Ecuación de Laplace:

$$(1)\begin{cases}\Delta u = f, & \text{en } \Omega. \\ u = \varphi, & \text{en } \partial\Omega.\end{cases} \quad , \quad f\in C(\overline{\Omega}),\ \varphi \in C^2(\overline{\Omega})$$

Tma: (1) tiene solución única en $C^2(\overline{\Omega})$.

Dem: $u = u_1 - u_2$, verifica

$$\begin{cases}\Delta u = 0, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega.\end{cases}$$

$$\Delta u^2 = \nabla.(\nabla u^2) = 2\nabla.(u\nabla u) = 2\left[u\Delta u + 2|\nabla u|^2\right]$$

$$= 2|\nabla u|^2.$$

Integrando en Ω,

$$(2)\ \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma = 0 \ , \ \therefore\ u\equiv 0, \text{ en } \overline{\Omega}$$

$$(3)\begin{cases}\Delta u = f, & \text{en } \Omega. \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi, & \text{en } \partial\Omega.\end{cases} \quad , \quad f\in C(\overline{\Omega}),\ \psi\in C^1(\overline{\Omega}).$$

Tma Si (3) tiene solución en $C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_{\partial\Omega}\psi\,d\sigma = \int_\Omega f\,dx,$$

y en tal caso es única excepto por constantes.

Dem: De (2), $\nabla u\equiv 0$ en Ω y $u = \text{const.}$ en Ω.

O. Perron (1880 - 1975)

P. Lax (1926-)

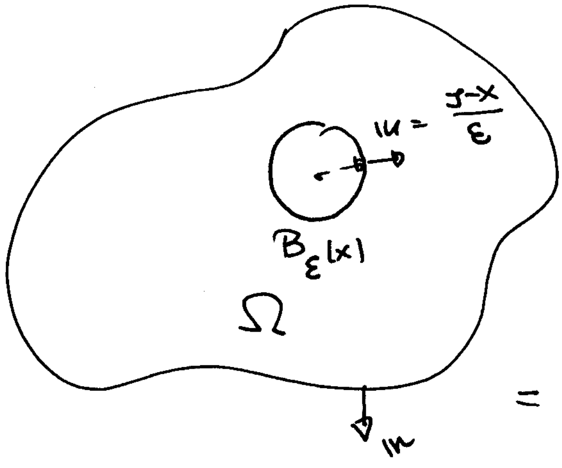
A. N. Milgram (1912-61)

$u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω, si $\Delta u = 0$ en Ω.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n(2-n)} \dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \geq 3 \\[2mm] \dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & n = 2. \end{cases}$$

$$\Delta_y \Gamma(x-y) = \delta_x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$



$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ es C^1, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta\varphi(y)\,dy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \Gamma(x-y)\Delta\varphi(y)\,dy$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(x)} \Delta_y \Gamma(x-y)\varphi(y)\,dy \right.$$

$$\left. + \int_{\partial(\Omega \setminus B_\varepsilon(x))} \left[\Gamma(x-y)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial \nu_y}\Gamma(x-y)\varphi(y) \right] d\sigma_y \right\}$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left[\Pi(x-y)\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n_y}\Pi(x-y)\varphi \right] d\sigma_y$$

$$+ \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[- \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Pi(x-y)\frac{\partial \varphi}{\partial n_y}\, d\sigma + \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \varphi\, d\sigma \right]$$

$$= \int_{\partial\Omega} \Pi(x-y)\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n_y}\Pi(x-y)\varphi\, d\sigma + \varphi(x), \quad \text{si } x \in \Omega.$$

$$(+\,0), \quad \text{si } x \notin \Omega.$$

$\therefore$

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \Pi(x-y)\,\Delta\varphi(y)\,dy \qquad (3')$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y}\Pi(x-y)\varphi(y) - \Pi(x-y)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma_y,$$

si $x \in \Omega$, $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$.

Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$ en Ω, se tiene que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega} \frac{(y-x)\cdot n_y}{|x-y|^n}\, u(y)\, d\sigma(y) \qquad (4)$$

$$- \frac{1}{\omega_n(2-n)}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}\frac{\partial u}{\partial n_y}\, d\sigma_y,$$

si $x \in \Omega$. $(=0$, si $x \notin \Omega)$.

