Otros problemas de Cauchy 1

(1) $\quad F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}) = 0.$ , $F$ al menos $C^1$.

Si $u$ es $S$ una variedad en $\mathbb{R}^n$ de clase $C^k$, $k \geq 1$. Si $u$ es $C^k$ cerca de $S$, las cantidades

$$u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}},$$

restringidas a $S$, donde

- $S = \{x : \phi(x) = 0\}$, $\phi$ función $C^k$, $\nabla\phi \neq 0$
- $n = \dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$, normal a $S$ en $x \in S$
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} n_i$,
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2} = D^2 u\, n \cdot n = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot n_i n_j$,

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- $\dfrac{\partial^\ell u}{\partial n^\ell} = \displaystyle\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\ell = 1}^{n} \frac{\partial^\ell u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_\ell}} n_{i_1} n_{i_2} \cdots n_{i_\ell}$, $\ell \geq 1$.

son las $k-1$ primeras derivadas normales (en la dirección de la normal unitaria $n$ a $S$), son el dato de Cauchy asociado a (1). El problema de Cauchy para (1), cerca de $x_0 \in S$, consiste en encontrar $u$ de clase $C^k$ cerca de $x_0$, que verifica (1) y cuyo dato de Cauchy en $S$ es conocido o dado a priori.

Si $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$ (lo que podemos suponer que ocurre después de una rotación de $\mathbb{R}^n$), el cambio de variables

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ t = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

transforma localmente $S$ cerca de $x_0$ en $t=0$ en el espacio $(y', t)$, $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$; y el problema de Cauchy para (1) se transforma en las nuevas coordenadas en: dadas $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_{k-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, encontrar $u$ de clase $C^k$, tal que

$$(2) \quad \begin{cases} F(x, t, (\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j \le k}) = 0, & \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}. \\ \partial_t^j u(x,0) = \phi_j(x), & j = 0, 1, \dots, k-1, \end{cases}$$

cerca de $(x_0, 0)$. (¡Abuso de notación!)

Si $u$ es solución $C^k$, el dato de Cauchy determina las derivadas

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,0), \quad \text{si } |\alpha| + j \le k, \ j < k.$$

De hecho,

$$\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,0) = \partial_x^\alpha \phi_j(x),$$

y la única derivada de orden $\le k$ en $S$ que es desconocida es $\partial_t^k u(x,0)$. Para que el problema de Cauchy esté bien planteado, debemos suponer que $\partial_t^k u(x,0)$ se puede obtener de (2) (¡de forma única!): de la ecuación y los datos de Cauchy. <u>En tal caso, diremos que (2) es no característico en $(x_0, 0)$.</u>

En el caso lineal,

$$F(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\le k}) = \sum_{|\alpha|+j\le k} a_{\alpha j}(x,t)\partial_x^\alpha \partial_t^j u(x,t) - f(x,t) = 0$$

esta hipótesis significa que $S$ es no característica en $(x_0,0)$; es decir, que

$$a_{0k}(x_0,0) \neq 0.$$

y para $x$ cerca de $x_0$, (2) equivale a

$$\partial_t^k u = \frac{-1}{a_{0k}(x,t)}\left[\sum_{\substack{|\alpha|+j\le k\\ j<k}} a_{\alpha j}(x,t)\partial_x^\alpha \partial_t^j u - f(x,t)\right]$$

Ej: • $t=0$ es característica para $\partial^2_{xt} u = 0$

$$\begin{cases} \partial^2_{xt} u = 0 \\ u(x,0) = \phi_0(x), \quad \partial_t u(x,0) = \phi_1(x) \end{cases}$$

sólo tiene solución si $\phi_1(x) = \phi_1$ es constante y las posibles soluciones son

$$u(x,t) = \phi_0(x) + \beta(t), \quad \beta(0)=0, \quad \beta'(0) = \phi_1$$

"El dato de Cauchy no es cualquiera y las soluciones no son únicas".

• $t=0$ es característica para $\partial_x^2 u - \partial_t u = 0$ en $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_t u = 0 \\ u(x,0) = \phi_0(x), \quad u_t(x,0) = \phi_1(x). \end{cases}$$

Si $u(x,0) = \phi_0(x)$, necesariamente, $\phi_1(x) = \phi_0''(x)$. "El dato de Cauchy no puede ser arbitrario.

