcd}
E(\dim n) \arrow[rr, "f"] & & E(\dim n) \\
B_E \arrow[r, dash] \arrow[dd, "P"'] & \text{Matriz } A\text{-}M_{BB}(f) \arrow[r, dash] & B_E \arrow[dd, "P"] \\
 & & \\
B'_E \arrow[r, dash] & \text{Matriz } A_1 = M_{B'B'}(f) \arrow[r, dash] & B'_E
\end{tikzcd}
$$

En este tema se plantea el problema de encontrar (si es posible) una base en la que la representación del endomorfismo sea lo más simple posible. En términos matriciales el problema se traduce en encontrar la matriz más sencilla posible que sea semejante a *A*, así como la matriz de paso correspondiente.

Es evidente que cuanto más sencilla sea la estructura de una matriz, más fácil será obtener información acerca del endomorfismo al que representa. Entre las matrices más sencillas están las diagonales, las cuales nos ofrecen muchas facilidades de cálculo.

Definición. Se dice que la matriz $A \in E_{nxn}(\mathbb{K})$ es diagonalizable (o que el correspondiente endomorfismo *f* es diagonalizable) si existe una matriz *D* que sea diagonal y semejante a *A*.

En el proceso de reducción de la matriz *A* por semejanza a una matriz "más sencilla" , hay que tener en cuenta si $\mathbb{K}$ es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos, pues la naturaleza del cuerpo de escalares influye notablemente en el proceso, como se comprobará más adelante.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

V.2. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES: DEFINICIÓN, CÁLCULO Y PROPIEDADES

V.2.1. Definición

Ejemplo (introducción a los autovalores y autovectores)

En el espacio vectorial E = V_2, se considera el endomorfismo:

$$\begin{aligned} f:\ & V_2 \rightarrow V_2 \\ & \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x}) = \text{Simétrico de } \mathbf{x} \text{ respecto del eje OX} \end{aligned}$$

Expresado en forma analítica (mediante los correspondientes vectores coordenados en la base canónica de V_2)

$$\begin{aligned} f:\ & V_2 \rightarrow V_2 \\ & \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estamos interesados en vectores **x** y en escalares λ que verifican la igualdad $f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$ (1)

Se observa que todos los vectores **x** de V_2 situados sobre el eje OX cumplen $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, y todos los vectores **x** de V_2 situados sobre el eje OY satisfacen $f(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.

En nuestro ejemplo los dos únicos escalares que verifican la igualdad (1) son $\lambda=1$ y $\lambda=-1$.

Los vectores **x** correspondientes son respectivamente todos los situados en los ejes coordenados de abscisas y de ordenadas. ◄

Definición. Sea $A \in E_{n \times n}(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} \equiv \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), matriz asociada a un endomorfismo $f: F \rightarrow F$ en una cierta base de F.

Los autovalores o valores propios de la matriz A (o del endomorfismo *f*) son los escalares $\lambda \in \mathbb{K}$ para los que existe un vector no nulo, $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, tal que

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \text{ (Es decir, } f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x} \text{)}$$

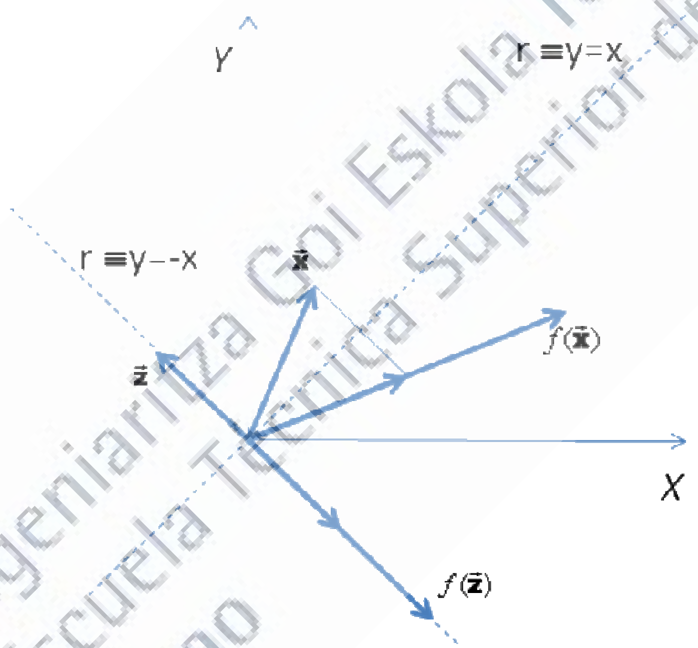
Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

