Tema II: Funciones medibles.

2.1 Funciones medibles:

Def. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medida, diremos que

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$$

es una función medible si cumple alguna de las siguientes propiedades equivalentes:

i. $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

ii. $\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

iii. $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv. $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$ es medible $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

v. $\{x \in X : f(x) \in V\}$ es medible $\forall V \subset \overline{\mathbb{R}}$ abierto.

Dem

i) $\Leftrightarrow$ iv) es claro ya que $f^{-1}([-\infty, \alpha]) = X \setminus f^{-1}((\alpha, +\infty])$.

ii. ⟺ iii. es similar.

i. ⟹ ii. $f^{-1}([\alpha,+\infty]) = \bigcap_{j=1}^{+\infty} f^{-1}((\alpha-\frac{1}{j},+\infty])$

ii. ⟹ i. $f^{-1}((\alpha,+\infty]) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} f^{-1}([\alpha+\frac{1}{j},+\infty])$

i. ⟺ v. De i. se sigue que $f^{-1}(a,b)$ es abierto si $-\infty<a<b<+\infty$, y como todo abierto $V\subset\mathbb{R}$ se puede escribir como unión numerable de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto.

En algunos casos $X=\mathbb{R}$ con $\mathcal{A}=\mathcal{M}$ ó $\mathcal{B}$ y en otros $X=D\subset\mathbb{R}^n$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que es medible, y consideramos en D la σ-álgebra $\mathcal{M}_D=\{E\cap D: E\in\mathcal{M}\}$.

Prop. Las funciones continuas $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ son medibles.

Dem.: Si $V\subset\mathbb{R}$ es abierto, $f^{-1}(V)$ es abierto y por tanto medible.

Prop. Sean $c\in\mathbb{R}$ y $f,g:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ funciones medibles con valores reales. Entonces $f+c$, cf, $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$ son también medibles.

Dem.

- $\{x: f(x)+c<\alpha\}=\{x: f(x)<\alpha-c\}$ ⟹ $f+c$ es medible.
- Si $c>0$, $\{x: cf(x)<\alpha\}=\{x: f(x)<\frac{\alpha}{c}\}$. Si $c<0$, $\{x: cf(x)<\alpha\}=\{x: f(x)>\frac{\alpha}{c}\}$.
- $\{x: f(x)+g(x)<\alpha\}=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{x: f(x)<r\}\cap\{x: g(x)<\alpha-r\}$ que es medible por ser unión numerable de medibles.
- $f-g=f+(-g)$.
- f^2 es medible pues $\{x: f^2(x)\geq\alpha\}=X$ si $\alpha<0$ y $\{x: f^2(x)\geq\alpha\}=\{x: f(x)\geq\sqrt{\alpha}\}\cup\{x: f(x)\leq-\sqrt{\alpha}\}$ si $\alpha\geq0$.
- $f\cdot g=\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2]$

Prop. Si $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ es medible y $g:\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ es continua, entonces $g\circ f$ es medible. Análogo si $f:X\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Dem.: Si $V\subset\mathbb{R}$ es abierto $(g\circ f)^{-1}(V)=f^{-1}(g^{-1}(V))$ es medible.

Prop. Sea $f_n:(X,\mathcal{A})\to[-\infty,+\infty]$ una sucesión de funciones medibles. Entonces: $\sup\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$, $\inf\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ y $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ son funciones medibles.

Dem:

Si $h(x) = \sup\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\{x : h(x) > \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{x : f_j(x) > \alpha\}$.

Si $\ell(x) = \inf\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $\{x : \ell(x) < \alpha\} = \bigcup_{j=1}^{n} \{x : f_j(x) < \alpha\}$.

Si $g(x) = \sup_n f_n$, $\{x : g(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > \alpha\}$

Si $z(x) = \inf_n f_n$, $\{x : z(x) < \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) < \alpha\}$.

Como $\limsup_{n \to +\infty} f_n = \inf_k \sup_{n \geq k} f_n$ y $\liminf_{n \to +\infty} f_n = \sup_k \inf_{n \geq k} f_n$ se sigue que son funciones medibles.

Prop.: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida completo. Si $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible y $g(x) = f(x)$ en c.t.p de X, entonces g es medible.

Dem.:
El conjunto $E = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ verifica $\mu(E) = 0$. Entonces:

$$\{x : g(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha\} \cap E^c \cup \{x : g(x) > \alpha\} \cap E$$

y como μ es completa, $\{x : g(x) > \alpha\} \cap E$ es medible. Luego g es medible.

Def.: Si $E \subset X$, definimos $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ la función característica de E como

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

Claramente, E es medible sii χ_E es medible.

Def.: Una función simple en $(X, \mathcal{A})$ es una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos medibles, es decir:

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x),$$

donde $c_j \in \mathbb{R}$ y $E_1, E_2, \dots, E_n$ son medibles.