Tma: Las funciones armónicas son analíticas de variable real en el interior de su dominio. (4)

Dem: Consecuencia de (4)

Nota: El problema de Cauchy para Δ no tiene en general solución.

Dem: Si $u \in C^2(\overline{B}_R^+)$, $B_R^+ = \{(x', x_n) : x_n > 0\}$, verifica

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si } x_n > 0, \\ u(x', 0) = 0, & u_{x_n}(x', 0) = g(x'), \end{cases}$$

la función

$$\tilde{u}(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & \text{si } x_n \geq 0. \\ \\ -u(x', -x_n), & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

es $C^2(\overline{B}_R)$ y armónica en B_R. Esto implica que $u_{x_n}(x', 0) = g(x')$ es analítica de variable real.

- Si $w \in C^2(\overline{\Omega})$ verifica $\Delta w = 0$ en Ω y

$$G(x, y) = \Pi(x - y) + w(y),$$

$\Delta_y G = \delta_x$. en Ω y de (3'),

$$\varphi(x) = \int_\Omega G(x, y) \Delta\varphi(y)\, dy \qquad (5)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y)\varphi(y) - G(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial n_y}\, d\sigma_y,$$

si $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Si elegimos w tal que

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta w = 0, & \text{en } \Omega \\ w = -\Pi(x-\cdot), & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

resulta que

$$\begin{cases} \Delta_y G(x,y) = \delta_x, & \text{en } \Omega, \\ G(x,\cdot) = 0, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

y

$$\varphi(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta\varphi(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y, \quad (5')$$

para $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$: ¡una posible forma de obtener la solución del problema de Dirichlet no homogéneo

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

como

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)\varphi(y)\,d\sigma_y \;!$$

- Si $\Delta u = f$, en $B_R(x_0)$ y $v(x) = u(x_0 + Rx)$, entonces
$$\Delta v(x) = R^2 f(x_0 + Rx), \quad \text{en } B_1(0).$$

- Si $\Delta u = f$ y $v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$, entonces
$$\Delta v = |x|^{-n-2} f(x/|x|^2).$$

- Los resultados anteriores implican que

$$w(y) = -\left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} \Gamma\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right), \quad |y| < R$$

es una solución de (6) si $\Omega = B_R(0)$, y que

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n} \Gamma\left(x - \frac{R^2 y}{|y|^2}\right), & \text{si } y \neq 0. \\ \Gamma(x) - \Gamma(R), & \text{si } y = 0. \end{cases} \qquad (6')$$

es la función de Green para Δ en $\Omega = B_R(0)$.

Tma:

$$(7) \qquad u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \displaystyle\int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y, & \text{si } x \in B_R \\ \varphi(x), & \text{si } x \in \partial B_R. \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } B_R, \\ u = \varphi, & \text{en } \partial B_R. \end{cases}$$

Además, $u \in C^\infty(B_R) \cap C(\overline{B_R})$, si $\varphi \in C(\partial B_R)$.

Tma: Si $\Delta u = 0$, en $\overline{B}_R(x_0)$, $u \in C^2(\overline{B}_R(x_0))$, entonces

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_R(x_0)} u\, d\sigma = \fint_{B_R(x_0)} u(x)\, dx.$$

Tma: Si $u \in C^2(\overline{B}_R(x_0))$, $\Delta u \geq 0$ (≤ 0) en $\overline{B}_R(x_0)$, entonces

$$u(x_0) \underset{(\geq)}{\leq} \fint_{\partial B_R(x_0)} u(y)\, d\sigma_y ,$$

$$u(x_0) \underset{(\geq)}{\leq} \fint_{B_R(x_0)} u(y)\, dy .$$

Dem: De (6'), $G(x,y) = G(y,x)$, $\Delta_x G(x,y) = 0$, en $B_R \setminus \{y\}$

$$\frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \frac{1}{|x-y|^n} = \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y), \quad \text{en } \partial B_R(0), \qquad (7')$$

si $x \in B_R$, $y \in \partial B_R$. Además, (7') es armónica en B_R como función de x, si $y \in \partial B_R$ y (7) es armónica en B_R, si $\varphi \in C(\partial B_R)$. (5') con $\varphi \equiv 1$ y $\Omega = B_R(0)$, implica que

$$\int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y)\, d\sigma_y = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{d\sigma_y}{|x-y|^n} = 1, \text{ si}$$