Si λ es autovalor de A, los vectores $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ tales que $A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$, se llaman autovectores o vectores propios de A (o de *f*) asociados a λ; estos autovectores (junto con el vector nulo) forman un subespacio vectorial $\mathrm{V}(\lambda) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \,/\, A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} \right\}$ denominado subespacio propio de A asociado al autovalor λ. ◄

Ejemplo

Consideremos el espacio vectorial de los vectores geométricos del plano, V_2, y en él definimos la transformación lineal:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathrm{V}_2 \quad &\rightarrow \quad \mathrm{V}_2 \\ \mathbf{x} \quad &\rightarrow \quad f(\mathbf{x}) \;=\; 2 \text{ Simétrico de } \mathbf{x} \text{ respecto de la recta } r \equiv x{=}y \end{aligned}$$



Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Se observa fácilmente en la gráfica que:

1) $\forall \mathbf{x} \in V_2$ situado en $r \equiv x = y$ siendo $\mathbf{x} \neq 0 \quad \Rightarrow f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \quad \Rightarrow$

   $\lambda_1 = 2$ es autovalor de *f*, y todos los vectores **x** situados en la recta *r* son autovectores de *f* asociados a λ_1. Al ser $\lambda_1 > 0$, *f*(**x**) tiene el mismo sentido que **x**

2) $\forall \mathbf{x} \in V_2$ situado en $r \equiv y = -x$ siendo $\mathbf{x} \neq 0 \quad \Rightarrow f(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x} \quad \Rightarrow$

$\lambda_2 = -2$ es autovalor de f y todos los vectores **x** situados sobre la recta y=-x son autovectores de f asociados a λ_2. Como $\lambda_2 < 0$, f(**x**) tiene sentido opuesto a **x**.

En ambos casos $|\lambda_i| = 2 > 1$, por lo que se dice que f dilata **x**. ◄

Una vez realizados algunos ejemplos geométricos de cálculo de autovalores y autovectores, procederemos a presentar su cálculo analítico.

V.2.2. Cálculo de autovalores y autovectores

La ecuación A**x**=λ**x** que sirve para definir los autovalores y autovectores se puede escribir como (A-λI)**x** = **0**, con lo que los autovectores, si existen , son los vectores solución de dicho sistema homogéneo. Sabemos que este sistema tiene soluciones distintas de la trivial nula si y sólo si la matriz (A-λI) es singular, lo cual ocurre si y sólo si el determinante de A-λI es igual a cero: $|A-\lambda I| = 0$.

Así, podemos primero encontrar los autovalores de A, es decir aquellos valores $\lambda \in \mathbb{K}$ que hacen $|A-\lambda I| = 0$ y, a continuación, los subespacios propios V(λ), para lo que deberá resolverse el sistema A**x** = λ**x**, o equivalentemente (A-λI)**x** = **0,** para cada valor propio λ.

Estudiemos previamente la naturaleza de la expresión $|A-\lambda I|$.

Definición. Se llama polinomio característico de una matriz cuadrada A, de orden n, definida sobre $\mathbb{K}$, al polinomio $p_A(\lambda)=|A-\lambda I|$, que es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{K}$ y de grado n en la variable λ. La ecuación $p_A(\lambda)=0$ se llama ecuación característica de A.

