ANÁLISIS FUNCIONAL. Enero 2012

Escribir en cada problema el nombre y lugar (TCD, TCM, LF, corolario de TCD...) de los teoremas, lemas y corolarios que utilices en su resolución y también sus enunciados, aunque estos al final del examen y en hojas separadas de los problemas resueltos.

1.

- Mostrar que $e^{-x}/\sqrt{x}$ es integrable en $(0, +\infty)$.
- Calcular los límites
  - $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{n}\,x}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}}\,dx$.
  - $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{1+nx}\, e^{-\frac{x}{n}}\,dx$.
- Estudiar los valores de α en $\mathbb{R}$ para los que $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ es integrable en $\mathbb{R}^2$.

Sugerencia: En 1º se puede usar comparación, en 2ºA y 3º comparación y/o cambios de variables.

2. Sean $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$, $R > 0$ y $\Omega_R = (0,R)\times(0,\infty)$.

- Mostrar que f es integrable en Ω_R.
- Probar la identidad
$$\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos R\int_0^\infty \frac{e^{-Ry}}{1+y^2}\,dy - \sin R\int_0^\infty \frac{y\,e^{-Ry}}{1+y^2}\,dy$$
- Deducir que
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$
- Mostrar que $\frac{\sin x}{x}$ no es integrable en $(0,+\infty)$.

3. Sea $F(t) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{\sqrt{x}}\,e^{-x}dx$

- Mostrar que F es continua en $\mathbb{R}$.
- Mostrar que F es derivable en $\mathbb{R}$.
- ¿Es F de clase C^2? Si es el caso, dar una fórmula para la derivada segunda de F.

4.

- Probar que se verifica la desigualdad
$$\|f\|_{L^1(a,b)} \le (b-a)^{\frac{2}{3}}\,\|f\|_{L^3(a,b)},$$
  si f está en $L^3(a,b)$ y $-\infty < a < b < +\infty$.
- Concluir que $L^3(5,7)\subset L^1(5,7)$.
- Utilizar 1º para mostrar que toda sucesión $\{f_n\}$ que converge en $L^3(5,7)$, converge también en $L^1(5,7)$.
- Probar que $L^3(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ con $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Sugerencia: En 1º recordar que $|f| = 1.|f|$.

5. Para f en $L^2(\mathbb{R})$ definimos $E_n = \{x\in\mathbb{R} : |f(x)| > n\}$ si $n \ge 1$.

- Mostrar que $n^2|E_n| \leq \int_{E_n} |f(x)|^2\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx$.
- Probar que $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \ldots$, relacionar la $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$ con f (definición por comprensión) y mostrar que $|\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n| = 0$.
- Deducir que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} |f(x)|^2\,dx = 0$$
y
$$\lim_{n\to+\infty} n^2|E_n| = 0.$$
- Estudiar si las propiedades en 2º y 3º son ciertas para $f(x) = 1/\sqrt{|x|}$.

Sugerencia: En 1º usar comparación y en 3ºA un teorema.

ANÁLISIS FUNCIONAL. Julio 2012

Escribir en cada problema el nombre y lugar (TCD, TCM, LF, corolario de TCD...) de los teoremas, lemas y corolarios que utilices en su resolución y también sus enunciados, aunque estos al final del examen y en hojas separadas de los problemas resueltos.

1.

- Mostrar que $e^{-|x|}/\sqrt[4]{|x|}$ es integrable en $\mathbb{R}$.
- Calcular los límites
  - $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}\,|x|}}{\sqrt[4]{|x|+\frac{1}{n}}}\,dx$.
  - $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n}{10+n(1+x)}\,e^{-\frac{x}{n}}\,dx$.
- Calcular el valor exacto de

$$\int_{\mathbb{R}^3}\frac{dxdydz}{(1+(x-4y)^2)(1+(y-2z)^2)(1+z^2)}\,.$$

Sugerencia: En 1º se puede usar comparación, en 2ºA comparación y/o cambios de variables.

2. Sea $f(x,y)=\frac{1}{1+(xy)^2}$.

- Determinar si f es integrable en $(0,+\infty)\times(1,\pi)$.
- Mostrar que

$$g(x)=\frac{\arctan\pi x-\arctan x}{x}$$

  es integrable en $(0,+\infty)$ y calcular $\|g\|_{L^1(0,+\infty)}$.

3. Sea $F(t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos(xt)}{\sqrt[4]{|x|}}\,e^{-|x|}dx$

- Mostrar que F es continua en $\mathbb{R}$.
- Mostrar que F es derivable en $\mathbb{R}$.
- ¿Es F de clase C^2? Si es el caso dar una fórmula para la derivada segunda de F.

4.

- Probar que se verifica la desigualdad

$$\|f\|_{L^1(a,b)}\leq(b-a)^{\frac{4}{5}}\,\|f\|_{L^5(a,b)},$$

  si f está en $L^3(a,b)$ y $-\infty<a<b<+\infty$.
- Concluir que $L^5(5,20)\subset L^1(5,20)$.
- Utilizar 1º para mostrar que toda sucesión $\{f_n\}$ que converge en $L^5(5,20)$, converge también en $L^1(5,20)$.
- Probar que $L^5(\mathbb{R})\not\subset L^1(\mathbb{R})$ con $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

Sugerencia: En 1º recordar que $|f|=1.|f|$.

5. Para f en $L^1(\mathbb{R})$ definimos $E_n=\{x\in\mathbb{R}:|f(x)|>n\}$ si $n\geq 1$.

- Mostrar que $n|E_n|\leq\int_{E_n}|f(x)|\,dx\leq\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx$.

- Probar que $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_n \supset \dots$, relacionar la $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$ con f (definición por comprensión) y mostrar que $|\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n| = 0$.
- Deducir que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} |f(x)|\, dx = 0$$
y
$$\lim_{n\to+\infty} n|E_n| = 0.$$
- Estudiar si las propiedades en los apartados 2^{o} y 3^{o} son ciertas para $f(x) = 1/|x|$.

Sugerencia: En 1^{o} usar comparación y en 3^{o}A un teorema.