Conceptos Básicos.

- EDP de orden $k \geq 1$: $\quad F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0. \qquad (1)$
- (1) es lineal si es equivalente a,

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x). \qquad (2)$$

- (1) es cuasilineal si es equivalente a,

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1}) \partial^\alpha u = b(x, (\partial^\beta u)_{|\beta| \leq k-1})$$

¿Existencia, unicidad, comportamiento de soluciones?

- $\partial_1 u \equiv 0, \quad u(x_1, x_2) = f(x_1).$
- $\partial_1 \partial_2 u \equiv 0, \quad u(x_1, x_2) = \alpha(x_1) + \beta(x_2)$
- $\partial_{\bar{z}} u = \frac{1}{2}(\partial_1 u + i \partial_2 u) = 0, \quad u = u(z)$ es analítica en $\mathbb{C}$.
- Una hipersuperficie $S = \{x : \phi(x) = 0\}$, es característica para (2) cerca de $x_0 \in S$, si $\nabla \phi(x_0) \neq 0$ y

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)(\nabla \phi(x))^\alpha = 0, \quad \text{cuando} \quad \phi(x) = 0,$$

x está cerca de x_0. S es no característica en x_0, si

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x_0)(\nabla \phi(x_0))^\alpha \neq 0.$$

Relacionar con S y la normal a S en x_0, $n = \nabla \phi(x_0) / |\nabla \phi(x_0)|$

Si las coordenadas son (x, t), $S = \{t = 0\}$, $\Phi(x, t) \equiv t$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, (2) en estas coordenadas se reduce a algo como

$$Lu = \sum_{|\alpha| + j \leq k} a_{\alpha j}(x, t) \partial_x^\alpha \partial_t^j u(x, t) = f(x, t),$$

y S es no característica en $(x_0, 0)$, si

$$a_{0k}(x_0, 0) \neq 0.$$

- La parte principal de L en (2) es

$$L_{pr} u = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u,$$

y el símbolo, el polinomio en $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

un polinomio homogéneo de grado k. En términos de $p(x, \xi)$ la condición "S no es característica en x_0" equivale a

$$p(x_0, n_{x_0}) = \frac{p(x_0, \nabla\phi(x_0))}{|\nabla\phi(x_0)|^k} \neq 0.$$

- Si $Lu = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\{\Phi(x) = 0\}$ es <u>no</u> <u>característica</u> en x_0, si

$$(3) \qquad a(x_0) \cdot \nabla\phi(x_0) \neq 0, \quad a(x) = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

y supuesto que a_i son C^1 cerca de x_0 y que

$$S = \{\phi(x) = 0\} = \{(f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s)) : s \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

cerca de $x = x_0$, para algunas funciones C^1, $s \rightsquigarrow (f_1(s), \dots, f_n(s))$, las curvas características para el <u>problema</u> de <u>Cauchy de orden 1</u>,

$$(4) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u) \\ u|_S = h, \end{cases}$$

h función también C^1 cerca de x_0, son las curvas parametrizadas respecto al parámetro t

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), \dots, x_n(s,t)), \quad |s-s_0| \le \delta, \quad |t| \le \delta,$$

$$x_0 = \mathbb{X}(s_0, 0) \in S$$

tales que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial x_1}{\partial t} = a_1(x), & x_1(s,0) = f_1(s), \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t} = a_n(x), & x_n(s,0) = f_n(s). \end{array} \right. \quad , \text{ si } s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}).$$

Cuando $S = \{\phi(x) = 0\}$, $\nabla\phi(x_0) \neq 0$ es no característico, o equivalentemente, si

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1}(s_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_1}(s_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_2}(s_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_2}(s_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}}(s_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}}(s_0) \\ a_1(x_0) & \cdots & a_n(x_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$a(x_0) = (a_1(x_0), \dots, a_n(x_0))$ no está en el plano tangente a S en x_0

resulta que por el TEEDO, TDI y TFI, existe $\delta > 0$ t.q.

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} B_\delta(s_0) \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} & \longleftrightarrow & U \subset \mathbb{R}, \\ (s,t) & \longrightarrow & \mathbb{X} = (x_1(s,t), \dots, x_n(s,t)) \end{array}$$

U abierto alrededor de x_0, es un difeomorfismo C^1; y si $z = z(s,t)$ es la solución de

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f(x(s,t), z), \quad |s-s_0| \le \delta, \quad |t| \le \delta,$$

resulta que

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, t),$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_i = s_i(x_1, x_2, \dots, x_n), & i = 1, 2, \dots, n-1 \\ t = t(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

es la inversa de (5), es una solución C^1 de (4) en el abierto U.

<u>Tma</u>: S, $a_1, a_2, \dots, a_n$, h son C^1 cerca de $x_0 \in S$, S es no característica en x_0 para el problema de Cauchy (4) y $f(x,z)$ es C^1 cerca de $(x_0, h(x_0))$, entonces el problema (4) tiene a lo más una solución local de clase C^1 cerca de $x_0 \in S$. Aquí, a_i y h tienen valores reales.

