Tema III: La integral de Lebesgue y sus propiedades

3.1 La integral de funciones medibles positivas.

En lo que sigue $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida abstracto y todas las funciones medibles $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ son medibles respecto a la σ-álgebra $\mathcal{A}$.

Def.: Sea $S: X \to [0, +\infty)$ una función simple no negativa (función medible que sólo toma un número finito de valores reales no nulos) y

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j, \quad c_i \geq 0, \; i = 1 \ldots N$$

una representación disjunta de S. Entonces, si $A \in \mathcal{A}$ definimos la integral de S sobre A con respecto a μ como:

$$\int_A S\, d\mu = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(E_i \cap A). \qquad (0 \cdot +\infty = 0). \quad (a \cdot +\infty = +\infty \text{ si } a > 0).$$

Esta definición es independiente de la representación, pues si $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$ son los valores no nulos en el rango de S,

$$S = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \chi_{A_j}, \quad \text{donde } A_j = \{x \in X : S(x) = \alpha_j\}$$

y $A_j = \bigcup_{c_i = \alpha_j} E_i$, de donde:

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{c_i = \alpha_j} \alpha_j \mu(A \cap E_i) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu\Big(A \cap \big(\bigcup_{c_i = \alpha_j} E_i\big)\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \alpha_j \mu(A \cap A_j).$$

Def.: Sea $f: X \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa, se define la integral de f sobre un conjunto $A \in \mathcal{A}$ con respecto a μ como:

$$\int_A f\, d\mu = \sup \Big\{ \int_A S\, d\mu : 0 \leq S \leq f, \; S \text{ es simple} \Big\} \in [0, +\infty].$$

Esta integral puede ser $+\infty$. y $\int_A f\, d\mu = \int_X (f\chi_A)\, d\mu$.

Prop.: Sean $f, g: X \to [0, +\infty]$ funciones medibles no negativas, $A, B \in \mathcal{A}$ y $c \geq 0$.
Entonces:

a. Si $0 \leq f \leq g$, entonces $\int_A f\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu$

b. Si $c \geq 0$, $\int_A cf\, d\mu = c \int_A f\, d\mu$

c. Si $A \subset B$, entonces $\int_A f\, d\mu \leq \int_B f\, d\mu$

d. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$\int_{A \cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B g\, d\mu$$

e. $\int_A f\,d\mu = 0$ sii $f = 0$ en c.t.p de A.

Dem

a. Si $0 \le S \le f$ es simple, entonces $0 \le S \le g \Rightarrow \int_A S\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$ por definición, y tomando el supremo en S, $\int_A f\,d\mu \le \int_A g\,d\mu$.

b. Si $c = 0$ es obvio. Si $c > 0$

$$\int_A cf\,d\mu = \sup\left\{ \int_A S\,d\mu : 0 \le S \le cf,\ S \text{ simple} \right\} = \sup\left\{ \int_A cS\,d\mu : 0 \le cS \le cf,\ S \text{ simple} \right\} = \sup\left\{ \int_A cS\,d\mu : 0 \le S \le f,\ S \text{ simple} \right\} = c \sup\left\{ \int_A S\,d\mu : 0 \le S \le f,\ S \text{ simple} \right\}$$

$= c\int_A f\,d\mu$, ya que si $S = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ es simple, $E_i \cap E_j = \Phi$ si $i \neq j$,

$$\int_A cS\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} c\,c_j\,\mu(E_j \cap A) = c\int_A S\,d\mu.$$

c. Si $A \subset B$ y $S = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j}$ es simple, $S \geq 0$,

$$\int_A S\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j\,\mu(E_j \cap A) \le \sum_{j=1}^{N} c_j\,\mu(E_j \cap B) = \int_B S\,d\mu$$

y tomando el supremo sobre las S simples t.q. $0 \le S \le f$ se sigue que

$$\int_A f\,d\mu \le \int_B f\,d\mu.$$

d. Si $A \cap B = \Phi$, $S \geq 0$ es simple:

$$\int_{A\cup B} S\,d\mu = \sum_{j=1}^{N} c_j\,\mu(E_j \cap A \cup E_j \cap B) = \sum_{j=1}^{N} c_j\,\mu(E_j \cap A) + \sum_{j=1}^{N} c_j\,\mu(E_j \cap B)$$

