

ANÁLISIS FUNCIONAL. Enero 2011

Escribir al final de cada problema el nombre y enunciado de los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilices para su resolución. Omitir las repeticiones de enunciados.

1. Probar las siguientes afirmaciones:

- La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x(1-x)}}$ está en $L^p(0, 1)$, si $1 \leq p < 6$ pero f no está en $L^6(0, 1)$.
- $f(x, y) = \frac{1-\cos y}{y^{\frac{5}{2}}(4+x^2+y^2)}$ es integrable en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

2. Calcular el valor de los límites:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-nx} dx$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B \frac{n\sqrt{x^2+y^2}}{(1+x^2+y^2)(1+n\sqrt{x^2+y^2})} dx dy$, donde B es la bola unidad en el plano.

Sugerencia: Mostrar que $\frac{\log(1+x)}{x} \leq 1$ en $(0, +\infty)$.

3. Si $T(h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4(x-y)^2} h(y) dy$, mostrar las siguientes afirmaciones:

- $T(h)$ es una función continua en \mathbb{R} si $h \in L^1(\mathbb{R})$.
- $T(h)$ es diferenciable en \mathbb{R} si $h \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$T(h)'(x) = -8 \int_{\mathbb{R}} (x-y) e^{-4(x-y)^2} h(y) dy, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- T es un operador lineal y acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$ y $\|T\| \leq \sqrt{\pi}/2$.
- T es un operador lineal y acotado de $L^p(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y

$$\|T\| \leq \left(\frac{\pi}{4q}\right)^{\frac{1}{2q}}, \text{ si } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ y } 1 < p < +\infty.$$

- ¿Sabes mostrar que $T(h)$ es continua en \mathbb{R} en el apartado anterior si $p = 2$? Si lo sabes hacer para $p = 2$ también lo sabes para $1 < p < +\infty$ y tienes la libertad de explicarlo.

Sugerencia: Mostrar que ze^{-z^2} está acotada en \mathbb{R} . Se puede utilizar que $C_0(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, que toda función en $L^2(\mathbb{R})$ se puede aproximar... y que el límite uniforme de una sucesión de...

También se puede utilizar el corolario del teorema de convergencia dominada pero quizás es más complejo.

4. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < 1/x\}$.

- Mostrar que A es un conjunto medible en \mathbb{R}^2 .
- ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es integrable sobre A la función $f(x, y) = \frac{y^a}{1+x^2}$?

5. Mostrar que toda sucesión de Cauchy $\{f_n\}$ en $L^2(\mathbb{R})$ tiene una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\{f_{n_k}(x)\}$ converge para casi todo x de \mathbb{R} .

ANÁLISIS FUNCIONAL. Julio 2011

Escribir al final de cada problema el nombre y enunciado de los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilices para su resolución. Omitir las repeticiones de enunciados.

1. Razonar las respuestas a los siguientes apartados:

- Calcular $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 \frac{x \sin x}{1+(nx)^3} dx$.
- Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} e^{-x/n} dx = +\infty$.

2. Si $f(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$

- Probar que f es integrable en $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$.
- Deducir que $g(x) = \frac{\log x}{x^2-1}$ es integrable en $(0, +\infty)$ y calcular el valor de su integral.

3. Sea

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{xe^x} dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Mostrar que F está bien definida en \mathbb{R} .
- ¿Es F continua en \mathbb{R} ?
- ¿Es derivable?
- Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F'(1/n).$$

4. Sea

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t, s)f(s) ds,$$

donde

$$K(t, s) = \begin{cases} (1-t)s, & \text{si } 0 \leq s \leq t, \\ (1-s)t, & \text{si } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Mostrar que T es un operador lineal acotado de $L^2(0, 1)$ en $L^\infty(0, 1)$ y que $\|T\| \leq 1$.

5. Mostrar que en todo espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , el conjunto \mathcal{C} de funciones simples que están en $L^1(X, d\mu)$ es denso en $L^p(X, d\mu)$, si $1 \leq p \leq \infty$.