Tema I

1.1 La integral de Riemann y sus limitaciones

Riemann (1826-1866).

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotadas $-\infty<a<b<+\infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \inf\{U(f,P): P \text{ part.}\} = \sup\{L(f,P): P \text{ part.}\}.$$

Def: $A\subset[a,b]$ tiene contenido o "longitud" si $\chi_A(x)$ es integrable de Riemann, y en dicho caso podemos definir:

$$l(A)=\int_a^b \chi_A(x)\,dx.$$

Tma: $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ acotada, $-\infty<a<b<+\infty$. f es int. de Riemann sii $D=\{x\in[a,b]: f \text{ es discont. en } x\}$ tiene medida nula, es decir, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ familia de intervalos abiertos t.q. $D\subset\bigcup_j I_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j)<\varepsilon$. También, $A\subset[a,b]$ tiene contenido o longitud sii ∂A tiene medida nula.

- $f=\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ no es integrable de Riemann y no puede calcular la longitud de $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Sería deseable poder "medir" más conjuntos.

Tma: Si $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable de Riemann y $\lim_{n\to+\infty} f_n=f$ uniformemente en $[a,b]$, entonces f es integrable de Riemann y

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

- $$f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=p/q,\ (p,q)=1,\ q\le n\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ es int. de Riemann $\forall n\geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ que no es integrable de Riemann.

Sería deseable que para poder conmutar límites con integración no tuviéramos que pedir convergencia uniforme. [Claramente,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \quad \forall n \quad y \quad \exists \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0,$$

luego ¿cuál es la diferencia entre $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ y $g \equiv 0$?.

• Si $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ es integrable de Riemann$\}$ y definimos la norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$, resulta que $(X, \|\cdot\|_1)$ no es un espacio normado completo, y para entender su completado necesitaremos construir una nueva forma de "medir conjuntos" (la medida de Lebesgue).

Tma: Si $f \in C([a,b])$, existe $f'(x)$ $\forall x \in [a,b]$ y f' es integrable de Riemann, entonces

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Esta versión del TFC tampoco es totalmente satisfactoria y las deficiencias que presenta se pueden resolver con la teoría de la medida .....

1.2 Medidas, σ-álgebras y medidas exteriores.

Def: X un conjunto. Una σ-álgebra en X es una familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$

iii) Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$.

Ej: i) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$

ii) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$

iii) $\mathcal{F} \subset X$, la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, y es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{F}$.

$E = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ es int. Riemann en $[0,1] \}$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

$(E, \|\cdot\|_1)$ es un espacio normado, pero no es completo.

Dem:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < \dfrac{1}{n} \end{cases}, \quad f_n \in E \ \forall n.$$

$$\|f_n - f_m\| = \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{x}} \le \frac{2}{\sqrt{n}}$$ si $m > n$. $\therefore \{f_n\}$ es de Cauchy en E. Si $\{f_n\} \to f$ en E, se tendría que

$$\int_a^1 \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx \le \int_a^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx + \int_a^1 \left| f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx$$

$$= \int_a^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx \le \|f - f_n\|_1 \quad \text{si } n > \frac{1}{a}$$

y pasando al límite $\therefore$ $$\int_a^1 \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx = 0 \quad \forall\, 0 < a \le 1$$

En particular $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en $D = \{ x \in [0,1] \,/\, f$ es continua en $x \}$. Como $[0,1] \setminus D$ tiene medida nula, concluimos que $\sup_{[0,1]} f(x) = +\infty$, luego f no es int. de Riemann en $[0,1]$. (contradicción).

iv) En $\mathbb{R}$, si $\mathcal{F} = \{$abiertos de $\mathbb{R}\}$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$ se denomina σ-álgebra de Borel y sus elementos conjuntos de Borel. La denotaremos $\mathcal{B}$. ③

Def.: Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medida. Una medida en $(X, \mathcal{A})$ es una función de conjunto

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$$

tal que:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) Si $\{E_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathcal{A}$ es disjunta, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j)$$ (propiedad aditiva o aditivamente numerable).

A la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le llama espacio medible.

Ej.: i) $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ o $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 \notin E \\ 1 & \text{si } x_0 \in E. \end{cases}$$ donde $x_0 \in \mathbb{R}$ está fijo.