Podemos decir por lo tanto que $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es autovalor de $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ si y sólo si es raíz del polinomio característico (o equivalentemente, solución de la ecuación característica) y está en $\mathbb{K}$. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, todo polinomio de orden n posee exactamente n raíces (entre reales y complejas). Por lo tanto, si $\mathbb{K}$ es el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos entonces A posee exactamente n autovalores, siendo n el orden de la matriz. Por otro lado, si $\mathbb{K}$ es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao Escuela Técnica Superior de Ingeniería

reales, el polinomio característico de *A* tendrá también *n* raíces, pero quizás algunas sean complejas, por lo que decimos que *A* posee a lo sumo *n* autovalores (en ambos casos considerando las multiplicidades de las soluciones de la ecuación característica).

Ejemplo

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, que no se anula para ningún valor real. Luego, la matriz A considerada una matriz real, no tiene valores propios. Pero si se considera A como una matriz sobre el cuerpo de los números complejos, sus valores propios son +*i* y –*i*. ◄

Puede demostrarse que la expresión general del polinomio característico de una matriz $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |A - \lambda I| = (-1)^n \left[\lambda^n - Traza(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|\right] = \\ &= (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n+1} Traza(A)\lambda^{n-1} + \cdots + |A| \qquad (1) \end{aligned}$$

donde se observa que el coeficiente de λ^{n-1} coincide con la traza de *A* (afectada del signo correspondiente) y el término independiente con el valor del determinante de *A*.

Además, puede también demostrarse que:

$$\text{Traza(A)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

Demostración (opcional).

Si *A* tiene *n* autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ (no tienen por qué ser distintos) podemos factoriazar el polinomio característico de la siguiente manera:

$$p_A(\lambda) \ = \ (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) =$$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

$$= (-1)^n \left[\lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \right] \qquad (2)$$

Esta fórmula debe coincidir con la expresión (1) vista anteriormente

$$\mathrm{p_A}(\lambda) = (-1)^n \left[\lambda^n - \mathrm{Traza(A)}\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |\mathrm{A}| \right]$$

por lo que, comparando coeficientes en (1) y (2), en concreto el coeficiente de λ^{n-1} y el término independiente, se deducen las propiedades anteriores.

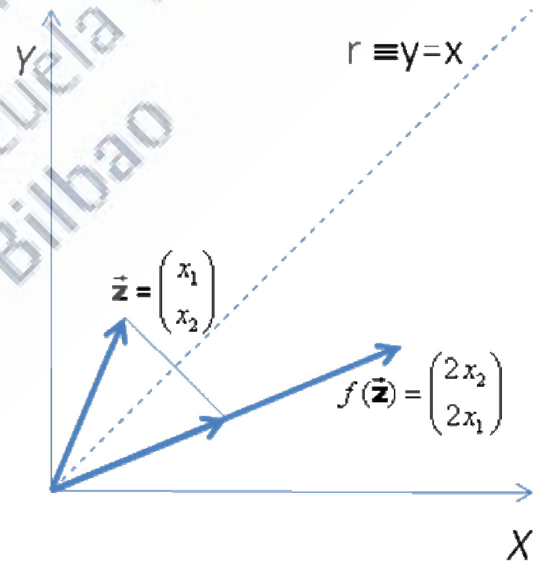
$$\mathrm{Traza(A)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

$$|\mathrm{A}| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \blacksquare$$

Ejemplo

Si en el último ejemplo geométrico del apartado anterior procedemos analíticamente, veremos que se obtiene el mismo resultado. La expresión general de la transformación lineal del ejemplo anterior, considerando en V_2 la base canónica B, es:

$$\begin{array}{ccccc} f: & \mathrm{V_2} & \rightarrow & \mathrm{V_2} \\ & \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathrm{x_1} \\ \mathrm{x_2} \end{pmatrix} & \rightarrow & f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{x_2} \\ 2\mathrm{x_1} \end{pmatrix} \end{array}$$



Por tanto la expresión matricial de f en la base canónica B, es:

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

luego su matriz asociada en la base B de V_2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de *A* (o de *f*) son las soluciones de la ecuación característica de *A*:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \quad \wedge \quad \lambda_2 = -2$$