$x \in B_R$. Fijado $x_0 \in \partial B_R$,

$$u(x) - \varphi(x_0) = \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) (\varphi(y) - \varphi(x_0))\, d\sigma_y$$

$$= \int_{\partial B_R(0) \cap B_\delta(x_0)} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))\, d\sigma_y$$

$$+ \int_{\partial B_R(0) \setminus B_\delta(x_0)} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)(\varphi(y) - \varphi(x_0))\, d\sigma_y = I(x) + II(x).$$

Como φ es continua en x_0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(y) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon, \quad \text{si} \quad y \in B_\delta(x_0) \cap \partial B_R(0),$$

por lo que

$$|I(x)| \leq \varepsilon \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)\, d\sigma_y = \varepsilon.$$

Además, si $x \in B_{\delta/2}(x_0) \cap B_R$, $y \in (\partial B_R) \setminus B_\delta(x_0)$,

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y) \leq C(n,\delta)\, |x - x_0|.$$

Es decir,

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \overline{B}_R}} |u(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Dem: De (5') con $\Omega = B_R$, $\varphi = u$ y (6'),

$$u(x) = \int_{B_R} G(x,y)\,\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial B_R} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)\,u(y)\,d\sigma_y ,$$

$G(x,y) \leq 0$, si $x, y \in B_R$, $\frac{\partial}{\partial n_y} G(0,y) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}}$,

si $y \in \partial B_R$. Por tanto,

$$u(0) = ⨍_{\partial B_R} u(y)\,d\sigma_y ,$$

si $\Delta u = 0$ en B_R. Si $\Delta u \geq 0$ (≤ 0),

se sigue que

$$u(0) \underset{(\geq)}{\leq} ⨍_{\partial B_R} u(y)\,d\sigma_y .$$

En general, si u es armónica en $\overline{B}_R(x_0)$, aplicar el resultado anterior a $v(x) = u(x+x_0)$ en $B_R(0)$.

Def: Una función u en $C(\Omega)$ que verifica

$$u(x) \leq ⨍_{\partial B_R(x)} u\,d\sigma_y , \quad \text{si } \overline{B}_r(x) \subset \Omega, \ r \leq r(x),$$

con $r(x) > 0$.

se dice que es subarmónica en Ω. El Tma. anterior muestra que toda u en $C^2(\Omega)$ que verifica, $\Delta u \geq 0$ en Ω, es subarmónica en Ω.

Si u en $C(\Omega)$ verifica

$$u(x) \geqslant \fint_{\partial B_r(x)} u \, d\sigma_y, \quad \text{si } \overline{B_r(x)} \subset \Omega, \; r \leq r(x) \text{ con } r(x) > 0,$$

u se dice superarmónica en Ω.

<u>Tma</u> (<u>Principio del máximo débil</u>) (PMD)

Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω acotado, $\Delta u \geqslant 0$ en Ω. Entonces,

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u.$$

<u>Dem</u> $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$, $\Delta u_\varepsilon \geq 2n\varepsilon$ en Ω. Si $x_0 \in \Omega$ verifica que

$$u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_0), \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

entonces $\nabla u_\varepsilon(x_0) = 0$ y $D^2 u_\varepsilon(x_0) \leq 0$. Es decir,

$$\Delta u_\varepsilon(x_0) = \text{traza}\, D^2 u_\varepsilon(x_0) \leq 0,$$

y $x_0 \notin \Omega$. Por lo que

$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \leq (\max_{\partial\Omega} u) + \varepsilon \max_{x\in\Omega} |x|^2.$$

Hacer $\varepsilon \to 0^+$.

<u>Tma</u>: Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ / $\Delta u = 0$ en Ω, Ω acotado. Entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|.$$

<u>Dem</u>: Por Tma. anterior,

$$\max_{\overline{\Omega}} (\pm u) \leq \max_{\partial\Omega} |u|.$$

<u>Tma</u>: Toda u en $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ está determinada por los valores de Δu en Ω y de u en $\partial\Omega$.