$\mu = \delta_{x_0}$ se llama medida de Dirac.

ii) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), c)$, donde c es la medida de contar:

$$c(E) = \begin{cases} +\infty & \text{si } E \text{ es infinito} \\ \#(E) & \text{si } E \text{ es finito.} \end{cases}$$

iii) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} : E$ es numerable o E^c es numerable$\}$ es σ-álgebra y

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es numerable.} \\ 1 & \text{si } E^c \text{ es numerable} \end{cases}$$

es medida en $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

iv) En probabilidad, un espacio de probabilidad es un espacio medible $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que $\mu(X) = 1$.

Tma: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible. Entonces,

i) Si $A, B \in \mathcal{A}$ y $A \subset B$, entonces $\mu(A) \le \mu(B)$.

ii) Si $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_j \cdots$, $E_j \in \mathcal{A}$ $\forall j$, entonces

$$\lim_{j \to +\infty} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big).$$

iii) Si $\mu(E_1) < +\infty$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \cdots \supset E_j \supset \cdots$, entonces

$$\lim_{j \to +\infty} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big).$$

iv) Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, entonces $\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ (propiedad subaditiva).

Dem.

i) $E_1 \subset E_2$, $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$, $\mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) \ge \mu(E_1)$.

ii) $\mu(E_1) \le \mu(E_2) \le \cdots \le \mu(E_j) \le \cdots \le \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)$. Si $\exists j_0$ t.q. $\mu(E_{j_0}) = 0$, entonces $+\infty = \lim_{j \to \infty} \mu(E_j) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big)$. Si $\mu(E_j) < +\infty$ $\forall j \ge 1$, tendremos:

$$\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j \setminus E_{j-1}), \quad E_0 = \Phi \quad \text{y}$$

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \setminus E_{j-1}\Big) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}), \text{ pero}$$

$E_j = E_{j-1} \cup (E_j \setminus E_{j-1})$, $\mu(E_j) = \mu(E_{j-1}) + \mu(E_j / E_{j-1})$

$\therefore \mu(E_j \setminus E_{j-1}) = \mu(E_j) - \mu(E_{j-1})$ $\forall j \ge 1$

y

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{j=1}^{+\infty} (\mu(E_j) - \mu(E_{j-1})) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{j=1}^{N} (\mu(E_j) - \mu(E_{j-1})) =$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \mu(E_N).$$

iii) $E_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big) \supset \cdots \supset (E_1 \setminus E_j) \supset (E_1 \setminus E_{j-1}) \cdots \supset E_1 \setminus E_3 \supset E_1 \setminus E_2 \supset E_1 \setminus E$

y $E_1 \setminus \Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = E_1 \cap \Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^c\Big) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_j)$

$\therefore$

$$\mu\left(\bigcup_j (E_1\setminus E_j)\right) = \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_j E_j\right) = \lim_j \mu(E_1\setminus E_j) = \lim_j (\mu(E_1) - \mu(E_j))$$

$$\therefore \lim_{j\to+\infty} \mu(E_j) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)..$$

iv) Sea $\tilde{E}_j = E_j \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right)$; $\tilde{E}_j \in \mathcal{A}$ y $\{\tilde{E}_j\}_{j=1}^{\infty}$ es disjunta. Además,

$\bigcup_j \tilde{E}_j = \bigcup_j E_j$, luego

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \mu\left(\bigcup_j \tilde{E}_j\right) = \sum_j \mu(\tilde{E}_j) \leq \sum_j \mu(E_j), \text{ pues } \tilde{E}_j \subset E_j \ \forall j.$$

Veamos que en iii), la condición $\mu(E_1) < +\infty$ es necesaria

---

Def. Un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice completo si siempre que $E \in \mathcal{A}$ y $\mu(E) = 0$, entonces todo subconjunto de E está en $\mathcal{A}$.

Def. Una medida exterior sobre un conj. X es una función

$$\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$$

tal que:
i) $\mu^*(\Phi) = 0$
ii) Si $E_1 \subset E_2$, entonces $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ (creciente)
iii) Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mu^*\left(\bigcup_j E_j\right) \leq \sum_j \mu^*(E_j)$. (propiedad subaditiva).

Tma (Método de Carathéodory desarrollado).
Sea μ^* una medida exterior en X y
$$\mathcal{M} = \{E \subset X : \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A) \ \forall A \subset X\}.$$
Entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, $\mu = \mu^*|\mathcal{M}$ es una medida y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida completo.