Los subespacios propios asociados son, respectivamente:

$$V(\lambda_1) = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/ (A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/ -2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \right\}$$

$$V(\lambda_1) = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \in V_2 \,/\, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \{ \mathbf{x} \in V_2 \,/\, \mathbf{x} \text{ está situado sobre } r \}$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/ (A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

$$= \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V_2 \,/\, 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -x_2 \right\}$$

$$V(\lambda_2) = = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \in V_2 \,/\, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \{ \mathbf{x} \in V_2 \,/\, \mathbf{x} \ \text{ está situado sobre } r' \}$$

Obsérvese que los autovalores de A verifican las dos siguientes propiedades enunciadas anteriormente

$$\text{Traza(A)} = 0 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\text{Det(A)} = -4 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad ◄$$

Los autovalores pueden ser repetidos o no, lo que da lugar a las siguientes definiciones.

Definición. Se llama multiplicidad algebraica, m_i, de un autovalor λ_i a la multiplicidad de λ_i como raíz de la ecuación característica de la matriz A, es decir, el número de veces que se repite λ_i como raíz de dicha ecuación.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Fácilmente se obtiene que el polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = (\lambda - 7)^2 \cdot (\lambda - 4)^3$.

Luego, los valores propios de A son:

$\lambda_1 = 7$, de multiplicidad algebraica $m_1 = 2$

$\lambda_2 = 4$, de multiplicidad algebraica $m_2 = 3$ ◄

Definición. Se llama multiplicidad geométrica, μ_i, de un autovalor λ_i, a la dimensión del

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

subespacio propio asociado a él, dim($V(\lambda_i)$).

Puede demostrarse que $1 \le \mu_i \le m_i$.

Además, puesto que las ecuaciones cartesianas del subespacio $V(\lambda_i)$ vienen dadas por el sistema $(A\text{-}\lambda_i I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, y teniendo en cuenta que la dimensión de un subespacio S de $\mathbb{K}^n$ es

dim(S)=*n*-nº de ecs. cartesianas linealmente independientes

se cumple que

$$\mu_i=\dim\ V(\lambda_i)=n\text{-}Rango(A\ \text{-}\ \lambda_i I)$$

Ejemplo

Calcular los valores propios y vectores propios de la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

El polinomio característico de *A* es:

$$p_A(\lambda)\ =\ |A\text{-}\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=-(\lambda-1)^2(\lambda-5)$$

Por tanto, los valores propios de *A* son:

λ_1=1 (raíz doble o con multiplicidad algebraica m_1=2) y

λ_2=5 (raíz simple, m_2=1)

Calculemos a continuación los vectores propios.

Para λ_1=1 los vectores propios satisfacen la ecuación matricial $(A-I)\mathbf{x}=0$, es decir

$$\lambda_1=1 \Rightarrow (A-I)\mathbf{x}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2x_2-x_3$$

$$\mu_1=\dim V(1)=n-Rango(A-I)=3-1=2$$

Por tanto el subespacio propio asociado a λ_1=1 es:

$$\mathrm{V}(1)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{K}^3 / \mathbf{x}=\begin{pmatrix} -2x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x_2, x_3 \in \mathbb{K}\right\}$$

siendo una base de vectores propios de $V(1)$ la formada por los vectores

$$\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es decir , μ_1=Dim($V(\lambda_1)$)=2.

Para λ_2=5, los vectores propios son las soluciones del sistema $(\mathrm{A}-5\mathrm{I})\mathbf{x}=0$, es decir:

$$\lambda_2=5 \Rightarrow (A-5I)\mathbf{x}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=x_1 \\ x_3=x_1 \end{cases}$$

de donde el subespacio propio asociado a λ_2=5 es:

$$V(5)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{K}^3 / \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \forall x_1 \in \mathbb{K}\right\}$$

Luego la base de vectores propios del subespacio $V(5)$ está formada por el vector

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

y μ_2=Dim($V(\lambda_2)$)=1 ◄

Veamos a continuación algunas propiedades relacionadas con los autovalores y los autovectores.

V.2.3. Propiedades

Proposición. Un autovector de una matriz cuadrada está asociado a un único autovalor.