$= \int_A S\,d\mu + \int_B S\,d\mu$; y si $0 \le S \le f$ se sigue que

$$\int_{A\cup B} S\,d\mu \le \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu \quad \forall\, 0 \le S \le f \text{ simple},$$

y por definición:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu \le \int_A f\,d\mu + \int_B g\,d\mu$$

Si $0 \le S_1, S_2 \le f$ son simples, $S = \max\{S_1, S_2\}$ también es simple y $0 \le S \le f$, $S_i \le S$ para $i = 1, 2$, luego,

$$\int_A s_1\,d\mu + \int_B s_2\,d\mu \le \int_A s\,d\mu + \int_B s\,d\mu = \int_{A\cup B} s\,d\mu \le \int_{A\cup B} f\,d\mu$$

y tomando el supremo en S_1 y después en S_2 se sigue que:

$$\int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu \le \int_{A\cup B} f\,d\mu.$$

e.($\Leftarrow$) Si $f=0$ en c.t.p de A, $\mu(\{x\in A: f(x)>0\})=0$. Si $0\le s\le f$ es simple y $s=\sum_{j=1}^{N} c_j\chi_{E_j}$, $E_i\cap E_j=\Phi$ si $i\neq j$, $c_i>0$ $\forall i=1\ldots n$, resulta que si $E_i\cap A\neq\Phi$
$E_i\cap A\subset\{x\in A: f(x)>0\}$. Luego $\mu(E_i\cap A)=0$. $\forall i=1\ldots N$ y $\int_A s\,d\mu=0$.

($\Rightarrow$) Si $\int_A f\,d\mu=0$ y $B_\varepsilon=\{x\in A: f(x)>\varepsilon\}$, $0\le\varepsilon\chi_{B_\varepsilon}\le f$ y

$\varepsilon\mu(B_\varepsilon)\le\int_A f\,d\mu=0$. $\therefore$ $\mu(\{x\in A: f(x)>\frac{1}{n}\})=0$ $\forall n\ge 1$, de donde

$\mu(\{x\in A: f(x)>0\})=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in A: f(x)>\frac{1}{n}\})\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{x\in A: f(x)>\frac{1}{n}\})=0.$

$\therefore$ $f=0$ en c.t.p de A.

.2 Teorema de la convergencia monótona y lema de Fatou

lema: Si $s: X\to[0,+\infty)$ es una función simple no negativa y definimos $\nu: \mathcal{A}\to[0,+\infty]$ como:

$$\nu(A)=\int_A s\,d\mu,$$

entonces ν es una medida en $\mathcal{A}$.

Dem: si $s=\sum_{j=1}^{N} c_j\chi_{E_j}$, $E_i\cap E_j=\Phi$ si $i\neq j$.

. $\nu(\Phi)=\int_\Phi s\,d\mu=\sum_{j=1}^{N} c_j\mu(E_j\cap\Phi)=0$

. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ es una familia disjunta:

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{j=1}^{N}c_j\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\cap E_j)=\sum_{j=1}^{N}c_j\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n\cap E_j)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}c_j\mu(A_n\cap E_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(A_n).$$

Tma de la convergencia monótona: Sea $0\le f_1\le f_2\le\cdots\le f_n\cdots$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas en $(X,\mathcal{A})$, y $f(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Entonces,

$$\int_X f\,d\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Dem

f es medible y ≥ 0. Como $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$ se tiene que
$$0 \leq \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f_{n+1}\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$$
y existe $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$. (1). Si $\alpha = +\infty$ el resultado es cierto. Si $\alpha < +\infty$, y S es una función simple, $0 \leq S \leq f$, considerando $\varepsilon > 0$, y
$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq (1-\varepsilon)S(x)\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$A_n \ldots$. Además, resulta que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \cdots$. Entonces, $(1-\varepsilon)S\chi_{A_n}$ es función simple,
$0 \leq (1-\varepsilon)S\chi_{A_n} \leq f_n$ y
$$(1-\varepsilon)\int_{A_n} S\,d\mu = (1-\varepsilon)\sum_{j=1}^{N} c_j\,\mu(E_j \cap A_n) = \int_X (1-\varepsilon)\chi_{A_n} S\,d\mu \leq \int_X f_n\,d\mu.$$
Pero $\nu(A) = \int_A S\,d\mu$ es una medida, y haciendo $n \to +\infty$
$$(1-\varepsilon)\int_X S\,d\mu \leq \alpha \quad \forall\, 0 < \varepsilon < 1,$$
y haciendo $\varepsilon \to 0$,
$$\int_X S\,d\mu \leq \alpha \quad \forall\, 0 \leq S \leq f \text{ función simple. Es decir,}$$
$\int_X f\,d\mu \leq \alpha$ (2). De (1) y (2) vemos que $\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n\,d\mu$.