Dem

- Si $\mu^*(E) = 0$, entonces $E \in \mathcal{M}$. En particular, $\Phi \in \mathcal{M}$.
- Si $E \in \mathcal{M}$, entonces $E^c \in \mathcal{M}$.
- Si $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, entonces $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$.

Si $A \subset X$

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c)$$

y

$\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) \leq \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_2\cap E_1^c)$

Entonces,

$\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + \mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \leq \mu^*(A\cap E_1) +$
$+ \mu^*(A\cap E_2\cap E_1^c) + \mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c) \leq \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c)$

puesto que $A\cap E_1^c \subset X$ y E_2 es medible. Entonces,

$\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) + \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c) \leq \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c) \leq \mu^*(A)$

$\therefore\ E_1\cup E_2 \in \mathcal{M}$.

- Si $\{E_1, E_2, \dots, E_n\} \subset \mathcal{M}$, es una familia disjunta,

$$\mu^*(A\cap \bigcup_{j=1}^n E_j) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A\cap E_j), \quad \forall A\subset X.$$

Por inducción:

<u>$n=1$</u> (trivial)

<u>$n>1$</u>: $A\cap(\bigcup_{j=1}^n E_j)\cap E_n^c = A\cap(\bigcup_{j=1}^{n-1} E_j)$, $\therefore$

$\mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^n E_j)) = \mu^*(A\cap E_n) + \mu^*(A\cap \bigcup_{j=1}^{n-1} E_j) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A\cap E_j)$.

Aquí hemos usado que $E_n\in\mathcal{M}$ + inducción.

- Si $\{E_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}$, entonces $\bigcup_{j=1}^\infty E_j \in \mathcal{M}$.

Podemos suponer que $\{E_j\}$ es disjunta (cambiar E_j por $\tilde{E}_j = E_j\setminus(\bigcup_{i=1}^{j-1} E_i)$, $E_0=\Phi$). Entonces, si $A\subset X$

$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^n E_j)) + \mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^n E_j)^c) \geq$

$\geq \mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^n E_j)) + \mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)^c)$, pues

$(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)^c \subset (\bigcup_{j=1}^n E_j)^c$, y como $\mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^n E_j)) = \sum_{j=1}^n \mu^*(A\cap E_j)$,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A\cap E_j) + \mu^*(A\cap(\bigcup_{j=1}^\infty E_j)^c)$$

y haciendo $n \to +\infty$,

$$\mu^*(A) \geq \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A \cap E_j)\right) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c) \geq$$

$$\geq \mu^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)^c). \quad \therefore \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}.$$

$\Rightarrow \mathcal{M}$ es σ-álgebra; $\mu = \mu^*|\mathcal{M}$.

* $\mu^*(\Phi) = 0$ por definición. $\Rightarrow \mu(\Phi) = 0$

* Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ es disjunto, sabemos que $\mu^*(\bigcup_j E_j) \leq \sum_j \mu^*(E_j)$

$$\therefore \quad \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j).$$

Por otro lado,

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E_j) = \mu^*(\bigcup_{j=1}^{n} E_j) \leq \mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).$$

y haciendo $n \to +\infty$, $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(E_j) \leq \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$.

$\therefore (X, \mathcal{M}, \mu)$ es espacio medible.

. Si $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) = 0$, entonces $\mu^*(E) = 0$, y $\forall D \subset E$, $\mu^*(D) = 0$,

luego $D \in \mathcal{M}$ y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es completo.

1.3 La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Def: Un subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si siempre que $x, y \in I$ y $x \leq z \leq y$, se verifica que $z \in I$. En particular, I será de la forma:

(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$

$(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ o $(-\infty, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

Def: Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo acotado de extremos $a < b$, definimos la longitud de I como $\ell(I) = b - a$. Si I es no acotado, definimos $\ell(I) = +\infty$.

Def: Si $E \subset \mathbb{R}$ definimos

$$m^*(E) = \inf \{ \sum_{j=1}^{+\infty} \ell(I_j) \}$$

donde $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ es cualquier familia numerable de intervalos abiertos tal que $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$.