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, y distinto del vector nulo, autovector de $A \in \mathrm{M}_{n\mathrm{x}\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ asociado al autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, es decir,

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

Supongamos que $\mathbf{x}$ también está asociado al autovalor $\mu \in \mathbb{K}$. Entonces

$$\mathrm{A}\mathbf{x} = \mu\,\mathbf{x}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene que

$$(\lambda - \mu)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

como $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, necesariamente $\lambda = \mu$ y de ahí que el autovalor es único. ■

Proposición. Si *A* es una matriz cuadrada de orden *n* definida sobre $\mathbb{K}$, triangular (superior o inferior) entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal principal.

Demostración. Sea *A* una matriz triangular superior: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

Para hallar sus autovalores se plantea su ecuación característica (que al tratarse del determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal):

$$|A-\lambda I| = 0 = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

siendo las soluciones de esta ecuación $\lambda_1 = a_{11}, \lambda_2 = a_{22}, \cdots, \lambda_n = a_{nn}$ ■

Proposición. Los autovectores de una matriz cuadrada de orden *n* asociados a autovalores distintos, son linealmente independientes.

Opcional: Consecuencia de esta proposición es que los subespacios propios asociados a autovalores distintos son disjuntos, es decir, $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}, \ \forall \lambda_i \neq \lambda_j$ siendo λ_i y λ_j autovalores distintos de *A*.

Proposición. Las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico y los mismos autovalores.

Demostración. Si existe una matriz *P* regular tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$, se cumple que:

$$|B-\lambda I| = |P^{-1} \cdot A \cdot P - \lambda P^{-1} \cdot P| = |P^{-1} \cdot (A-\lambda I) \cdot P| = |P^{-1}||A-\lambda I||P| = |A-\lambda I|$$

Es decir, los polinomios característicos de *A* y *B* son iguales. Dado que los autovalores son las raíces de la ecuación característica, queda demostrada la proposición. ■

Una clase particular de matrices la constituyen aquéllas que son semejantes a una matriz diagonal, en cuyo caso se dice que son diagonalizables. A continuación vamos a caracterizar las matrices que son diagonalizables por semejanza.

V.3. DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

Proposición. Sea $A \in \mathrm{M}_{n\,x\,n}(\mathbb{K})$. Una condición necesaria de diagonalización de la matriz *A* es que *A* posea exactamente *n* autovalores.

Demostración (opcional). Si *A* es diagonalizable entonces es semejante a una matriz diagonal *D*. Los autovalores de *A* y de *D* coinciden, por semejanza. Siendo los

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao Escuela Técnica Superior de Ingeniería

autovalores de *D* en total *n* (los elementos de su diagonal principal) también *A* tendrá en total *n* autovalores (los mismos que *D*). ■

Teorema (una condición necesaria y suficiente de diagonalización). Una matriz $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y sólo si tiene *n* autovectores linealmente independientes.

Observaciones:

- Si A es diagonalizable, la matriz diagonal semejante a A es $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, siendo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ los autovalores de A (distintos o no). La matriz *P* que define la semejanza es la que tiene por columnas los vectores de las bases de los respectivos subespacios propios de *A*.

- Cuando A es diagonalizable el conjunto de *n* autovectores linealmente independientes formauna base de $\mathbb{K}^n$, con lo cual el teorema anterior se puede enunciar de la siguiente manera: Una matriz $A \in \mathrm{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y solo si existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de *A*.

Demostración (opcional).

$\Leftarrow$) Sean los autovectores de A linealmente independientes:

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}; \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}; \cdots\cdots; \mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces se verifica : $A\,\mathbf{x_i} = \lambda_i\,\mathbf{x_i} \quad \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n$; con lo que las *n* igualdades se pueden escribir matricialmente de la forma:

$$A(\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{x_n}) = A\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = (\lambda_1\mathbf{x_1} \quad \lambda_2\mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{x}_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \cdots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \cdots & \lambda_n x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \cdots & \lambda_n x_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{x_n})\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Lo cual se expresa abreviadamente de la forma *AP=PD*, siendo *P* la matriz cuyas columnas son los autovectores de *A*, y *D* la matriz diagonal formada por los autovalores. Claramente *P* es regular ya que sus columnas son autovectores de A linealmente independientes.