Prop. Si $f, g : X \to [0, +\infty]$ son funciones medibles no negativas, entonces
$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Dem: Si $S, T : X \to [0, +\infty)$ son funciones simples no negativas:
$$S = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \chi_{A_i}, \ \{A_i\} \text{ disjuntos}, \quad T = \sum_{j=1}^{N} \beta_j \chi_{B_j}, \ \{B_j\} \text{ disjuntos},$$
$S+T$ es simple y
$$S+T = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \chi_{A_i \setminus (\bigcup_{j=1}^{N} B_j)} + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \chi_{B_j \setminus (\bigcup_{i=1}^{M} A_i)} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} (\alpha_i + \beta_j)\chi_{A_i \cap B_j}$$

que es una representación de $S+T$ por conjuntos disjuntos. Entonces,

$$\int_X (S+T)\,d\mu = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \mu(A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mu(B_j \setminus \bigcup_{i=1}^{M} A_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \mu(B_j) =$$

$$= \int_X S\,d\mu + \int_X T\,d\mu, \therefore \quad \int_X (S+T)\,d\mu = \int_X S\,d\mu + \int_X T\mu \text{ si } S, T \geq 0 \text{ son simples.}$$

Dadas $f, g \geq 0$, existen sucesiones de funciones simples:

$0 \leq S_1 \leq S_2 \cdots \leq S_n \cdots \leq f$, $\lim_{n\to+\infty} S_n = f$

$0 \leq T_1 \leq T_2 \cdots \leq T_n \cdots \leq g$, $\lim_{n\to+\infty} T_n = g$

y entonces:

$0 \leq S_1 + T_1 \leq S_2 + T_2 \cdots \leq S_n + T_n \cdots \leq f+g$, $\lim_{n\to+\infty} (S_n + T_n) = f+g$, y

por el tma de convergencia monótona:

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X (S_n+T_n)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X S_n\,d\mu + \lim_{n\to+\infty} \int_X T_n\,d\mu =$$

$$= \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

<u>Corolario</u>: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

<u>Dem.</u>

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right)$, sucesión creciente de funciones no negativas, y por el tma de convergencia monótona y la proposición anterior:

$$\int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X \sum_{j=1}^{n} f_j\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \int_X f_j\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

<u>Corolario</u>: Sea $f: X \to [0,+\infty)$ es medible no negativa y $\int_X f\,d\mu < +\infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ t.q. si $\mu(A) < \delta$, se verifica

$$\int_A f\,d\mu < \varepsilon.$$

Dem:

Si $f_n = \max\{f, n\}$, $0 \le f_1 \le f_2 \le f_3 \cdots \le f_n \cdots \le f$ y $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$

Dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 t.q $\int_X f d\mu - \frac{\varepsilon}{2} \le \int_X f_{n_0} d\mu$. Entonces si

$\delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$ y $\mu(A) < \delta$,

$$\int_A f d\mu = \int_A (\underbrace{f - f_{n_0}}_{\geq 0}) + \underbrace{f_{n_0}}_{\geq 0} d\mu \le \int_A (f - f_{n_0}) d\mu + \int_A f_{n_0} d\mu \le \int_X (f - f_{n_0}) d\mu + \int_A f_{n_0} d\mu$$

Como $0 \le f_{n_0} \le n_0$, $\int_A f_{n_0} d\mu \le \int_A n_0 d\mu = n_0 \int_A d\mu = n_0 \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2}$, y

$$\int_X f d\mu = \int_X (\underbrace{f - f_{n_0}}_{\geq 0}) + \underbrace{f_{n_0}}_{\geq 0} d\mu = \int_X (f - f_{n_0}) d\mu + \int_X f_{n_0} d\mu$$ y como $\int_X f_{n_0} d\mu \le$

$\int_X f d\mu < +\infty$, $\int_X (f - f_{n_0}) d\mu = \int_X f d\mu - \int_X f_{n_0} d\mu \le \frac{\varepsilon}{2}$.

luego si $\mu(A) < \delta$, $\int_A f \, d\mu \le \varepsilon$.