Tma: $m^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ es una medida exterior

Dem

- $m^*(\Phi) = 0$ ya que $\Phi \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$.
- Si $E_1 \subset E_2 \Rightarrow m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$ por definición.
- Si $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\forall i$ $\exists \{I_j^i\}$ familia intervalos abiertos t.q. $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^i$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^i) \leq m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$. Entonces,

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i,j} I_j^i$ y

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i,j} \ell(I_j^i) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

$$= \left(\sum_i m^*(E_i)\right) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

Entonces, si $\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R} : m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A) \ \forall A \subset \mathbb{R}\}$ se dice σ-álgebra de Lebesgue, y $\mathcal{M}$ es σ-álgebra que $m = m^*|_{\mathcal{M}}$ es una medida, llamada medida de Lebesgue y $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ es un espacio medible completo. Los elementos de $\mathcal{M}$ se dicen conjuntos medibles de Lebesgue.

Tma: i) $m^*(I) = \ell(I)$ $\forall I \subset \mathbb{R}$ intervalo

ii) $(a, +\infty) \in \mathcal{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

iii) $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$

Dem

i) Si $I = [a,b]$ es cerrado y acotado e $\{I_j\}_{j=1}^{N}$ es una familia finita de int. abiertos que contiene a $[a,b]$, podemos encontrar una subfamilia finita $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ tal que si $J_i = (a_i, b_i)$ se verifican,

(1) $$\boxed{a_1 < a < b_1,\quad a_k < b < b_k,\quad b_i \in (a_{i+1}, b_{i+1}) = J_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, k-1 \quad \text{y} \quad [a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i.}$$

Para ello, existe $J_1 = (a_1, b_1)$ t.q $a \in (a_1, b_1) = J_1$. Si $b \in J_1$, tendremos que $[a,b] \subset J_1$ con $k=1$. Si $b \notin J_1$, ocurre que $a_1 < a < b_1 \le b$ y existe $J_2 = (a_2, b_2)$ t.q. $b_1 \in J_2$. Entonces $[a, b_1] \subset J_1 \cup J_2$, y si $b \in J_2$ ocurre que $[a,b] \subset J_1 \cup J_2$, haciendo $k=2$. Si $b \notin J_2$, ocurre que $a_2 < b_1 < b_2 \le b$ y existe $J_3 = (a_3, b_3)$ t.q. $b_2 \in J_3$ y $[a, b_2] \subset J_1 \cup J_2 \cup J_3$, $a < b_1 < b_2 < b_3$. Finalmente, encontramos $\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$ t.q $a < b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1} \le b$, $b_i \in J_{i+1}$ $\forall i = 1, \dots, k-1$ y tal que $[a, b_{k-1}] \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i$. Como la familia de intervalos inicial es finita y cubre $[a,b]$, necesariamente ocurrirá que para algún k, $b \in J_k$. Entonces,

$$[a,b] = [a, b_{k-1}] \cup [b_{k-1}, b] \subset \bigcup_{i=1}^{k} J_i \quad \text{y} \quad a_k < b < b_k.$$

Entonces, de (1), $\sum_{j=1}^{N} \ell(I_j) \ge \sum_{i=1}^{k} \ell(J_i) = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_{k-1} - a_{k-1}) + (b_k - a_k) = -a_1 + \underbrace{(b_1 - a_2)}_{\ge 0} + \underbrace{(b_2 - a_3)}_{\ge 0} + \dots + \underbrace{(b_{k-1} - a_k)}_{\ge 0} + b_k \ge b_k - a_1 \ge b - a = \ell(I)$. Por lo tanto:

$$b - a \le \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j)$$

para toda familia $\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ de int. abiertos que contiene $[a,b]$ y por definición de m^*.

$$b - a \le m^*([a,b]).$$

También, $[a,b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, luego $m^*([a,b]) \le b - a + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ y $m^*([a,b]) = b - a$. si $-\infty < a < b < +\infty$.

Si $I = (a,b)$, $(a,b]$ ó $[a,b)$, se tiene que $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset I$ $\forall \varepsilon > 0$, y $m^*([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \le m^*(I)$. Luego, $b - a + 2\varepsilon = m^*([a+\varepsilon, b-\varepsilon]) \le m^*(I)$, es decir, $\ell(I) \le m^*(I)$. Por otro lado, también $I \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, luego $m^*(I) \le b-a+2\varepsilon$ $\forall \varepsilon>0$, es decir, $m^*(I) \le \ell(I)$.

