ANÁLISIS FUNCIONAL. Enero 2013

Escribir al final del examen el nombre y enunciado de todos los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilices para su resolución. Omitir las repeticiones.

1. Probar las siguientes afirmaciones:

- La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x(1-x)}}$ está en $L^p(0,1)$, si $1 \leq p < 6$ pero f no está en $L^6(0,1)$.
- $f(x,y) = \frac{1-\cos y}{y^{\frac{5}{2}}(4+x^2+y^2)}$ es integrable en $\mathbb{R} \times (0,+\infty)$.

2. Calcular el valor de los límites:

- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-nx}\,dx$.
- $\lim_{n\to+\infty} \int_B \frac{n\sqrt{x^2+y^2}}{(1+x^2+y^2)(1+n\sqrt{x^2+y^2})}\,dxdy$, donde B es la bola unidad en el plano.

Sugerencia: Mostrar que $\frac{\log(1+x)}{x} \leq 1$ en $(0,+\infty)$.

3. Si $T(h)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-4(x-y)^2} h(y)\,dy$, mostrar las siguientes afirmaciones:

- $T(h)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ si $h \in L^1(\mathbb{R})$.
- $T(h)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ si $h \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$T(h)'(x) = -8\int_{\mathbb{R}} (x-y)e^{-4(x-y)^2} h(y)\,dy, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

- T es un operador lineal y acotado de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^1(\mathbb{R})$ y $\|T\| \leq \sqrt{\pi}/2$.
- T es un operador lineal y acotado de $L^p(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y

$$\|T\| \leq \left(\frac{\pi}{4q}\right)^{\frac{1}{2q}}, \text{ si } \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \text{ y } 1 < p < +\infty.$$

- ¿Sabes mostrar que $T(h)$ es continua en $\mathbb{R}$ en el apartado anterior si $p=2$? Si lo sabes hacer para $p=2$ también lo sabes para $1 < p < +\infty$ y tienes la libertad de explicarlo.

Sugerencia: Mostrar que ze^{-z^2} está acotada en $\mathbb{R}$. Se puede utilizar que $C_0(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, que toda función en $L^2(\mathbb{R})$ se puede aproximar... y que el límite uniforme de una sucesión de...

También se puede utilizar el corolario del teorema de convergencia dominada pero quizás es más complejo.

4. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ 0 < y < 1/x\}$.

- Mostrar que A es un conjunto medible en $\mathbb{R}^2$.
- ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es integrable sobre A la función $f(x,y) = \frac{y^a}{1+x^2}$?

5. Mostrar que $L^1(\mathbb{R})$ es un espacio normado completo.

ANÁLISIS FUNCIONAL. Junio 2013

Escribir al final del examen el nombre y enunciado de todos los teoremas, lemas, proposiciones y corolarios que utilices para su resolución. Omitir las repeticiones.

1. Razonar las respuestas a los siguientes apartados:

- Calcular $\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 \frac{x\sin x}{1+(nx)^3}\, dx$.
- Mostrar que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\, e^{-x/n}\, dx = +\infty$.

2. Si $f(x,y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$

- Probar que f es integrable en $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.
- Deducir que $g(x) = \frac{\log x}{x^2-1}$ es integrable en $(0,+\infty)$ y calcular el valor de su integral.

3. Sea

$$F(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{xe^x}\, dx, \quad t\in\mathbb{R}.$$

- Mostrar que F está bien definida en $\mathbb{R}$.
- ¿Es F continua en $\mathbb{R}$?
- ¿Es derivable?
- Calcular

$$\lim_{n\to\infty} F'(1/n).$$

4. Sea

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s)\, ds,$$

donde

$$K(t,s) = \begin{cases} (1-t)s, & \text{si } 0\le s\le t, \\ (1-s)t, & \text{si } t\le s\le 1. \end{cases}$$

Mostrar que T es un operador lineal acotado de $L^2(0,1)$ en $L^\infty(0,1)$ y que $||T||\le 1$.

5. Mostrar que el conjunto $\mathcal{S}$ de las funciones simples medibles Borel que están en $L^1(\mathbb{R})$ coincide con el de las funciones de la forma

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i},$$

donde $-\infty < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < +\infty$, $\mathbb{R}$ es la unión disjunta de $E_1,\ldots,E_n$, $E_i\in\mathcal{B}$, $m(E_i) < +\infty$, si $i=1,\ldots,n$ y $n\in\mathbb{N}$. Mostrar que $\mathcal{S}$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$.