<u>Dem</u>: Sea u tal solución y define $z(s,t) = u(x(s,t))$, $|s-s_0| \le \delta$, $|t| \le \delta$. Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x(s,t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x,z), \text{ si } |t| \le \delta,$$

$|s-s_0| \le \delta$. Además, $z(s,0) = h(s)$. La unicidad de solución de los problemas de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = f(x(s,t), z) \\ z(s,0) = h(s) \end{cases}$$

muestra que u está unívocamente determinada en U.

Podemos suponer que las hipersuperficies características para (2) cerca de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ son los conjuntos de nivel

$$S_\gamma = \{ \Phi(x) = \gamma \}$$

de alguna $\Phi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Tal Φ verificará

$$p(x, \nabla\phi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(\nabla\Phi(x))^\alpha = 0, \text{ en } \Omega,$$

y para poder hallar las hipersuperficies características de L necesitamos saber resolver ecuaciones de primer orden no lineales.

Ecuación cuasilineal de primer orden n-dimensional

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\, u_{x_i} = c(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Las curvas características en $(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$-espacio son las que verifican

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} = a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z), & \text{para } i = 1, 2, \dots, n \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = c(x_1, x_2, \dots, x_n, z). \end{cases}$$

En el problema de Cauchy, se desea pasar una superficie n-dimensional en $\mathbb{R}^{n+1}$, del tipo $z = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a través de una variedad $(n-1)$-dimensional $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, dada paramétricamente por

$$\begin{cases} x_i = f_i(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), & i = 1, 2, \dots, n \\ z = h(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}). \end{cases}$$

Para ello, y como sólo estamos interesados en una solución local, dado $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-1}^0)$, $P_0 = (f_1(s^0), \dots, f_{n-1}(s^0)) \in \mathbb{R}^n$, $P = (P_0, h(s^0))$, y supuesto que $a_1, a_2, \dots, a_n$ y c son C^1 cerca de P, existe $\delta > 0$ tal que

$$(6) \quad \begin{aligned} B_\delta(s^0) \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^n &\longleftrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto}, P_0 \in \mathcal{U}, \\ (s, t) &\longrightarrow x(s,t) = (x_1(s,t), \dots, x_n(s,t)) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo C^1 entre sendos abiertos alrededor de $(s^0, 0)$ y de P_0. Si se define,

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, t),$$

resulta que u es C^1 en $\mathcal{U}$ y verifica,

$$(7) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u)\, \partial_i u = c(x, u) \\ u|_S = h. \end{cases}$$

problema de Cauchy cuasilineal de primer orden

Para que (6) se verifique, es necesario exigir que S sea no característico para (7) cerca de x_0:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1}(s_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_1}(x_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}}(s_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}}(s_0) \\ a_1(x_0,h(x_0)) & \cdots & a_n(x_0,h(x_0)) \end{vmatrix} \neq 0$$

$(a_1(x_0,h(x_0)),\ldots,a_n(x_0,h(x_0)))$ no es tangente a S en x_0

En el caso cuasilineal, ser no característico para (7) depende también de los valores de $h = u|_S$ en S. Esto no ocurre en el caso lineal (4).

Tma: S una hipersuperficie C^1, a_j, c y h son C^1 a valores reales y suponemos que $(a_1(x,h(x)),\ldots,a_n(x,h(x)))$ es no paralelo a S en x_0. Entonces (7) tiene una solución única C^1 en un entorno de x_0.

Dem: La existencia es consecuencia del método de las características anterior. Si u^1 y u^2 son soluciones C^1 de (7), $w = u^1 - u^2$, w verifica

$$(8)\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x,u^1(x))\, w_{x_i} = f(x)\, w, \\ w|_S = 0, \end{cases}$$

en un entorno de x_0, con

$$f(x) = \frac{c(x,u^1) - c(x,u^2)}{u^1 - u^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x,u^2) - a_i(x,u^1)}{u^2 - u^1}\, u^2_{x_i},$$

que es continua en un entorno de x_0. Además, S es no característica en x^0 para el problema lineal (8). El tma. de unicidad para ecuaciones lineales de primer orden implica que $w \equiv 0$ en entorno de x_0.