Si I es un intervalo no acotado, $\forall M>0$ $\exists J \subset I$ intervalo acotado t.q. $\ell(J) = m^*(J) \geq M$. Entonces $M \le m^*(J) \le m^*(I)$ $\forall M>0$, es decir, $m^*(I) = +\infty = \ell(I)$. (Observar que en los dos últimos casos hemos utilizado que m^* es creciente y su definición).

ii) Queremos mostrar que $\forall A \subset \mathbb{R}$

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \le m^*(A), \quad \text{donde} \quad A_1 = A \cap (a,+\infty), \quad A_2 = A \cap (-\infty, a].$$

Si $m^*(A) = +\infty$ (trivial). Si $m^*(A) < +\infty$, dado $\varepsilon>0$ $\exists \{I_j\}$ familia de intervalos abiertos t.q.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \le m^*(A) + \varepsilon \quad \text{y} \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j .$$

Si $I_j^1 = I_j \cap (a,+\infty)$, $I_j^2 = I_j \cap (-\infty, a]$, entonces I_j^1 e I_j^2 son intervalos (no vacíos), y además,

$$\ell(I_j) = \ell(I_j^1) + \ell(I_j^2) = m^*(I_j^1) + m^*(I_j^2).$$

También, $A_1 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^1$, $A_2 \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^2$ y de las propiedades de m^* se sigue que

$$m^*(A_1) \le m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j^1\Big) \le \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j^1) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^1),$$

análogamente,

$$m^*(A_2) \le \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j^2).$$

Entonces,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \le \sum_{j=1}^{\infty} \big(\ell(I_j^1) + \ell(I_j^2)\big) = \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) \le m^*(A) + \varepsilon, \ \forall \varepsilon>0,$$

es decir, $m^*(A_1) + m^*(A_2) \le m^*(A)$.

iii) Como $(a,+\infty) \in \mathcal{M}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{M}$ es σ-álgebra se sigue que,

- $(-\infty, b] \in \mathcal{M}$ $\forall b \in \mathbb{R}$ ($(-\infty, b] = (b,+\infty)^c$).
- $(-\infty, b) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (-\infty, b-\frac{1}{j}] \in \mathcal{M}$.
- $(a,b) = (a,+\infty) \cap (-\infty, b) \in \mathcal{M}$.
- Todo abierto $V \subset \mathbb{R}$ está en $\mathcal{M}$,

ya que todo abierto $V \subset \mathbb{R}$ es una unión numerable de intervalos abiertos. Como $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los abiertos, vemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. (11)

Otras propiedades de $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, el espacio de medida de Lebesgue, son las siguientes:

Tma:

i) $E \in \mathcal{M}$ y $m(E) = 0$ sii $E \subset \mathbb{R}$ y $m^*(E) = 0$.

Sean $E \in \mathcal{M}$, $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. Entonces,

ii) $E + x \in \mathcal{M}$ y $m(E+x) = m(E)$ (invariante por traslaciones).

iii) $\lambda E \in \mathcal{M}$ y $m(\lambda E) = m(E)\lambda$.

iv) $-E \in \mathcal{M}$ y $m(-E) = m(E)$.

v) Para cada $\varepsilon > 0$, existen

- V abierto tal que $E \subset V$ y $m(V \setminus E) < \varepsilon$.
- F cerrado tal que $F \subset E$ y $m(E \setminus F) < \varepsilon$.

Además,

$$m(E) = \inf \{ m(V) : V \text{ abierto}, E \subset V \}$$
$$= \sup \{ m(K) : K \text{ compacto}, K \subset E \}.$$

En relación con el tma. general sobre propiedades de medidas, si $\mu = m$, $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ y $E_j = (j, +\infty)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, vemos que

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \ldots \supset E_j \supset \cdots \supset \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \emptyset,$$

pero

$$+\infty = \lim_{j \to +\infty} m(E_j) > m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = 0.$$

Dos preguntas:

① ¿Es todo subconjunto de $\mathbb{R}$ medible de Lebesgue? La respuesta es que no.