<u>Tma</u>: (<u>Principio del</u> máximo <u>fuerte</u> (PMF))

Suponemos que $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u \geq 0$ en Ω y $\sup_{\Omega} u < +\infty$. Entonces

$$u(x) < \sup_{\Omega} u, \quad \forall x \in \Omega$$

o u es constante en Ω

Dem: Sea $M = \sup_{\Omega} u$. Suponemos que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = M$. Sea

$$H = \{ x \in \Omega : \ u(x) = M \}.$$

Como $u \in C(\Omega)$, H es cerrado en Ω. Si $x \in H$ y $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$,

$$M = u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma_y ;$$

es decir,

$$0 \leq \fint_{\partial B_r(x)} (u(y) - M)\, d\sigma_y$$

y $u - M \leq 0$ en Ω. Lo anterior implica que

$$B_r(x) \subset H$$

y que H es abierto en Ω. Como suponemos que Ω es conexo, necesariamente,

$$u(x) \equiv M, \text{ en } \Omega .$$

Nota: El principio del máximo fuerte es también cierto para u en $C(\Omega)$ que es subarmónica en Ω, mientras $\sup_{\Omega} u < +\infty$.

En particular, si Ω es acotado y $u \in C(\overline{\Omega})$ es subarmónica en Ω, u no puede tener un máximo local en el interior de Ω sin ser constante y

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

En las mismas condiciones, $u \in C(\overline{\Omega})$ no puede tener mínimos locales en Ω sin ser constante y

$$\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Lo último es consecuencia de que $-u$ es subarmónica en Ω.

<u>Tma</u>: Existe $N = N(n)$ tal que si $u \in C^2(\overline{B_R(x_0)})$ es armónica en $B_R(x_0)$, entonces

$$(8) \qquad \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(B_{R/2}(x_0))} \leq N^{|\alpha|+1}\,\alpha!\,R^{-|\alpha|}\,\|u\|_{L^\infty(B_R(x_0))}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

<u>Dem</u>: Con el cambio de escala

$$u_R(x) = u(x_0 + Rx), \quad \Delta u_R = 0, \text{ en } B_1(0),$$

$$\|u_R\|_{L^\infty(B_1)} = \|u\|_{L^\infty(B_R(x_0))}$$

es suficiente probar para $x_0 = 0$, $R = 1$. Sea entonces $u \in C^2(\overline{B}_1)$ y $\Delta u = 0$ en B_1.

Sabemos que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} \frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\, u(y)\, d\sigma_y \,, \quad \text{si } \; x\in B_1$$

Si $y\in\partial B_1$, $M(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\,\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ es analítica de variable real como función de x en B_1 y existe $N=N(n)$ tal que

$$|\partial_x^\alpha N(x,y)| \le N^{|\alpha|+1}\,\alpha! \,,$$

si $x\in B_{\frac{1}{2}}$, $y\in\partial B_1$. Como

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1} \partial_x^\alpha M(x,y)\, u(y)\, d\sigma_y \,, \quad \text{para todo } x\in B_1,$$

se sigue que

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(B_{\frac{1}{2}})} \le N^{|\alpha|+1}\,\alpha!\, \|u\|_{L^\infty(B_1)} \,, \quad \text{si } \alpha\in\mathbb{N}^n.$$

<u>Nota</u>: Si $\Omega = B_R(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $R>0$, la solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } B_R(x_0), \\ u = \varphi, & \text{en } \partial B_R(x_0), \end{cases}$$

es

$$u(x) = \frac{R^2-|x-x_0|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B_R(x_0)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma_y$$

<u>Dem</u>: Cambio de variables, $\tilde{u}(x) = u(x+x_0)$, $x\in B_R(0)$.

Método de Perron

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, $\varphi \in C(\partial\Omega)$.

$$S_\varphi = \{ u \in C(\overline{\Omega}) : u \text{ es subarmónica en } \Omega \text{ y } u \leq \varphi \text{ en } \partial\Omega \}.$$

- $S_\varphi \neq \phi$, pues $m = -\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ está en S_φ.
- Si existe $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} \Delta w = 0, & \text{en } \Omega, \\ w = \varphi, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \qquad (1)$$

y $u \in S_\varphi$, entonces $u \leq w$ en Ω.

Dem: $u - w \in C(\overline{\Omega})$ es subarmónica en Ω y por (PMF), $\max\limits_{\Omega} (u-w) \leq \max\limits_{\partial\Omega} (u-\varphi) \leq 0$.