Tma.: Sea $f: X \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa. Entonces, existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que verifican:

i) $0 \leq s_1 \leq s_2 \dots \leq s_n \dots \leq f(x) \quad \forall x \in X$

ii) $\lim_{n \to +\infty} s_n(x) = f(x)$.

iii) Si f es acotada, la convergencia es uniforme.

Dem.:
Si $n \geq 1$, sean $E_{k,n} = \{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k}{2^n}\}$ para $k = 1, 2, \dots, n2^n$ y $E_n = \{x : f(x) > n\}$. Definimos:

$$s_n(x) = n \chi_{E_n}(x) + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{k,n}}(x).$$

- Si $f(x) = +\infty$, $s_n(x) = n \quad \forall n \geq 1$ y $s_n(x) \to f(x)$.
- Si $0 < f(x) < +\infty$ y $n \geq f(x)$ existe un único $k \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$ t.q.

$\frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n}$ y $s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le s_n(x) + \frac{1}{2^n}$: luego si $n > f(x)$ se tiene que $s_n(x) < f(x) \le s_n(x) + \frac{1}{2^n}$ y $s_n(x) \to f(x)$.

· Si $f(x) = 0$, entonces $s_n(x) = 0$ $\forall n \geq 1$.

Para ver que $s_n \le s_{n+1}$, si $x \in X$ caben tres cosas:

· $f(x) = 0 \Rightarrow s_n(x) = 0 \le s_{n+1}(x) = 0$.

· $0 < f(x) \le n \Rightarrow \exists\, k \in \{1, \dots, n2^n\}$ y $j \in \{1, \dots, (n+1)2^{n+1}\}$ t.q. $x \in E_{k,n}$ y $x \in E_{j,n+1}$; es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{k-1}{2^n} < f(x) \le \frac{k}{2^n} \\ \frac{j-1}{2^{n+1}} < f(x) \le \frac{j}{2^{n+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{k-1}{2^n} < \frac{j}{2^{n+1}}, \quad 2(k-1) < j \;\therefore\; 2(k-1) \le j-1$$

$$\Rightarrow \frac{j-1}{2^{n+1}} \geq \frac{k-1}{2^n} \text{ y } s_n(x) \le s_{n+1}(x).$$

· $f(x) > n \Rightarrow s_n(x) = n \le s_{n+1}(x)$, pues si $f(x) > n+1$, $s_{n+1}(x) = n+1$, y si $n < f(x) \le n+1$, $x \in E_{k,n+1}$ para algún k y por tanto $n < \frac{k}{2^{n+1}}$: es decir, $k-1 \geq 2^{n+1}n$ y $s_{n+1}(x) = \frac{k-1}{2^{n+1}} \geq n = s_n(x)$.

iii) Si f es acotada, digamos $0 \le f(x) \le n_0$ $\forall x \in X$, si $n \geq n_0$, $x \in E_{k,n}$ para algún k si $f(x) > 0$, y en este caso $0 \le f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n}$. Si $f(x) = 0$, entonces $s_n(x) = 0$ $\forall n$. Luego si $n \geq n_0$,

$$0 \le f(x) - s_n(x) \le \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in X$$

y la convergencia es uniforme.

2.5 Teorema de Lusin y Egorov

El matemático inglés J. E. Littlewood en su libro "Lectures on the Theory of Functions" (1944) afirmaba que la mayoría de los resultados de Teoría de la Medida son aplicación intuitiva de los tres principios siguientes:

- Todo conjunto medible en $\mathbb{R}^n$ es "aproximadamente" abierto
- Toda función medible es "aproximadamente" continua
- Toda sucesión convergente de funciones medibles es "aproximadamente" uniformemente convergente.

Un ejemplo del primer principio es que si $E \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $\varepsilon > 0$, entonces existe V abierto t.q. $E \subset V$ y $m(V \setminus E) < \varepsilon$.

Un ejemplo del segundo principio es el siguiente resultado:

Teorema de Lusin: Sea $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función medible en un conjunto E de medida finita, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $A \subset E$ t.q. $m(A) < \varepsilon$ y $f: E \setminus A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua.

El tercero de estos principios corresponde al tma. de Egorov:

Tma de Egorov: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles que converge en casi todo punto a una función f a valores reales. Entonces, para cada $\delta > 0$ existe $A \subset X$ con $\mu(A) < \delta$ y tal que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en $X \setminus A$.

c Convergencia en medida:

Def: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f_n: X \to \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ medibles. Se dice que f_n converge a f en medida si

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Este es un concepto importante en Teoría de Probabilidad. La convergencia uniforme implica la convergencia en medida. Si X es de medida finita, por el tma. de Egorov

$\mu(\{x: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \leq \delta + \mu(\{x \in X \setminus A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\})$

donde $A \subset X$, $\mu(A) < \delta$ y $f_n \to f$ unif. en $X \setminus A$, de donde se deduce que la convergencia en c.t.p. de X implica la convergencia en medida.

El recíproco no es cierto pero sí para una subsucesión.

═══

El tma. de Lusin aparece en pág. 47 y el de Egorov o Egoroff en pág. 65 del W. Rudin, Análisis Real y Complejo. Alhambra.

═══