Luego $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ es decir A es diagonalizable.

$\Rightarrow$) Recíprocamente, supongamos que *A* es diagonalizable.

Entonces se puede encontrar una matriz regular *P* tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ siendo *D* una matriz diagonal. O equivalentemente *A P=P D* (1)

Si se escribe *P* por columnas como $P = (\mathbf{x_1} \quad \mathbf{x_2} \quad \cdots \quad \mathbf{x_n})$ se deduce de (1) que $A\,\mathbf{x_i} = \lambda_i\,\mathbf{x_i} \quad \mathrm{i} = 1, 2, \cdots, n$, donde λ_i es el *i*-ésimo elemento de la diagonal principal de *D*. Luego las *n* columnas de *P* son los *n* autovectores de *A*, que serán linealmente independientes ya que *P* es regular. ■

Ejemplo

Diagonalizar la matriz $A(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ^

Solución.

Comenzamos calculando los valores propios de la matriz *A*, así como los correspondientes subespacios propios. El polinomio característico de la matriz A es

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3\text{-}\lambda & \text{-}1 & \text{-}2 \\ 2 & \text{-}\lambda & \text{-}2 \\ 2 & \text{-}1 & \text{-}1\text{-}\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda - 1)^2$$

Por tanto, las raíces de la ecuación característica son $\lambda_1=1$ con multiplicidad algebraica $m_1=2$ y $\lambda_2=0$ con multiplicidad algebraica $m_2=1$. Calcularemos a continuación los vectores propios.

Para $\lambda_1=1$, los vectores propios satisfacen la ecuación matricial $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1 - 2x_3$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_1=1$ es:

$$V(1) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \forall x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Siendo una base de $V(1)$ la formada por los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para $\lambda_2=0$, los vectores propios son las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 \qquad - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - \ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

De donde el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = 0$ es

$$V(0) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \forall x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Luego una base de vectores propios del subespacio V(0) es $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Ya se ha visto que los autovectores de una matriz cuadrada de orden *n* asociados a autovalores distintos son linealmente independientes. Luego, los vectores

$$\left\{\mathbf{x_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_2}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{x_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

son linealmente independientes. Por tanto existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de *A*, por lo que la matriz $\mathrm{A}\in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es diagonalizable:

$$\exists D \text{ y } P / \quad D=P^{-1}\cdot A\cdot P:\ \mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-2&1\\0&1&1\end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

El orden de las columnas de *P* está en función del orden de colocación de los valores propios en *D*, ya que se tiene que cumplir que $A\cdot(\mathbf{x_1}\quad \mathbf{x_2}\quad \mathbf{x_3})=(\mathbf{x_1}\quad \mathbf{x_2}\quad \mathbf{x_3})\cdot D$

Notas:

a) Según puede observarse en este ejercicio, dada la matriz diagonal D, la matriz P formada por vectores propios no es única.

b) Al ser $\lambda=0$ valor propio de A, $V(0)=\mathrm{Ker}\,f\ \neq\{0\}$, luego el endomorfismo *f* asociado a la matriz *A* no es inyectivo, y por tanto (por ser endomorfismo) tampoco es sobreyectivo.

c) Se puede comprobar en este ejemplo que, efectivamente, la multiplicidad geométrica μ_i de un autovalor λ_i nunca es mayor que la multiplicidad algebraica de dicho autovalor, es decir $\mu_i\leq m_i$. ◄

Por último, se va a ver otra caracterización de las matrices diagonalizables en función de la multiplicidad de las raíces de la ecuación característica.

Teorema. Sea $A \in \mathrm{M}_{n\,x\,n}(\mathbb{K})$ con *n* autovalores repetidos o no. *A* es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad algebraica de cada autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de *A* coincide con la multiplicidad geométrica de dicho autovalor λ (es decir , con la dimensión del subespacio propio correspondiente) $m_i = \mu_i \quad \forall\, i$

Demostración. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, los distintos autovalores de *A*, con multiplicidades algebraicas $m_1, m_2, \cdots, m_s$ respectivamente, tales que: $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$.