En el caso cuasilineal,

$$F(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\le k}) = \sum_{|\alpha|+j=k} a_{\alpha j}(x,t,(\partial_x^\beta \partial_t^i u)_{|\beta|+i\le k-1})\partial_x^\alpha \partial_t^j u$$

$$- b(x,t,(\partial_x^\beta \partial_t^i u)_{|\beta|+i\le k-1}),$$

se dice que el problema de Cauchy (2) es no característico en $(x_0,0)$, si

$$a_{0k}(x_0,0,(\partial_x^\beta \phi_i(x_0))_{|\beta|+i\le k-1}) \neq 0,$$

lo que permite calcular $\partial_t^k u(x,0)$, para $x$ cerca de $x_0$, en término de la ecuación y del dato de Cauchy en $t=0$ o $S$ para $(x,0)$ cerca de $(x_0,0)$.

En el caso general,

$$F(x,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{|\alpha|+j\le k-1}, u_{0k}) = 0,$$

no determinará a $u_{0k}$ de forma única en $S = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ de forma única y que el problema (2) sea no característico en $x_0$ equivaldrá por TFI a lo siguiente: $u_{0k}$ queda determinado cerca de $(x_0,0)$ como una función $C^1$ de $x$ sobre $S$ tal que

$$F(x,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{\substack{|\alpha|+j\le k\\ j<k}}, u_{0k}) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{0k}}(x_0,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(x_0))_{\substack{|\alpha|+j\le k\\ j<k}}, u_{0k}(x_0)) \neq 0,$$

para $x$ cerca de $x_0$.

En tal caso y por TFI, (2) es equivalente a

$$\begin{cases} \partial_t^k u = G(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{\substack{|\alpha|+j\le k\\ j<k}}) & (3)\\ u(x,0)=\phi_0(x),\ \partial_t u(x,0)=\phi_1(x),\dots,\ \partial_t^{k-1}u(x,0)=\phi_{k-1}(x) \end{cases}$$

para alguna nueva función $G$ de clase $C^1$. En (3) es claro que el dato de Cauchy y la ecuación determinan todas las derivadas de $u$ de orden $\le k$ en $S$ y cerca de $(x_0,0)$. Si $G$, $\phi_0, \phi_1, \dots,$ y $\phi_{k-1}$ son $C^\infty$, (3) determina los valores de todas las derivadas de $u$ en $(x,0)$, $x$ cerca de $x_0$: derivando respecto a $t$:

$$\partial_t^{k+1} u = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{\substack{|\alpha|+j\le k\\ j<k}} \frac{\partial G}{\partial u_{\alpha j}} \partial_x^\alpha \partial_t^{j+1} u,$$

y todas las variables en el lado derecho son datos conocidos en $(x,0)$...

Proposición: Si $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}$ y $G$ son funciones analíticas en $x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $(x_0, 0, (\partial^\alpha \phi_j(x_0))_{|\alpha|+j\le k,\, j<k})$ respectivamente, entonces existe a lo más una solución $u$ de (3) que sea analítica como función de $(x,t)$ en un entorno de $(x_0,0)$.

Dem: Una función analítica de variable real está unívocamente determinada por los valores de sus derivadas en un punto.

El tma. de Cauchy-Kovalevski.

$$\begin{cases} F(x,(\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}) = 0 & (1), \quad \nabla\phi(x_0)\neq 0\\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \phi_j \quad \text{en } S=\{x : \phi(x)=0\}, \end{cases}$$

$F$, $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}$ y la hipersuperficie $S$ se suponen analíticas en un entorno de $x_0 \in S$. Por medio de un cambio analítico de coordenadas entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$, de forma que $x_0$ se transforma en $(0,0)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$ y $S$ en el hiperplano $t=0$. Supondremos también que el problema (1) es no característico en $x_0$, es decir, que (1) determina unívocamente a $\partial_t^k u$ cerca de $(0,0)$ sobre $S$ y resultando que (1) es equivalente a

$$\begin{cases} \partial_t^k u = G\left(x,t,(\partial_x^\alpha \partial_t^j u)_{|\alpha|+j\le k,\, j<k}\right) \\ \partial_t^j u(x,0) = \phi_j(x), \quad 0\le j\le k-1 \end{cases} \tag{2}$$

$\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k-1}$ analíticas en $x=0$, $G\left(x,t,(u_{\alpha j})_{|\alpha|+j\le k,\, j<k}\right)$ analítica en $\left(0,0,(\partial_x^\alpha \phi_j(0))_{|\alpha|+j\le k,\, j<k}\right)$.