Dem:

En $\mathbb{R}$ consideramos la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

El conjunto de clases de equivalencia es $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Como todo $x \in \mathbb{R}$ se puede escribir, $x = [x] + \{x\}$ (parte entera + parte fraccionaria), toda clase de equivalencia contiene algún elemento en $(0,1)$. En particular, por el "axioma de elección", existe un conjunto $P \subset (0,1)$ que contiene exactamente un punto de cada clase de equivalencia. Veamos que $P \notin \mathcal{M}$. Para ello, necesitamos dos propiedades de P:

(a) Si $x \in (0,1)$, entonces $x \in P + r$ para algún racional $r \in (-1,1)$.

(b) Si $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$, entonces $(P+r) \cap (P+s) = \Phi$.

Para mostrar (a), a todo $x \in (0,1)$ le corresponde un $y \in P$ t.q. $x - y = r \in \mathbb{Q}$. Entonces $r \in (-1,1)$ y $x \in P + r$. Para (b), si $(P+r) \cap (P+s) \neq \Phi$, existen $y_1, y_2 \in P$ t.q. $y_1 + r = y_2 + s$, es decir, $y_1 - y_2 = s - r \in \mathbb{Q}$ e y_1, y_2 están en la misma clase de equivalencia, pero esto es falso por construcción de P.

Si fuese cierto que $P \in \mathcal{M}$, y $\alpha = m(P)$. Definimos

$$E = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} (P+r).$$

Como $\mathbb{Q} \cap (-1,1)$ es numerable, tendríamos que $E \in \mathcal{M}$ y

$$m(E) = m\Big(\bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} (P+r)\Big) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} m(P+r) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} m(P).$$

Pero $E \subset (-1,2)$ y $E \supset (0,1)$, es decir, $1 \leq m(E) \leq 3$, y por tanto

$$1 \leq \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} m(P) \leq 3,$$

que implica $m(P) = 0$, ya que una serie de términos positivos constantes no es convergente, pero esto es una contradicción, ya que $1 \leq m(E)$. Luego $P \notin \mathcal{M}$. ∎

② ¿Es todo conjunto medible de Lebesgue un conjunto medible de Borel? La respuesta es no.

Dem:

$\mathcal{B}$ es la σ-álgebra generada por el conjunto:

$$\mathcal{F} = \{ (a,b) : -\infty < a < b < +\infty, \ a, b \in \mathbb{Q} \}$$

que es numerable, y partiendo de este resultado se puede mostrar que el cardinal de $\mathcal{B}$ es el cardinal de $\mathbb{R} = c$.

El conjunto ternario de Cantor C tiene cardinal c, $m^*(C) = 0$ y por tanto $\mathcal{P}(C) \subset \mathcal{M}$, pero el cardinal de $\mathcal{P}(C)$ = cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^c$, luego el cardinal de $\mathcal{M}$ es igual al cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, es decir, $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$.

Tma: Sea $E \subset \mathbb{R}$. Entonces $E \in \mathcal{M}$ si y sólo si $E = E_1 \cup E_2$, donde $E_1 \in \mathcal{B}$ y $m^*(E_2) = 0$.

Dem:

($\Leftarrow$) (trivial)

($\Rightarrow$) Si $E \in \mathcal{M}$, $\forall n \geq 1$ existe $F_n \subset E$ cerrado tal que $m(E \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$.

Sean, $E_1 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$, $E_2 = E \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E \setminus F_n)$, entonces $E_1 \in \mathcal{B}$,

$m^*(E_2) \leq m^*(E \setminus F_n) \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \geq 1$ y $E = E_1 \cup E_2$.

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ <u>no</u> es un espacio de medida completo, pues $C \in \mathcal{B}$ y no todo subconjunto de C está en $\mathcal{B}$, ya que $\text{card}(\mathcal{P}(C)) > \text{card}(\mathcal{B})$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, se puede definir del mismo modo, cambiando los intervalos abiertos por rectángulos abiertos

$$R = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n, \quad I_j \subset \mathbb{R} \text{ intervalo abierto.}$$

y definiendo $\ell(R) = \prod_{j=1}^{n} \ell(I_j)$ para cualquier rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$.

La construcción es la misma, y se verifican las mismas propiedades, en particular, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es también invariante por traslaciones.

En este caso, se puede verificar que $m^*(R) = \ell(R)$ para todo rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, y para mostrar que la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}_n$, está contenida en la σ-álgebra de Lebesgue, basta con probar que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \underbrace{(a, +\infty)}_{i} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$$

es medible de Lebesgue.