__Lema de Fatou:__ Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces:

$$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dem:

$\liminf_{n\to+\infty} f_n$ es función medible no negativa y $\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\ge1} \inf_{k\ge n} f_k$

Si $g_n(x) = \inf_{k\ge n} f_k(x)$, $g_n \ge 0$ es medible y $g_1 \le g_2 \le \cdots \le g_n \cdots$

y $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \sup_{n\ge1} g_n(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$. Entonces,

$\int_X \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu$, pero como $g_n \le f_n$ $\forall n \ge 1$,

$\int_X g_n d\mu \le \int_X f_n d\mu$ y $\lim_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu = \liminf_{n\to+\infty} \int_X g_n d\mu \le \liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu$.

La desigualdad en el lema de Fatou puede ser estricta: sea $\{f_n\}$ t.q.

$$f_{2n}(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}(x), \qquad f_{2n+1}(x) = \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x).$$

f_n es medible $\forall n \geq 1$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$ en $\mathbb{R}$ y

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n\to+\infty} f_n \, dx = 0 \qquad (dx = dm),$$

pero como $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dx = \frac{1}{2}$ $\forall n \geq 1$, $\liminf\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n \, d\mu = \frac{1}{2}$.

3.3. Funciones integrables:

Def. Si $f : X \to [-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}$ es medible en $(X, \mathcal{A})$ y definimos

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \qquad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

f^+ y f^- son funciones medibles no negativas, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Def. Sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa; se dice que f es integrable respecto a μ si

$$\int_X f \, d\mu < +\infty.$$

Si $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es una función medible cualquiera, se dice que f es integrable con respecto a μ si f^+ y f^- lo son. En este caso, definimos:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

[Si $A \subset X$ es medible y $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, diremos que f es int. en A si $f\chi_A$ es integrable a X, y definimos $\int_A f \, d\mu = \int_X f\chi_A \, d\mu$.]

Como $\int_X |f| \, d\mu = \int_X (f^+ + f^-) \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu$, f es integrable si y sólo si $|f|$ es integrable, y en este caso diremos que $f \in \mathcal{L}^1(X, d\mu) = \mathcal{L}^1(d\mu)$.

Prop: Se cumplen las siguientes propiedades:

i. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(d\mu)$, entonces $f + g \in \mathcal{L}^1(d\mu)$ y

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

ii. Si $f \in \mathcal{L}^1(d\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f \in L^1(d\mu)$ y

$$\int_X (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int_X f \, d\mu$$

iii. Si $f \in \mathcal{L}^1(d\mu)$, $\left| \int_X f \, d\mu \right| \leq \int_X |f| \, d\mu$.

iv. Si $f: X \to [-\infty, +\infty]$ es integrable, entonces $|f(x)| < +\infty$ en c.t.p de X.

Dem

i. Si $f, g \in \mathcal{L}^1(d\mu) \Rightarrow |f|, |g| \in L^1(d\mu)$ y $|f+g| \leq |f| + |g|$, luego

$$\int_X |f+g| \, d\mu \leq \int_X (|f|+|g|) \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu < +\infty$$

$\Rightarrow f+g \in \mathcal{L}^1(d\mu)$. Ahora, si f_1, f_2 son no negativas e integrables y $f = f_1 - f_2$, $|f| \leq f_1 + f_2$, luego $f \in \mathcal{L}^1(d\mu)$ y $f^+ - f^- = f_1 - f_2$; $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$, luego:

$$\int_X (f^+ + f_2) \, d\mu = \int_X (f_1 + f^-) \, d\mu$$

$$\int_X f^+ d\mu + \int_X f_2 \, d\mu = \int_X (f^+ + f_2) \, d\mu = \int_X (f_1 + f^-) \, d\mu = \int_X f_1 \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu$$

$$\therefore \int_X f \, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_X f_1 \, d\mu - \int_X f_2 \, d\mu.$$

Entonces, $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, y por 8 solución:

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X (f^+ + g^+) \, d\mu - \int_X (f^- + g^-) \, d\mu = \int_X f^+ d\mu + \int_X g^+ d\mu - \left(\int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu \right) = \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) + \left(\int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu \right) = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu.$$

ii. Si $f \in \mathcal{L}^1(d\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha f| = |\alpha| |f|$ y

$$\int_X |\alpha f| \, d\mu = \int_X |\alpha| |f| \, d\mu = |\alpha| \int_X |f| \, d\mu < +\infty \quad \text{ya que } |\alpha| \geq 0.$$

luego $\alpha f \in \mathcal{L}^1(d\mu)$.