<u>Tma de Cauchy-Kowalevski</u>: Bajo las condiciones anteriores (2) tiene una única solución analítica $u=u(x,t)$ definida en un entorno de $(0,0)$.

<u>Dem</u>

1er paso: $y_{\alpha j} = \partial_x^\alpha \partial_t^j u$, $0\le|\alpha|+j\le k$, nuevas variables dependientes. Si $\alpha\neq 0$, $\alpha\in\mathbb{N}^{n-1}$, $i$ denota el índice $\ell\in\{1,2,\dots,n-1\}$ más pequeño tal que $\alpha_\ell\neq 0$, y $e_i$ el $(n-1)$-vector $(0,\dots,\underset{\uparrow\, i}{1},\dots,0)$.

Entonces (2) es equivalente a resolver

$$\begin{cases} \partial_t y_{\alpha j} = y_{\alpha(j+1)}, & \text{si } |\alpha|+j<k, \\ \partial_t y_{\alpha j} = \partial_{x_i} y_{(\alpha-e_i)(j+1)}, & \text{si } |\alpha|+j=k,\ j<k, \\ \partial_t y_{0k} = \dfrac{\partial G}{\partial t} + \displaystyle\sum_{|\alpha|+j<k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}}\, y_{\alpha(j+1)} & \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{|\alpha|+j=k,\, j<k} \frac{\partial G}{\partial y_{\alpha j}}\cdot \partial_{x_i} y_{(\alpha-e_i)(j+1)}, & \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{cases} y_{\alpha j}(x,0) = \partial_x^\alpha \phi_j(x), & \text{si } j < k \\ y_{0k}(x,0) = G(x, 0, (\partial_x^\alpha \phi_j(x))_{|\alpha|+j\le k,\ j<k}) . \end{cases}$$

Es decir, (2) es equivalente a resolver

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x,t,Y)\,\partial_{x_i} Y + B(x,t,Y) \\ Y(x,0) = \Phi(x), \end{cases} \tag{3}$$

con $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, $Y = Y(x,t)$ un N-vector, $A_i(x,t,Y)$ matriz $N\times N$, si $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $B(x,t,Y)$ un N-vector y $\Phi(x)$ otro N-vector.

<u>2º paso</u>: Si $U = Y(x,t) - \Phi(x)$, (3) es equivalente a

$$\begin{cases} \partial_t U = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x,t,U+\Phi)\,\partial_{x_i} U + B(x,t,U+\Phi) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x,t,U+\Phi)\,\partial_{x_i}\Phi, \\ U(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Además, podemos eliminar $t$ en (4) añadiendo a $U$ una componente más $u^0$ tal que $\partial_t u^0 = 1$, $u^0(x,0) = 0$, y (2) resulta equivalente a resolver

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x,Y)\,\partial_{x_i} Y + B(x,Y), \\ Y(x,0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

con $Y = Y(x,t)$, $B(x,Y)$ N-vectores para algún $N \ge 1$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $A_i(x,Y)$ matriz $N\times N$, $A_i(x,Y)$ y $B(x,Y)$ analíticas en las variables $(x,Y)$ en $(x_0, Y_0) = (0, 0)$.

El Tma. se reduce a encontrar una solución analítica $Y = Y(x,t)$ de (5) cerca de $(0,0)$.

Ej: Supondremos que (2) se reduce a

$$(2')\quad \begin{cases} \partial_t u = G(x,t,u,\partial_x u), & (x,t)\in\mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = \phi_0(x). & \end{cases}, \quad \underline{\underline{k=1}}$$

$\underline{1^{\text{o}}\text{ paso}}$:

$y_{00}=u$, $y_{10}=\partial_x u$, $y_{01}=\partial_t u$. Derivando (2')

$$\partial_t^2 u = \frac{\partial G}{\partial t}(x,t,u,\partial_x u) + \frac{\partial G}{\partial y_{00}}(x,t,u,\partial_x u)\partial_t u + \frac{\partial G}{\partial y_{10}}(x,t,u,\partial_x u)\partial_{tx}^2 u,$$

por lo que:

$$\begin{cases} \partial_t y_{00} = y_{01} \\ \partial_t y_{10} = \partial_x y_{01} \\ \partial_t y_{01} = \frac{\partial G}{\partial y_{10}}\partial_x y_{01} + \frac{\partial G}{\partial y_{00}} y_{01} + \frac{\partial G}{\partial t} \\ y_{00}(x,0) = \phi_0(x), \quad y_{10}(x,0) = \phi_0'(x), \quad y_{01}(x,0) = G(x,0,\phi_0(x),\phi_0'(x)) \end{cases}$$

$$Y(x,t) = \begin{pmatrix} y_{00} \\ y_{10} \\ y_{01} \end{pmatrix}, \quad A(x,t,Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial G}{\partial y_{10}} \end{pmatrix}$$

$$B(x,t,Y) = \begin{pmatrix} y_{01} \\ 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial y_{00}} y_{01} \end{pmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_0(x) \\ \phi_0'(x) \\ G(x,0,\phi_0(x),\phi_0'(x)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \partial_t Y = A(x,t,Y)\partial_x Y + B(x,t,Y) \\ Y(x,0) = \Phi(x) \end{cases} \quad (3')$$

$\underline{2^{\text{o}}\text{ paso}}$: $U(x,t) = Y(x,t) - \Phi(x)$

$$\begin{cases} \partial_t U = A(x,t,U+\Phi(x))\partial_x U + A(x,t,U+\Phi(x))\partial_x \Phi + B(x,t,U+\Phi(x)) \\ U(x,0) = 0 \end{cases} \quad (4')$$

Añadimos componente $u^0 = t$ al vector $U$ tal que $\partial_t u^0 = 1$, $u^0(x,0)=0$ y todo se reduce a encontrar solución analítica cerca de $(x,t)=(0,0)$ de



$$\begin{cases} \partial_t Y = A(x,Y)\,\partial_x Y + B(x,Y) \\ Y(x,0) = 0 \end{cases} \qquad (5')$$

$Y = Y(x,t)$, $B(x,Y)$ 4-vectores, $A(x,Y)$ matriz $4\times 4$, $A$ y $B$ analíticas en $(x,Y)$ cerca de $(0,0)$.

---

Para simplificar suponemos que $N=1$ en (5); es decir,

$$\begin{cases} \partial_t y = a(x,y)\,\partial_x y + b(x,y), \\ y(x,0) = 0 \ , \end{cases} \qquad (5)$$

$a(x,y)$, $b(x,y)$ analíticas en $(x,y)$ cerca de $(0,0)$, y queremos mostrar que (5) tiene una solución analítica cerca de $(0,0)$:

- $y(x,t) = \sum_{\alpha,j} c_{\alpha j}\cdot x^\alpha t^j$

- $y(x,0) = \sum_{\alpha\geq 0} c_{\alpha 0} x^\alpha \equiv 0$, $\therefore$ $c_{\alpha 0} = 0$, $\forall \alpha \geq 0$.

- $F(x,t) = a(x,y(x,t))\partial_x y(x,t) + b(x,y(x,t)) = \sum_{\alpha,j\geq 0} F_{\alpha j}\cdot x^\alpha t^j$

$$F_{\alpha j} = P^{\alpha j}\left( (c_{\beta e})_{e\leq j},\ a_{\gamma i},\ b_{\delta k} \right), \quad \forall \alpha, j \geq 0,$$

donde, $P^{\alpha j}$ es un polinomio con coeficientes no negativos. y

$$a(x,y) = \sum_{\gamma, i\geq 0} a_{\gamma i} x^\gamma y^i, \qquad b(x,y) = \sum_{\delta, k\geq 0} b_{\delta k} x^\delta y^k.$$

- $\partial_t y(x,t) = \sum_{\alpha,j\geq 0} j\, c_{\alpha j}\cdot x^\alpha t^{j-1} = \sum_{\alpha,j\geq 0} (j+1)\, c_{\alpha (j+1)}\, x^\alpha t^j$

- $y(x,t)$ sería solución sólo si

$$\begin{cases} c_{\alpha(j+1)} = \dfrac{1}{j+1} P^{\alpha j}\left( (c_{\beta \ell})_{\ell \le j}, a_{\gamma i}, b_{\delta k} \right), & j \ge 0,\ \alpha \ge 0. \\ c_{\alpha 0} = 0, & \text{si } \alpha \ge 0. \end{cases}$$

- De aquí se deduce que

$$\begin{cases} c_{\alpha j} = Q^{\alpha j}( a_{\gamma i}, b_{\delta k} ), & \alpha \ge 0,\ j \ge 1 \\ c_{\alpha 0} = 0, & \text{si } \alpha \ge 0. \end{cases} \qquad (6)$$

con $Q^{\alpha j}$ un polinomio de coeficientes no negativos.