Por tanto, si (1) tiene solución w, necesariamente,

$$(2) \qquad w(x) = \sup_{u \in S_\varphi} u(x), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Tma: Si $\varphi \in C(\partial\Omega)$, la función w_φ definida por (2) es armónica en Ω, $w_\varphi \in C^\infty(\Omega)$

y $w_\varphi \le \varphi$ en $\partial\Omega$.

El método de Perron usa los siguientes lemas.

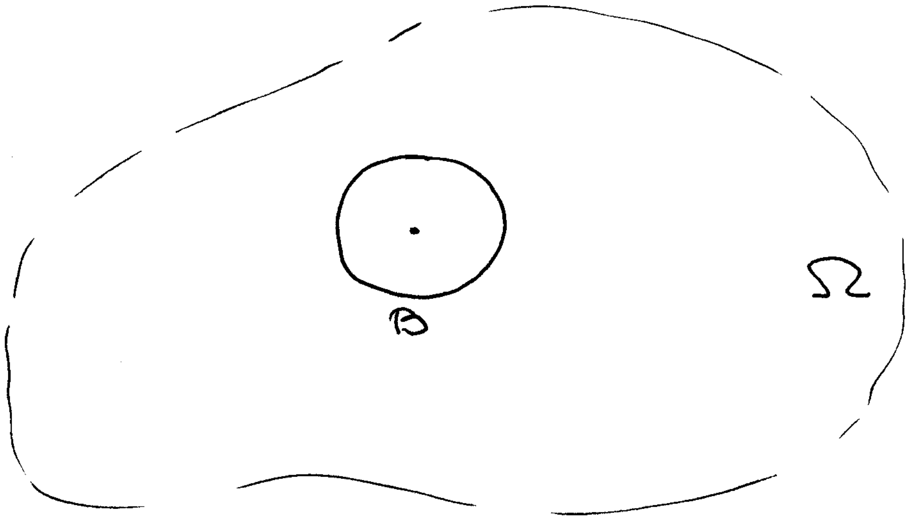
<u>Lema 1:</u> Si $u \in C(\overline{\Omega})$ es subarmónica en Ω, $\tilde{u}$ en $C(\overline{B}) \cap C^2(B)$ es armónica en B, $\tilde{u} = u$ en ∂B, $B = B_R(x_0)$, $\overline{B} \subset \Omega$ y

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x \in \overline{\Omega} \setminus B, \\ \tilde{u}(x), & \text{si } x \in \overline{B}. \end{cases}$$

U es el levantamiento de u en Ω relativo a B

Entonces, $U \in C(\overline{\Omega})$, U es subarmónica en Ω y $U \ge u$ en $\overline{\Omega}$.

<u>Dem</u>



Si $x \in B$ o $x \in \Omega \setminus \overline{B}$, es claro que

$$U(x) \le \fint_{\partial B_r(x)} U(y)\, d\sigma_y, \quad \text{para } 0 < r \le r(x),$$

para algún $r(x) > 0$. Si $x \in \partial B$, $U(x) = u(x) = \tilde{u}(x)$.

Además, $u - \tilde{u}$ es subarmónica en B, continua en $\overline{B}$ con $u - \tilde{u} \le 0$ en ∂B. Como

$$\max_{\overline{B}} (u - \tilde{u}) = \max_{\partial \overline{B}} (u - \tilde{u}) = 0,$$

tendremos que $u \leq \tilde{u}$ en $\overline{B}$. Entonces, si $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$,

$$\fint_{\partial B_r(x)} U(y)\,d\sigma_y \geq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\,d\sigma_y \geq u(x) = U(x).$$

<u>Lema 2</u>: Si $u_1, u_2, \ldots, u_N \in C(\overline{\Omega})$ y son subarmónicas en Ω, entonces

$$u(x) = \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$

está en $C(\overline{\Omega})$ y es subarmónica en Ω.

<u>Dem</u>: Si $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$ y $\tilde{u}$ es la solución de

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, & \text{en } B_r(x_0) \\ \tilde{u} = u, & \text{en } \partial B_r(x_0) \end{cases}$$

se verifica que $u_i - \tilde{u} \leq 0$ en $\overline{B_r(x_0)}$, para cada $i = 1, \ldots, N$. Es decir,

$$u(x_0) = \max_{1 \leq i \leq n} u_i(x_0) \leq \tilde{u}(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u(y)\,d\sigma_y.$$

Ahora mostramos que w_φ es armónica en Ω.