Si $\alpha = 0$, $\alpha f \equiv 0$ y $\int_X (\alpha f) \, d\mu = 0 \cdot \int_X f \, d\mu = 0$.

Si $\alpha > 0$, $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ y $\int_X (\alpha f) \, d\mu = \int_X \alpha f^+ d\mu - \int_X \alpha f^- d\mu$

$= \alpha \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = \alpha \int_X f \, d\mu.$

Si $\alpha < 0$, $(\alpha f)^+ = |\alpha| f^-$, $(\alpha f)^- = |\alpha| f^+$ y $\int_X (\alpha f) \, d\mu = \int_X |\alpha| f^- d\mu -$

$- \int_X |\alpha| f^+ d\mu = -|\alpha| \left(\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right) = \alpha \int_X f \, d\mu.$

iii. $\int_X f\,d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \;\therefore\; \left|\int_X f\,d\mu\right| = \left|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\right| \le \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu$

$= \int_X |f|\,d\mu.$

iv. Si $f\in\mathcal{L}^1(d\mu)$, entonces $|f|\in\mathcal{L}^1(d\mu)$. Si $E_n = \{x\in X : |f(x)|\geq n\}$, $E_1\supset E_2 \cdots \supset E_n \cdots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\in X : |f(x)| = +\infty\}$ y $n\chi_{E_n}\leq |f|$. Entonces, $n\mu(E_n) = \int_X n\chi_{E_n}\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu$, $\therefore\; \mu(E_n)\leq \frac{1}{n}\int_X |f|\,d\mu \to 0$ si $n\to+\infty$. Como $\mu(E_1)<+\infty$, sabemos que $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mu(E_n) = 0$.

Prop: i. Si $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ es medible y $A\in\mathcal{A}$ es tal que $\mu(A)=0$; entonces $f\chi_A = 0$ en c.t.p de X, $f\chi_A\in\mathcal{L}^1(d\mu)$ y $\int_A f\,d\mu = 0$.

ii. Si $f, g\in\mathcal{L}^1(d\mu)$ y $f\leq g$ en c.t.p de X, entonces $\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$

iii. Si $A, B\in\mathcal{A}$, $A\cap B = \Phi$ y $f\in\mathcal{L}^1(d\mu)$, entonces

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

Dem

i. Como f es medible, $\{x\in X : f(x)\chi_A(x)\neq 0\}\subset A$ y es medible, luego $\mu(\{x\in X : f\cdot\chi_A\neq 0\}) = 0$ y $f\cdot\chi_A = 0$ en c.t.p. También $|f|\cdot\chi_A = 0$ en c.t.p de X, luego $\int_X |f|\chi_A\,d\mu = 0$. y $\left|\int f\chi_A\,d\mu\right| \leq \int |f|\chi_A\,d\mu = 0$.

ii. Si $f, g\in\mathcal{L}^1(d\mu)$ y $f\leq g$ en c.t.p de X, llamando $A = \{x\in X : g(x) < f(x)\}$ sabemos que $\mu(A) = 0$. Entonces:

$$\int_X g\,d\mu = \int_X (g-f)\,d\mu + \int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X (g-f)\chi_{X\setminus A}\,d\mu + \int_X (g-f)\chi_A\,d\mu =$$

$$= \int_X f\,d\mu + \underbrace{\int_X (g-f)\chi_{X\setminus A}\,d\mu}_{\geq 0} \geq \int_X f\,d\mu.$$

iii. El resultado es cierto si $f\geq 0$ como ya vimos. En general:

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_X f\chi_{A\cup B}\,d\mu = \int_X f(\chi_A+\chi_B)\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu + \int_X f\chi_B\,d\mu =$$

$$= \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

De esta proposición, vemos que si $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)=0$ y $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ es tal que $f\geq 0$ ó $f\in\mathcal{L}^1(d\mu)$

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\setminus A} f\,d\mu + \int_A f\,d\mu = \int_{X\setminus A} f\,d\mu,$$

es decir, los valores de f sobre un conjunto de medida nula no cambian el valor de la integral.