Ecuación de primer orden no lineal: método de las características

$$(9)\ \begin{cases} F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \\ u|_S = h, \end{cases}$$

problema de Cauchy de 1º orden no lineal

donde F es C^2 en $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n)$. S es una variedad $(n-1)$-dimensional dada paramétricamente por

$$\begin{cases} z = u \\ p_i = u_{x_i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_i = f_i(s_1, s_2, \dots, s_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ z = h(s_1, s_2, \dots, s_n) \end{cases}$$

con f_i y h de clase C^1 cerca de $s^0 = (s_1^0, s_2^0, \dots, s_{n-1}^0) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Para ello, primero buscamos funciones $p_i = \phi_i(s_1, s_2, \dots, s_{n-1})$, $i = 1, \dots n$, tales que (condiciones admisibles para $\nabla u|_S$),

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial s_i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi_k \frac{\partial f_k}{\partial s_i}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ F(f_1, f_2, \dots, f_n, h, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0, \end{cases}$$

para cada s cerca de s_0, y resolvemos el sistema de EDO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} = F_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial t} = -F_{x_i} - p_i F_z, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i} \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$x_i(s,0) = f_i(s), \quad p_i(s,0) = \Phi_i(s), \quad z(s,0) = h(s).$$

En general, $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$, podrían no ser únicas y (9) en general no tendrá solución única. Si suponemos que F es C^2, S, h y Φ_i son C^1 a S y verifican la condición no característica:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial s_{n-1}} \\ \frac{\partial F}{\partial p_1}(f(s), h(s), \Phi(s)) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial p_n}(f(s), h(s), \phi(s)) \end{vmatrix} \neq 0$$

en $s = s_0$, $x_0 = f(s_0) = (f_1(s_0), \dots, f_n(s_0)))$, por TEEDOs TDI y TFI

$$X : B_\delta(x_0) \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in \mathcal{U}$$

$$(s,t) \longrightarrow (x_1(s,t), x_2(s,t), \dots, x_n(s,t))$$

es un difeomorfismo local y

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = z(s_1(x_1, \dots x_n), \dots, s_{n-1}(x_1, \dots x_n), t(x_1, \dots, x_n))$$

es solución C^1 de (9) en $\mathcal{U}$ que verifica

$$u_{x_i}\big|_{S \cap \mathcal{U}} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si en el problema (9), $S' = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : t = 0\}$ y u_t aparece ya despejada como:

$$(10) \begin{cases} u_t = G(x, t, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_{n-1}}) \\ u(x,0) = h(x). \end{cases}$$

y G es C^2 cerca de $(x_0, 0, \phi(x_0), \phi_{x_1}(x_0), \dots, \phi_{x_{n-1}}(x_0))$, la solución construida por el método de las características anterior es única en un entorno de $(x_0, 0)$.

Dem: Si $n = 2$ y u^1, u^2 son soluciones C^1 de (10) cerca de $(x_0, 0)$, $w = u^1 - u^2$ verifica,

$$(11) \begin{cases} a(x,t) w_x + w_t = c(x,t) w, \\ w(x,0) = 0, \end{cases}$$

si (x,t) está cerca de $(x_0,0)$, con

$$a(x,t) = -\frac{G(x,t,u^2,u^1_x) - G(x,t,u^2,u^2_x)}{u^1_x - u^2_x},$$

$$c(x,t) = \frac{G(x,t,u^1,u^1_x) - G(x,t,u^2,u^1_x)}{u^1 - u^2},$$

a y c son C^1 cerca de $(x_0,0)$ y $t=0$ es no característico para (11).

- Un operador de segundo orden lineal

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u$$

tiene parte principal

$$L_{pr}u = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\partial^2_{ij} u,$$

y su símbolo es

$$p(x,\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = A(x)\xi.\xi\,, \quad x,\ \xi\in\mathbb{R}^n,$$

con

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{n},$$

una matriz que podemos suponer que es simétrica. L se dice elíptico en $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, si $A(x)$ es definida positiva en todo $x\in\Omega$. L es uniformemente elíptico en Ω, si existe $\lambda\in(0,1)$ tal que

$$\lambda|\xi|^2 \le A(x)\xi.\xi \le \lambda^{-1}|\xi|^2, \quad \text{si } x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

El modelo de un tal operador es el Laplaciano,

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

L se dice hiperbólico en Ω si para cada $x \in \Omega$, $A(x)$ tiene $n-1$ autovalores positivos y otro negativo. El modelo en $\mathbb{R}^{n+1}$ es el operador de ondas

$$\Box u = \Delta u - \partial_t^2 u, \qquad A(x,t) = \begin{pmatrix} I & \vdots \\ 0 \cdots 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L es parabólico en Ω si para cada $x \in \Omega$, $A(x)$ tiene $n-1$ autovalores positivos y otro nulo. El modelo en $\mathbb{R}^{n+1}$ es el operador lineal asociado a la ecuación del calor:

$$\Delta u - \partial_t u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \partial_t u.$$

- Todas las hipersuperficies en $\mathbb{R}^4$ son no características para Δ o sus similares.
- Las únicas hipersuperficies características para $\Delta - \partial_t$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, son las hiperplanos $t = \text{const}$.
- Si $n=2$, las características de $\Box$ son las rectas

$$x \pm t = \text{const}.$$

- Si $n \geq 3$, los conos $t = \pm |x| + \text{const.}$ son característicos para $\Box$.