Hemos visto que la multiplicidad geométrica de cada autovalor nunca puede ser mayor que la algebraica, es decir:

$$\mu_1 \leq \lambda_1, \mu_2 \leq \lambda_2, \cdots, \mu_s \leq \lambda_s$$

por lo que

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_s \leq n$$

La igualdad se obtiene si y sólo si

$$\mu_i = m_i \qquad i = 1, 2, \cdots, s$$

Lo que equivale a la diagonalización de *A*, ya que en este caso y solo en él se logra una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de *A*, uniendo bases de los subespacios propios correspondientes. ■

Ejemplo

En el ejemplo resuelto anteriormente, la matriz $\mathrm{A}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$-, tenía los siguientes valores propios:

$\lambda_1 = 1$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$ y geométrica $\mu_1 = 2$; y

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao Escuela Técnica Superior de Ingeniería

$\lambda_2 = 0$, de multiplicidad algebraica $m_2 = 1$ y geométrica $\mu_2 = 1$.

Por tanto, $m_1 = \mu_1 = 2$ y $m_2 = \mu_2 = 1$, con lo cual *A* es diagonalizable. ◄

Como corolario a este Teorema se establece la condición suficiente de diagonalización.

Corolario. Si una matriz $A \in \mathrm{M}_{n\,x\,n}(\mathbb{K})$ tiene *n* autovalores distintos, entonces es diagonalizable..

V.4. DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS REALES POR SEMEJANZA ORTOGONAL

Las matrices simétricas reales aparecen en numerosos problemas en relación con el estudio de la dinámica de sistemas físicos. Así por ejemplo, cantidades como la energía cinética y la potencial se representan a través de ellas.

Teorema. Toda matriz simétrica real de orden *n* tiene *n* autovalores (es decir, cumple la condición necesaria de diagonalización).

Teorema. Autovectores asociados a autovalores distintos de una matriz simétrica real son ortogonales.

Definición. Se dice que una matriz *A* es diagonalizable ortogonalmente si es semejante a una matriz diagonal por medio de una matriz ortogonal; es decir, si existe una matriz *P* ortogonal tal que $P^t AP = P^{-1}AP = D$.

Teorema. Toda matriz simétrica real puede diagonalizarse ortogonalmente.

Ejemplo

Diagonalizar la matriz simétrica real $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

El polinomio característico es $p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2+\lambda)$

Por tanto, los valores propios de *A* son $\lambda_1=1$ con multiplicidad algebraica $m_1=2$ y $\lambda_2=-2$.

Para $\lambda_1=1$, los vectores propios son las soluciones del sistema $(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, es decir

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x_1-x_2+x_3=0$$

Por tanto el subespacio propio asociado a $\lambda_1=1$ es:

$$V(1)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1+x_3\\ x_3\end{pmatrix}, x_1,x_3\in\mathbb{R}\right\}$$

Siendo una base de *V*(1): $\left\{\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$

$\mu_1=\dim\ \mathrm{V}(\lambda_1)=2$. Se cumple que $\mu_1=m_1$, lo que en matrices simétricas reales está asegurado, ya que son siempre diagonalizables.

Para $\lambda_2=-2$, los vectores propios son las soluciones del sistema $(A+2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, es decir

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=x_1\\ x_3=x_1\end{cases}$$

De donde el subespacio propio asociado a $\lambda_2=-2$ es:

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

$$V(-2)=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_1\\x_1\end{pmatrix}, x_1\in\mathbb{R}\right\}$$

Luego una base del subespacio propio *V*(-2) es $\left\{\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $\mu_2=\dim\ \mathrm{V}(\lambda_2)=1$ según lo previsto.