En este caso, $m(\lambda E) = \lambda^n m(E)$ $\forall \lambda > 0$, E medible de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

1.4 Teorema de Caratheodory general

Def: Una medida μ en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se dice finita si $\mu(X) < +\infty$, y se dice σ-finita si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ tal que $X_n \in \mathcal{A}$ y $\mu(X_n) < +\infty$ $\forall n$.

Ej: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ es un espacio de medida σ-finita.

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (-n, n), \quad \mu((-n,n)) = 2n \quad \forall n \geq 1.$$

Tma: Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y definimos $\mathcal{A}$ y $\mu(E_2) = 0$ {

i) $\tilde{\mathcal{A}} = \{ E \subset X : E = E_1 \cup D$, dando $E_1 \in \mathcal{A}$, $D \subset E_2 \in \mathcal{A}$

ii) $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to [0, +\infty] \ / \ \tilde{\mu}(E) = \mu(E_1)$ si $E = E_1 \cup D$.

Entonces, $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ es un espacio de medida completo, $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$. A espacio $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ se le denomina la completación o compleción de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Observaciones:

i) $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es completo.

ii) $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ es la completación de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$.

Def: Un álgebra en X es una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes propiedades:

i) $\Phi \in \mathcal{F}$

ii) Si $E \in \mathcal{F}$, entonces $E^c \in \mathcal{F}$

iii) Si $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, entonces $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{F}$

Ej: En $X = \mathbb{R}^n$, denotamos $(\bar{a}, \bar{b}] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$, dando $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $a_i \leq b_i$ $\forall i = 1 \ldots n$ que llamamos "cajas" de $\mathbb{R}^n$. Definimos

$\mathcal{F} = \{ E \subset \mathbb{R}^n : E = \bigcup_{j=1}^{N} {}_d I_j$, donde $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\}$ es una familia disjunta de cajas $\}$.

Se puede comprobar que $\mathcal{F}$ es un álgebra en $\mathbb{R}^n$.

<u>Def</u>: Una medida sobre un álgebra $\mathcal{F}$, es una función

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$

tal que

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una familia disjunta en $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \mathcal{F}$.

<u>Ej</u>: En el álgebra $\mathcal{F}$ definida anteriormente, definimos

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{N} m(I_j) \quad \text{si} \quad E = \bigcup_{j=1}^{N}{}_d\, I_j,$$

Entonces, μ es una medida sobre $\mathcal{F}$.

<u>Tma general de Carathéodory</u>

Sean $\mathcal{F}$ un álgebra sobre un conjunto X y $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ una medida. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, +\infty]$ por

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(I_j) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,\ I_j \in \mathcal{F}\ \forall j \right\}.$$

Entonces, μ^* es una medida exterior en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mu^*(I) = \mu(I)$ $\forall I \in \mathcal{F}$. Además, si $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra de conjuntos μ^*-medibles y $\mathcal{B}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$, resulta que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ y $(X, \mathcal{M}, \mu^*)$ es un espacio de medida completo.

Por otro lado, si la $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$ es σ-finita ($X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, $X_n \in \mathcal{F}$, $\mu(X_n) < +\infty$ $\forall n \geq 1$) existe una única medida $\tilde{\mu}$ en $(X, \mathcal{B})$ tal que $\tilde{\mu}(I) = \mu(I)$ $\forall I \in \mathcal{F}$ y $(X, \mathcal{M}, \mu^*)$ es la completación de $(X, \mathcal{B}, \mu^*)$.

<u>Observación</u>:

En particular, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ se puede también construir a partir de la álgebra $\mathcal{F}$ definida anteriormente y la medida $\mu: \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$ definida anteriormente.

Def.: En un espacio de medida $(X, \mathcal{Q}, \mu)$ se dice que una propiedad es cierta para casi todo punto de X (p.c.t $x \in$ si el conjunto de puntos donde no se cumple la propiedad es $\mathcal{Q}$-medible y tiene μ-medida cero.

Ej

i) En $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$: "casi todo número real es irracional"

$$m(\{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}) = m(\mathbb{Q}) = 0.$$

ii) En $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta_0)$: "casi todo número real es igual a 0

$$\delta_0(\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}) = \delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0.$$