- Como $a(x,y)$, $b(x,y)$ son analíticas en $(0,0)$, existen $M$ y $\rho >$ 0 tal que

$$|a_{\gamma i}| \le \frac{M}{\rho^{\gamma + i}} \le M \frac{(\gamma+i)!}{\gamma!\, i!} \rho^{-\gamma - i}$$

$$|b_{\delta k}| \le \frac{M}{\rho^{\delta + k}} \le M \frac{(\delta+k)!}{\delta!\, k!} \rho^{-\delta - k}$$

y recordamos que

$$\frac{M\rho}{\rho - x - y} = \sum_{\gamma, i \ge 0} M \frac{(\gamma+i)!}{\gamma!\, i!} \rho^{-\gamma - i} x^{\gamma} y^{i},$$

si $\max\{|x|, |y|\} < \rho/2$.

- Sabemos como resolver la ecuación:

$$\begin{cases} \partial_t u = \dfrac{M\rho}{\rho - x - u}(\partial_x u + 1), \\ u(x,0) = 0, \end{cases}$$

cuya solución es:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[ \rho - x - \sqrt{(\rho - x)^2 - 4\rho M t} \right], \quad x < \rho,$$

y que es analítica en $(-\infty, \rho/2) \times (-\infty, \frac{\rho}{4M})$

$$\begin{cases} u(x,t) = \sum\limits_{\alpha,j=0}^{+\infty} u_{\alpha j}\cdot x^{\alpha} t^{j}, & 0 \le u_{\alpha j} \le \dfrac{\tilde M}{\tilde\rho^{\,\alpha+j}}, \\ u_{\alpha 0}, \ \text{si } \alpha \ge 0. \end{cases}$$

$\tilde M = \tilde M(M,\rho)$, $\tilde\rho = \tilde\rho(M,\rho)$.

- Los $(c_{\alpha j})_{\alpha,j\ge 0}$ construidos por la regla (6) verifican que

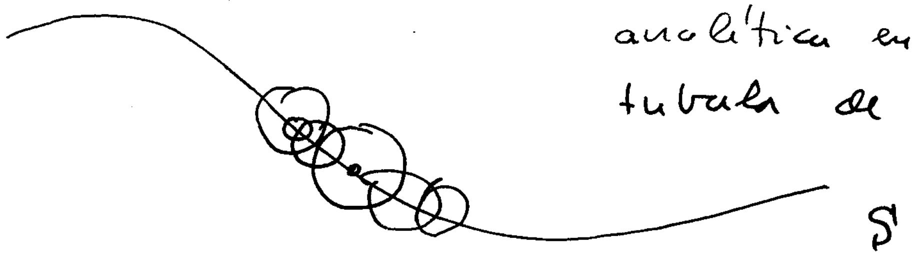
$$|c_{\alpha j}| \le u_{\alpha j}$$

- Por tanto,

$$y(x,t) = \sum_{\alpha,j\ge 0} c_{\alpha j}\cdot x^{\alpha} t^{j}$$

es analítica en $\max\{|x|,|y|\} < \tilde\rho/2$ y verifica la ecuación (5).

Nota.




Al final, la solución será analítica en un entorno tubular de S

Tma de la divergencia:
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, $\partial\Omega$ es $C^1$, $X \in C^1(\overline{\Omega})$ un campo vectorial, $n$ = normal exterior unitaria a $\partial\Omega$. Entonces,

$$\int_{\Omega} \nabla\cdot X\, dx = \int_{\partial\Omega} (X\cdot n)\, d\sigma$$

Identidad de Green:
$u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, $$\int_{\Omega} v\Delta u - u\Delta v\, dx = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma$$

$$\int_\Omega \partial_i u\, v = -\int_\Omega u\, \partial_i v + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, d\sigma , \quad \forall i = 1,2 \dots n.$$



---

$$Lu = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

$$L^* u = \sum_{|\alpha| \le k} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha(x) v).$$

---

Si $u, v \in C^k(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega (Lu) v \, dx = \int_\Omega u (L^* v) \, dx + \int_{\partial\Omega} M(u, v, n) \, d\sigma,$$

M es lineal en n, con coeficientes que son bilineales en derivadas de u y v de orden $\le (k-1)$. M no es único y depende del orden en que se haga la integración por partes.