Def: Si $f: X \to \mathbb{C}$ es una función medible con valores complejos ($\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ son medibles), diremos que f es integrable si $\int |f| \, d\mu < +\infty$. Puesto que $|f| \leq |\mathrm{Re} f| + |\mathrm{Im} f| \leq 2|f|$, f es integrable si y sólo si $\mathrm{Re} f$ e $\mathrm{Im} f$ son integrables y, en este caso, definimos:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \mathrm{Re} f \, d\mu + i \int_X \mathrm{Im} f \, d\mu.$$

3.4 <u>Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue</u>:

<u>Tma de la convergencia dominada</u>: Sea $f_n: X \to [-\infty, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles, tales que $|f_n| \leq F$ con $F \in \mathcal{L}^1(d\mu)$ en c.t.p de X, y $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ existe en c.t.p. de X. Entonces f es integrable y

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0, \quad y \quad \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dem:
Como $|f| \leq F$ en c.t.p., es claro que f es integrable, y además $|f_n - f| \leq 2F$ en c.t.p. Entonces por el lema de Fatou

$$\int_X 2F \, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_X (2F - |f - f_n|) \, d\mu =$$

$$= \liminf_{n \to +\infty} \left(\int_X 2F \, d\mu - \int_X |f - f_n| \, d\mu \right) = \int_X 2F \, d\mu - \limsup_{n \to +\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu$$

$$\therefore \limsup_{n \to +\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0, \quad \text{es decir,}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 0.$$

El resto es consecuencia de la desigualdad:

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) \, d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu.$$

j: La convergencia dominada es necesaria para conmutar el límite con integración para sucesiones no crecientes:

$$f_n(x) = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})} \quad , \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = n\, m\left(\left(0,\tfrac{1}{n}\right)\right) = \frac{n}{n} = 1 \quad y \quad \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1 \neq 0.$$

<u>Corolario 1</u>: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < +\infty,$$

entonces,

i. la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge en c.t.p a una función $f(x)$.

ii. $f\in\mathcal{L}^1(d\mu)$ y $\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

Dem.

Como $|f_n|\geq 0$, $\int_X \sum_{n=1}^{+\infty}|f_n|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X |f_n|\,d\mu < +\infty$. Luego $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}|f_n|(x) < +\infty$ p.c.t $x\in X$ y $F\in\mathcal{L}^1(d\mu)$. Entonces, existe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ en c.t.p y es medible. Como $F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ verifica, $|F_n(x)|\leq F(x)$ $\forall n\geq 1$ ó $f(x) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x)$ en c.t.p de X, por el teo de la convergencia dominada está en $\mathcal{L}^1(d\mu)$ y

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_X \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_X f_j(x)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

<u>Corolario 2</u>: Sea $f: X\times I \to \mathbb{R}$ ($I\subset\mathbb{R}$ intervalo), $f(\cdot,t)\in\mathcal{L}^1(d\mu)$ para todo $t\in I$ y consideramos la función:

$$F(t) = \int_X f(x,t)\,d\mu(x).$$

y supongamos que $g\in\mathcal{L}^1(d\mu)$, $g\geq 0$. Entonces,

i. Si $f(\cdot,t)$ es continua en $t_0\in I$ para todo $x\in X$ y además $|f(x,t)|\leq g(x)$ $\forall (x,t)\in X\times I$, resulta que F es continua en t_0.

ii. Si $f(\cdot,t)$ es derivable en I y además $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\leq g(x)$, entonces se cumple que F es derivable en I y

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,d\mu(x).$$

Dem;

i. Como $f(\cdot,t) \in \mathcal{L}^1(d\mu)$, $F(t)$ está bien definida $\forall t \in I$. Si $\{t_n\} \subset I$ es sucesión y $\{t_n\} \to t_0$, $\{f(\cdot,t_n)\}$ es sucesión de funciones medibles, $|f(x,t_n)| \leq g(x)$ $\forall n \geq 1$ y $\lim_{n\to+\infty} f(x,t_n) = f(x,t_0)$ $\forall x \in X$ ya que $f(x,\cdot)$ es continua en I, y por el tma de la convergencia dominada

$$F(t_n) = \int_X f(x,t_n)\,d\mu \to \int_X f(x,t_0)\,d\mu = F(t_0),$$

luego F es cont. en t_0.