<u>Dem</u>: Como $\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ es armónica en Ω, toda u en S_φ verifica que $u \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$ y $w_\varphi(x) \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, $\forall x \in \Omega$. Si $x_0 \in \Omega$, existen $u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$ en S_φ tal que

$$u_1(x_0) < u_2(x_0) \leq \cdots \leq u_n(x_0) \leq \cdots \leq w_\varphi(x_0)$$

y $\lim_{n\to+\infty} u_\varphi(x_0) = w_\varphi(x_0)$. Como

$$\max\{u_1, u_2, \ldots, u_n, -\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\}$$

está en S_φ, podemos suponer que

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq w_\varphi \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)},$$

en todo $\overline{\Omega}$ y $\lim_{n\to\infty} u_n(x_0) = w_\varphi(x_0)$.

Sea $B = B_R(x_0)$, $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$ y U_n el levantamiento de u_n a Ω relativo a B. Por el PMF se verifica que

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n \cdots \leq w_\varphi \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)},$$

en $\overline{\Omega}$, $u_n \leq U_n$ en todo $\overline{\Omega}$, $\forall n \geq 1$ y

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(x_0) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x_0) = w_\varphi(x_0).$$

Como

$$\|U_n\|_{L^\infty(B)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)},$$

las acotaciones en el interior para las derivadas de funciones armónicas muestran que dado $0<\varepsilon<1$, existe $N = N(n, \varepsilon, R)$ tal que

$$\|\partial_x^3 u_n\|_{L^\infty(B_{\varepsilon R}(x_0))} + \|\partial_x^2 u_n\|_{L^\infty(B_{\varepsilon R}(x_0))}$$

$$+ \|\partial_x u_n\|_{L^\infty(B_{\varepsilon R}(x_0))} + \|u_n\|_{L^\infty(B_R(x_0))}$$

$$\leq N(\varepsilon, R)\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \quad \text{si } n \geq 1.$$

En particular, existe una subsucesión

$$\{u_{n_1}, u_{n_2}, \dots, u_{n_k} \dots\}, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

de

$$\{u_1, u_2, \dots, u_n \dots\}$$

tal que $\{u_{n_k}\}$ y sus dos primeras derivadas, convergen uniformemente en compactos de $B_R(x_0) = B$ hacia una función <u>armónica</u> u a $B_R(x_0)$ que verifica:

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq u \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}, \quad \text{en } B_R(x_0)$$

$$u \leq w_\varphi, \quad \text{en } B_R(x_0),$$

$$u(x_0) = w_\varphi(x_0).$$

Si probamos que $u = w_\varphi$ en $B_R(x_0)$, concluimos que w_φ es armónica en Ω. Si suponemos que $u = w_\varphi$ en $B_R(x_0)$ es falso, existe $\tilde{x}_0 \in B_R(x_0)$ tal que

$$u(\tilde{x}_0) < w_\varphi(\tilde{x}_0).$$

y podemos encontrar una sucesión

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq v_1 \leq v_2 \ldots \leq v_n \ldots \leq w_\varphi \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

en S_φ tal que

$$U(\hat{x}_0) < v_1(\hat{x}_0) \leq v_2(\hat{x}_0) \leq \ldots \leq v_n(\hat{x}_0) \leq \ldots \leq w_\varphi(\hat{x}_0),$$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(\hat{x}_0) = w_\varphi(\hat{x}_0).$$

Sea $w_n = \max\{v_n, U_n\}$ y $\overline{W}_n$ el levantamiento de w_n a Ω relativo a $B_R(x_0)$. Entonces,

$$-\|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \overline{W}_1 \leq \overline{W}_2 \leq \ldots \leq \overline{W}_n \leq \ldots \leq w_\varphi \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$$

$$U_n \leq \overline{W}_n \leq w_\varphi$$

en $\overline{\Omega}$, y

$$\overline{W}(x) = \lim_{n\to+\infty} \overline{W}_n(x) \geq \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = U(x), \text{ en } \overline{\Omega}.$$

También, $\overline{W}$ es armónica en $B_R(x_0)$ y se verifica:

$$\begin{cases} U - \overline{W} \leq 0 & \text{en } B_R(x_0) \\ U(x_0) - \overline{W}(x_0) = 0, \\ U(\hat{x}_0) - \overline{W}(\hat{x}_0) < 0, \end{cases}$$

que es contradictorio por el PMF.