---

Tma de unicidad de Holgren:

$$(7) \begin{cases} Lu = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x), \\ u = \phi_0, \ \frac{\partial u}{\partial n} = \phi_1, \dots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}} = \phi_{k-1}, \quad \text{a } S. \end{cases}$$

- $S$ una hipersuperficie analítica cerca de $x_0 \in S$
- $a_\alpha$ analíticas cerca de $x = x_0$.

Entonces (7) tiene a lo más una solución de clase $C^k$ en un entorno de $x_0$.

---

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \\ y(0) = 0 \end{cases}. \qquad f \text{ analítica cerca de } \xi \in \mathbb{R}.$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \qquad a_0 = 0, \quad a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$$

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k y^k, \qquad f_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \geq 0. \quad \text{Sea } F(t) = f(y(t)).$$

$$F(0) = f(\ )$$

$$F'(t) = f^{(1)}(y(t))\, y^{(1)}(t)., \qquad F'(0) = f^{(1)}(0) y'(0).$$

$$F^{(2)}(t) = f^{(2)}(y(t))\, y'^2(t) + f^{(1)}(t)\, y^{(2)}(t), \qquad F''(0) = f^{(2)}(0)\, y'^2(0) + f^{(1)}(0)\, y^{(2)}(0)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

En general, $F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k \frac{t^k}{k!}$, donde

$$F_k = P\left( f_i, (a_\ell)_{\ell \leq k} \right),$$

$P^k$ un polinomio en sus variables con coeficientes positivos.

$$y'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} t^k.$$

e $y(t)$ será solución si

$$\begin{cases} a_{k+1} = \dfrac{1}{k+1} P^k\left( f_i, (a_\ell)_{\ell \leq k} \right), & k \geq 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

Iterando,

$$\begin{cases} a_k = Q^k(f_1, f_2, f_3, \dots, f_k), & k \geq 1. \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$Q^k$ un polinomio con coeficientes positivos en sus variables. Sabemos que

$$|f_k| \leq M \rho^{-k}, \quad \forall k \geq 0,$$

para algún $M > 0$, $\rho > 0$. Si resolvemos

$$\begin{cases} y' = \dfrac{M\rho}{\rho - y}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

la solución es

$$u(t) = \rho - (\rho^2 - 2M\rho t)^{1/2},$$

que es analítica en $t=0$, $u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$, $u_k \geq 0$, $\forall k$ y

$$u_k = Q^k(M, M\rho^{-1}, M\rho^{-2}, \dots, M\rho^{-k}).$$

Es decir, $|a_k| \leq u_k$, $\forall k \geq 0$.

Esto muestra que $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ es realmente una solución analítica de

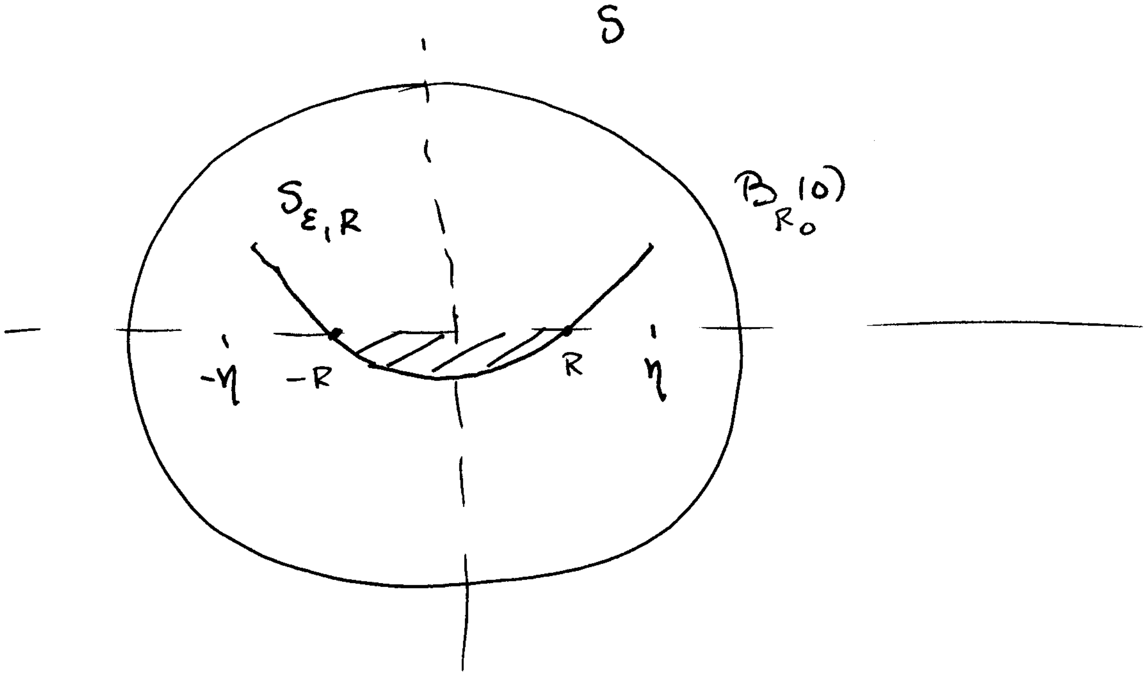
$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Dem: Podemos suponer que $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Como $S$ es no característico para (7) en $x_0 = 0$, resulta que