Así $\mathrm{B}=\{\mathbf{u_1}\quad\mathbf{u_2}\quad\mathbf{u_3}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ de autovectores de *A*. Para construir la matriz *P* ortogonal tal que $P^tAP=D$ sea diagonal, necesitamos una base ortonormal de autovectores. Como $\{\mathbf{u_1},\quad\mathbf{u_2}\}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u_3}$, puesto que son autovectores asociados autovalores distintos de la matriz simétrica *A*, ortogonalizamos sólo $\{\mathbf{u_1},\quad\mathbf{u_2}\}$ mediante el método de Gram-Schmidt.

$$\mathbf{v_1}=\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v_2}=\mathbf{u_2}+\lambda\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\1+\lambda\\1\end{pmatrix}$$

$$<\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}>=0\Rightarrow<\mathbf{v_1}\cdot\mathbf{v_2}>=1+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=-\frac{1}{2}\text{ luego }\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

El conjunto $\{\mathbf{v_1},\quad\mathbf{v_2}\}$ es una base ortogonal de autovectores del subespacio propio *V*(1).

Normalizamos ahora la base ortogonal de autovectores $\{\mathbf{v_1},\quad\mathbf{v_2},\quad\mathbf{u_3}\}$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

$$\mathbf{w_1}=\frac{1}{\|\mathbf{v_1}\|}\mathbf{v_1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}, \quad ,\mathbf{w_2}=\frac{1}{\|\mathbf{v_2}\|}\mathbf{v_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w_3}=\frac{1}{\|\mathbf{u_3}\|}\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

Obteniendo así la base de autovectores ortonormales $\mathrm{B}'=\{\mathbf{w_1} \quad \mathbf{w_2} \quad \mathbf{w_3}\}$

La matriz ortogonal es $P=(\mathbf{w_1} \quad \mathbf{w_2} \quad \mathbf{w_3})=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.

Se puede comprobar que $D=P^{-1}AP=P^tAP$, siendo $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. ◄

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Tema V. Ejercicios

V.1. Calcular los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

a) $A(\mathbb{C})=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(\mathbb{C})=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A(\mathbb{R})=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

V.2. Estudiar la diagonalización de las matrices del problema anterior.

V.3. Hallar una matriz diagonal semejante a A, así como la matriz P de semejanza, siendo A las matrices del problema 1.

V.4. Estudiar la diagonalización de las siguientes matrices hallando, en su caso, las matrices *D* y *P* / $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

V.5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 & 0 \\ b & d & 1 & 0 \\ c & e & f & 1 \end{pmatrix}$ discutir las condiciones que deben cumplir a, b, c, d, e y f para que la matriz *A* sea diagonaizable.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao

V.6. Sea la matriz siguiente: $M=\begin{pmatrix} \alpha & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde α y $m \in \mathbb{R}, \quad m \neq 0$

Encontrar los valores y vectores propios de *M*. ¿ En qué casos es diagonalizable?

V.7. Dada la matriz $B=\begin{pmatrix} a & -1 & d \\ b & 0 & e \\ c & 1 & f \end{pmatrix}$ hallar *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, sabiendo que $v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de B.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao

Tema V. Soluciones Ej.

V.1.

a) $\lambda_1 = 2+i, \quad B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1+i \end{pmatrix} \right\}; \qquad \lambda_2 = 2-i, \quad B_{V(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \end{pmatrix} \right\}$

b) $\lambda_1 = 5, \quad B_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \qquad \lambda_2 = 1, \quad B_{V(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\lambda_1 = 0 \text{ (triple)}, \quad \mathrm{B}_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\lambda_1 = 6, \quad \mathrm{B}_{V(\lambda_1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

V.2.

a) Diagonalizable

b) Diagonalizable

c) No diagonalizable

d) No diagonalizable

V.3.

a) $D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1+i & -1-i \end{pmatrix}$

b) $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

V.4.

a) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) No diagonalizable.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Bilbao
Escuela Técnica Superior de Ingeniería

V.5. $a = 0, f = 0 \quad \forall\, b, c, d, e$

V.6. Valores propios $\lambda_1 = \alpha \;;\; \lambda_2 = 1 \;;\; \lambda_3 = 2$

Si $\alpha = 1$ *M* no es diagonalizable. En cualquier otro caso sí lo es.

V.7. $a = \dfrac{5}{2} \;;\; b = 1 \;;\; c = -2 \;;\; d = -1 \;;\; e = 2 \;;\; f = -1$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Bilbao