Comportamiento en la frontera de la solución de Perron.

w_φ es un candidato natural para la solución del problema de Dirichlet. Por ahora, sabemos que $w_\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $w_\varphi \in L^\infty(\Omega)$, si $\varphi \in C(\partial\Omega)$ y debemos buscar condiciones, que garanticen que $w_\varphi \in C(\overline{\Omega})$ y $w_\varphi = \varphi$ en $\partial\Omega$.

Def: $\xi \in \partial\Omega$, $Q = Q_\xi \in C(\overline{\Omega})$ es una barrera en ξ para Ω, si Q_ξ es superarmónica en Ω, $Q_\xi > 0$ en $\overline{\Omega}\setminus\{\xi\}$ y $Q_\xi(\xi) = 0$.

Def: $Q = Q_\xi$ es una barrera local en $\xi \in \partial\Omega$, si Q está en $C(\overline{\Omega \cap B_R(\xi)})$, $Q > 0$ en $B_R(\xi) \cap \Omega \setminus \{\xi\}$, $Q(\xi) = 0$.

La existencia de una barrera local en $\xi \in \partial\Omega$, permite construir otra global:

Dem:

$$\tilde{Q}(x) = \begin{cases} \min\{\alpha, Q(x)\}, & x \in \overline{\Omega \cap B_R(\xi)}, \\ \alpha, & x \in \overline{\Omega} \setminus B_R(\xi), \end{cases}$$

$\square$

donde $\alpha = \inf\limits_{x \in \Omega \cap B_R(\xi)} Q(x)$

Def: $\xi \in \partial\Omega$ es un punto regular para el problema de Dirichlet
en Ω, si existe una barrera global en ξ para Ω.

Tma: Sea $\xi \in \partial\Omega$ un punto regular y $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Entonces

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \overline{\Omega}}} w_\varphi(x) = \varphi(\xi).$$

Dem: Si $M = \|\varphi\|_{L^\infty(\partial\Omega)}$, sabemos que $-M \le w_\varphi \le M$ en Ω y $\Delta w_\varphi = 0$, en Ω. Sea $Q = Q_\xi$ una barrera global para ξ en Ω. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q.

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon, \quad \text{si } x \in \partial\Omega \cap B_\delta(\xi).$$

En particular,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon \le \varphi(x) \le \varphi(\xi) + \varepsilon, \quad \text{si } x \in \partial\Omega \cap B_\delta(\xi).$$

Las funciones:

$$L(x) = \varphi(\xi) - \varepsilon - \frac{Q(x)}{\inf\limits_{\overline{\Omega}\setminus B_\delta(\xi)} Q},$$

$$S(x) = \varphi(\xi) + \varepsilon + \frac{Q(x)}{\inf\limits_{\overline{\Omega}\setminus B_\delta(\xi)} Q}$$

verifican, $L, S \in C(\overline{\Omega})$, $L \le \varphi \le S$ en $\partial\Omega$, L y S son respectivamente subarmónica y superarmónica en Ω; es decir,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - \frac{Q(x)}{\inf\limits_{\overline{\Omega}\setminus B_\delta(\xi)} Q} \leq w_\varphi(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + \frac{Q(x)}{\inf\limits_{\overline{\Omega}\setminus B_\delta(\xi)} Q},$$

$$|w_\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + \frac{Q(x)}{\inf\limits_{\overline{\Omega}\setminus B_\delta(\xi)} Q}, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Como $Q \in C(\overline{\Omega})$, $Q(\xi) = 0$, se sigue que

$$\limsup_{\substack{x \to \xi \\ x \in \overline{\Omega}}} |w_\varphi(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

$\square$

<u>Tma</u>: El problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \qquad \varphi \in C(\partial\Omega),$$

tiene una solución en $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, para toda $\varphi \in C(\partial\Omega)$ si y sólo si todos los puntos ξ de $\partial\Omega$ son regulares.