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(0) e_n^\alpha = a_{(0,0,\dots,0,1)}(0) \neq 0.$$

Elegimos $R_0 > 0$ pequeño tal que para algún $\rho > 0$.

$$\left| \frac{\partial^\gamma a_\alpha(x)}{\gamma!} \right| \leq M \rho^{-|\gamma|}, \text{ si } \gamma \in \mathbb{N}^n, \ |x| \leq R_0$$




Fijada $R < R_0$, $\varepsilon > 0$, denotamos

$$S_{\varepsilon,R} = \{(x', x_n) : x_n = \varepsilon(|x'|^2 - R^2)\},$$

y de la demostración del Tma. de Cauchy-Kovaleski, existe $\eta = \eta(n, M, \rho, R_0)$ tal que si $p(x)$ es un polinomio en $\mathbb{R}^n$, el problema de Cauchy

$$(8) \begin{cases} L^* v = 0, \\ v = \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dots = \dfrac{\partial^{k-2} v}{\partial n^{k-2}} = 0, & \text{en } S_{\varepsilon,R} \\ \dfrac{\partial^{k-1} v}{\partial n^{k-1}} = p(x), & \text{en } S_{\varepsilon,R}, \end{cases}$$

tiene una solución analítica $v$, definida en un entorno abierto de la clausura de

$$\Omega_{\varepsilon,R} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \ \varepsilon(|x'|^2 - R^2) \le x_n \le 0 \}, \ \text{si} \ \varepsilon \le \eta, \ R \le \eta.$$

Si $u \in C^k$ es solución de (7) con $f \equiv 0$, $\Phi_0, \Phi_1 \dots, \Phi_{k-1} = 0$, $\varepsilon, R \le \eta$ y $v$ es la solución de (8), se verifica que

$$\int_{\Omega_{\varepsilon,R}} (Lu) v \, dx = \int_{\Omega_{\varepsilon,R}} u L^* v \, dx + \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,R}} M(u,v,n) \, d\sigma.$$

En particular

$$(9) \qquad \int_{\partial\Omega_{\varepsilon,R}} M(u,v,n) \, d\sigma = 0, \quad \text{si} \quad \varepsilon, R \le \eta.$$

Ahora, $\partial\Omega_{\varepsilon,R} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde

$$\Gamma_1 = \{ (x', 0) : |x'| \le R \}, \qquad \Gamma_2 = \partial\Omega_{\varepsilon,R} \setminus \Gamma_1$$

- $u = \nabla u = D^2 u = \dots = \nabla u^{(k-1)} = 0$, en $\Gamma_1$
- $v = \nabla v = \dots = \nabla^{(k-2)} v = 0$, en $\Gamma_2$
- De todas las <u>componentes</u> del tensor asociado a

$$\sum_{i_1, i_2 \dots, i_{k-1}=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_{k-1}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

la única que es no nula es

$$\frac{\partial^{k-1} v}{\partial n^{k-1}} = \sum_{i_1, i_2 \dots, i_{k-1}=1}^{n} \frac{\partial^{k-1} v}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k-1}}} n_{i_1} n_{i_2} \dots n_{i_{k-1}} = p(x).$$

que junto con (9) y un análisis de la expresión $M(u,v,n)$, implica que

$$\int_{\Gamma_2} \gamma(x) u(x) p(x) \, d\sigma = 0, \quad \forall p \text{ polinomio en } \mathbb{R}^n,$$

donde $\gamma(x)$ es una función positiva en $S_{\varepsilon,R}$. Por tanto, 
$u \equiv 0$, en $S_{\varepsilon,R}$ si $\varepsilon, R \leq \eta$ y $u \equiv 0$ en un entorno de $x_0$.