ii. Si $\{t_n\} \subset I$ es sucesión y $\{t_n\} \to t_0$, por el tma del valor medio

$$\left| \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0} \right| \leq g(x) \quad \forall x \in X \quad \forall n \geq 1.$$

y por el tma de convergencia monótona

$$\frac{F(t_n) - F(t_0)}{t_n - t_0} = \int_X \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}\,d\mu(x) \to \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,d\mu,$$

luego F es derivable en t_0 y

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)\,d\mu \quad \forall t_0 \in I.$$

3.5 Relación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.

Consideramos ahora $\mathbb{R}$ con el espacio de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, m)$ donde $\mathcal{A}$ es la σ-álgebra de Lebesgue.

Prop: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada que es integrable de Riemann, entonces es integrable de Lebesgue y las integrales coinciden.

Dem;

Como $D = \{x \in [a,b] : f \text{ es discontinua en } [a,b]\}$ tiene medida cero, D es medible Lebesgue ya que $m^*(D) = m(D) = 0$. y $f : [a,b]\setminus D \to \mathbb{R}$ es continua, luego medible. Si

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a,b]\setminus D \\ 0 & x \in D \end{cases}$$

$\tilde{f}$ es medible en $[a,b]$, y como $\tilde{f} = f$ en c.t.p de $[a,b]$, f es medible.

Como f es acotada, existe $M>0$ t.q. $|f|\leq M$; y $0\leq f+M\leq 2M$.

Entonces,

$$0\leq \int_{[a,b]}(f+M)\,dm \leq \int_{[a,b]} 2M\,dm = 2M(b-a) < +\infty,$$

entonces $f+M\in \mathcal{I}'([a,b],dm)$ y como $M\in \mathcal{I}'([a,b],dm)$ también $f\in \mathcal{I}'(dm)$.

Ahora, si P es una partición de $[a,b]$, $P=\{a=x_0<x_1\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$

$$S_1=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\chi_{(x_i,x_{i+1}]} \quad y \quad S_2=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\chi_{(x_i,x_{i+1}]}, \quad m_i=\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f,\ M_i=\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f$$

son funciones simples en $[a,b]$ t.q. $S_1\leq f\leq S_2$. y por tanto:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1}-x_i)=L(f,P)=\int_{[a,b]} S_1\,dm \leq \int_{[a,b]} f\,dm \leq \int_{[a,b]} S_2\,dm = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1}-x_i)$$

$= U(f,P)$.

$$\therefore \quad L(f,P)\leq \int_{[a,b]} f\,dm \leq U(f,P) \quad \forall P \text{ partición de } [a,b].$$

y por la definición de la integral de Riemann vemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,dm.$$

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable de Riemann sobre cada intervalo $[a,c]$ de $[a,b)$ $(-\infty<a<c<b\leq+\infty)$, la integral impropia de Riemann de f sobre $[a,b]$ se define como:

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx.$$

Si $f\geq 0$ y la integral impropia es convergente, el teorema de convergencia monótona implica que f es integrable de Lebesgue en $[a,b]$ y su integral coincide con la integral impropia de Riemann de f.

Dem: Sea $f_n(x)=f(x)\chi_{[a,b-\frac{1}{n}]}$, $0\leq f_1\leq f_2\cdots\leq f_n\cdots$ y por el teorema de convergencia

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x) \text{ en } [a,b)$$

monótona

$$\int_{[a,b]} f\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} f_n\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b-\frac{1}{n}} f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx < +\infty,$$

luego $f \in \mathcal{L}^1([a,b], d\mu)$

Si f no es no negativa, puede existir la integral impropia de Riemann sin que la función sea integrable de Lebesgue: puesto que $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no es int. de Lebesgue en $[0,+\infty)$, puesto que

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi}\right) \int_0^{\pi} |\sin x|\,dx =$$

$= +\infty$, y sin embargo

$$\lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$