ANÁLISIS FUNCIONAL. Enero 2006

Escribir al final de cada problema el nombre y enunciado de todos los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilicéis para su resolución. Omitir repeticiones.

1. Probar las siguientes afirmaciones:

- La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ está en $L^p(0,1)$ si $1 \leq p < 2$ y $f \notin L^2(0,1)$.
- $f(x,y) = \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}(1+x^2+y^2)}$ es integrable en $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

2. Calcular los límites:

- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} ne^{-n^2x^2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$.
- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{(1+x)(1+nx)} dx$.

3. Sea $F(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy}}{1+y^2} dy$ si $x \geq 0$.

- Probar que F es continua en $[0,+\infty)$.
- Probar que F es derivable en $(0,+\infty)$ y dar una fórmula para su derivada.
- ¿Es F' monótona?. Calcular el límite de F' en 0.

4. Si $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1+(x-y)^2} dy$, probar las siguientes afirmaciones:

- Tf es una función continua en $\mathbb{R}$ si $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- T es un operador lineal y acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$ y $\|T\| \leq \pi$.
- T es un operador lineal y acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y $\|T\| \leq 1$.

5. Sea $A = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ y } |y-x| \leq e^{-x}\ \}$.

- Mostrar que A es un conjunto medible en $\mathbb{R}^2$.
- ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es integrable sobre A la función $f(x,y) = e^{ax}$?

6. Enunciar y demostrar la desigualdad de Hölder.

ANÁLISIS FUNCIONAL. Setiembre 2006

Escribir al final de cada problema el nombre y enunciado de todos los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilicéis para su resolución. Omitir repeticiones.

1. Calcular los siguientes límites:

- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} \frac{x^2}{1+x^2}\, dx.$
- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{(1+x)(1+n^2x)}}\, dx.$
- Si $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \chi_{(k-1,k+1]}\, dx = \frac{\pi^2}{6} \ .$$

2. Si $f(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}$,

- Probar que f es integrable en $(0,+\infty) \times (1,\pi)$.
- Mostrar que

$$g(x) = \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}$$

es integrable en $(0,+\infty)$ y calcular la integral de g sobre $(0,+\infty)$.

3. Sea $F(x) = \int_0^2 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{y(2-y)}}\, dy$, si $x \in \mathbb{R}$.

- Probar que F es continua en $\mathbb{R}$.
- Probar que F es derivable en $\mathbb{R}$ y dar una fórmula para su derivada.
- ¿Es F de clase C^2 en $\mathbb{R}$?

4. Si $Tf(x) = \int_0^x (x-y) f(y)\, dy$, probar las siguientes afirmaciones:

- Tf es una función continua en $[0,1]$ si $f \in L^2(0,1)$.
- T es un operador lineal y acotado de $L^2(0,1)$ en $L^2(0,1)$ y $\|T\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. ¿Cuál es el valor de los siguientes límites si f es integrable en $\mathbb{R}$?

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[n,n+1)} f(x)\, dx \text{ y } \lim_{n\to+\infty} \int_{[n,+\infty)} f(x)\, dx \ .$$

6. Enunciar y demostrar los siguientes resultados de teoría:

- El Lemma de Fatou.
- Lemas o teoremas relacionados con medidas, el paso al límite y familias monótonas crecientes de conjuntos o de funciones medibles.