<u>Nota</u>: Repetir la demostración para $k=1$, $n=2$, con

$$Lu = a(x,y)u_x + u_y + c(x,y)u = 0, \quad S' = \{(x,y) : y=0\}$$

y también para $k=2$, $n \geq 2$ con

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{ij} u, \quad a_{nn} \equiv 1, \quad S' = \{(x', x_n) : x_n = 0\}$$

y entenderéis el razonamiento.

---

El problema de Cauchy no tiene dependencia continua de los datos de Cauchy.

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u \equiv 0, \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_y u(x,0) = \dfrac{1}{k}\sin(kx). \end{cases}$$

La solución es

$$u(x,y) = \frac{1}{k^2}\sin(kx)\sinh(ky).$$

El dato de Cauchy tiende a cero, mientras que

$$\lim_{k\to+\infty} u(x,y) = \pm\infty,$$

dependiendo del signo de $\sin(kx)$, mientras $y>0$ o $y<0$.

---

<u>El contraejemplo de Lewy</u>

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)\partial^\alpha u, \quad a_\alpha \in C^\infty, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad f \text{ es } C^\infty$$

¿$\exists u$ una solución de $Lu = f$ definida cerca de $x_0$ en algún entorno de $x_0$? Si $f$ y $a_\alpha$ son analítica cerca de $x_0$ la respuesta es sí: existe un $\xi \in \mathbb{R}^n$

tal que $\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0$ y podemos resolver,

$$\begin{cases} Lu = f, \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = \cdots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}} = 0, \quad \text{en } S = \{x : (x-x_0)\cdot\xi = 0\}, \end{cases}$$

con $\xi$ un vector unitario tal que

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0)\xi^\alpha \neq 0.$$

En 1957 H. Lewy encontró el siguiente contraejemplo.

Tma: $L = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial}{\partial t}$, en $\mathbb{R}^3$. Si $u$ a $C^1$ de $(x,y,t)$ y verifica, $Lu = f$ en un entorno de $(0,0,0)$, con $f = f(t)$, $f$ a valores reales, entonces $f$ es analítica cerca de $t=0$.

Dem: Supongamos que $Lu = f$ en $B_R(0)\times[-R,R] \subset \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$.

$z = x+iy = re^{i\theta}$, $s = r^2$. Sea

$$V = \int_{|z|=r} u(x,y,t)\,dz = ir\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta},t)e^{i\theta}d\theta$$

$$= i\int_{\partial B_r(0)} u\,(n_1+in_2)\,d\sigma.$$

Por el tma. de la divergencia, $V = i\int_{B_r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy$

$$= i\int_0^r\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\rho e^{i\theta},t)\,\rho\,d\theta\,d\rho,$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = ir\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(re^{i\theta},t)\,d\theta = r\int_{|z|=r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z,t)\frac{dz}{z}.$$

Por tanto, si $0 \le s < R^2$, $|t| < R$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{1}{2r}\frac{\partial V}{\partial r} = \int_{|z|=r}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(z,t)\frac{dz}{2z}$$

$$= i \int_{|z|=r} \frac{\partial u}{\partial t}(z,t)\,dz + f(t)\int_{|z|=r} \frac{dz}{2z} = i\frac{\partial V}{\partial t} + \pi i f(t).$$

Si $F(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$, $U(t,s) = V(t,s) + \pi F(t)$, verifica

$$\frac{\partial U}{\partial t} + i\frac{\partial U}{\partial s} = 0, \quad \text{si } |t|<R, \ 0<s<r^2.$$

$\therefore$ $U$ es holomórfica en $|t|<R$, $0<s<R^2$; es continua en $s=0$. Además, $V(t,0)\equiv 0$; es decir, $U(t,0) = \pi F(t)$ toma valores reales. Por el principio de reflexión de Schwarz, la fórmula, $U(t,-s) = \overline{U(t,s)}$, $s<0$, da una continuación holomórfica de $U$ en la región $-R^2<s<R^2$, $|t|<R$, y $U(t,0) = \pi F(t)$ es analítica en $t$.