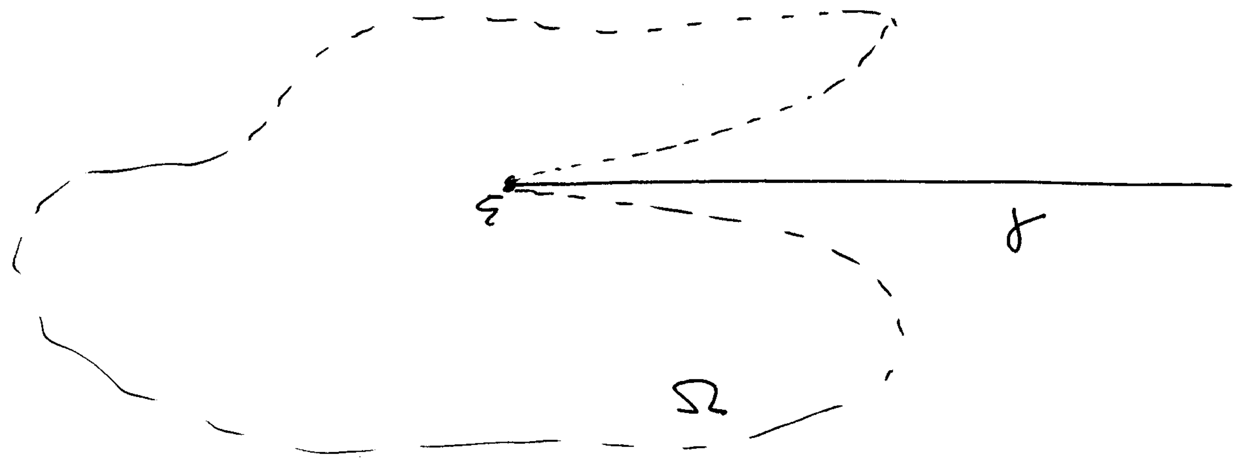
<u>Dem</u>

($\Rightarrow$) Claro del Tma. anterior.

($\Leftarrow$) Si $\varphi(x) = |x - \xi|$, $x \in \partial\Omega$, $Q_\xi = w_\varphi$ es una barrera global en Ω para ξ en $\partial\Omega$.

<u>Algunas condiciones que garantizan que $\xi \in \partial\Omega$ es regular.</u>

① En $n=2$, si $\exists\, \gamma$ curva simplemente conexa en $\mathbb{C}\setminus\Omega$ que conecta a $\xi \in \partial\Omega$ con el punto del infinito ∞



En tal caso $\mathbb{C}\setminus\gamma$ es simplemente conexo y existe una rama analítica de $\log(z-\xi)$, en $\mathbb{C}\setminus\gamma$,

$$\log(z-\xi) = \log|z-\xi| + i\theta(z) \qquad \theta : \mathbb{C}\setminus\gamma \to \mathbb{R},$$

donde θ es una función armónica en $\mathbb{C}\setminus\gamma$ que mide ángulos de forma continua en $\mathbb{C}\setminus\gamma$; es decir,

$$z-\xi = |z-\xi|\, e^{i\theta(z-\xi)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\gamma.$$

En tal caso,

$$Q_\xi(x) = -\mathrm{Re}\,\frac{1}{\log(z-\xi)},$$

es armónica en $B_{\frac{1}{2}}(\xi)\cap\Omega$ y es una barrera local.

Condición de bola exterior:

$n\geq 2$, $\xi\in\partial\Omega$, y $\exists\, B_R(\eta)\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$ t.q. $B_R(\eta)\cap\overline{\Omega}=\{\xi\}$.

En tal caso,

$$\Theta_\xi(x) = \begin{cases} \log \dfrac{|x-\eta|}{R}, & \text{si } n=2, \\[2ex] \dfrac{1}{R^{n-2}} - \dfrac{1}{|x-\eta|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

es una barrera local para ξ en Ω.

Para resolver el problema de Dirichlet no homogéneo

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

se verifica que

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y) f(y)\, dy = \Gamma * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

está en $C^2(\mathbb{R}^n)$, si $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^n$ (Ver L. C. Evans, Partial Differential Equations, AMS, pág. 22-25) y la solución única en $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de (1) es $u = w + v$, donde

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & \text{en } \Omega, \\ v = \varphi - w, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$