Tema IV: Medida producto.

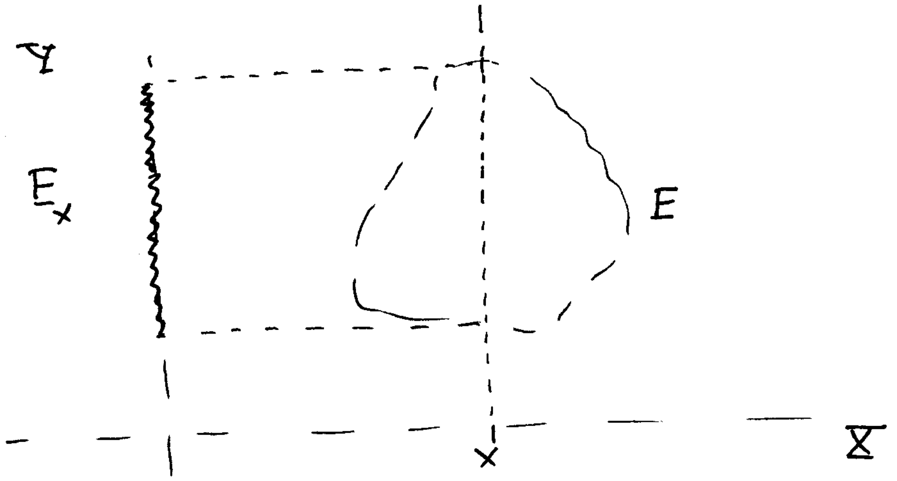
Def: X e Y dos conjuntos, $X\times Y=\{(x,y): x\in X,\ y\in Y\}$. Si $A\subset X$, $B\subset Y$, $A\times B\subset X\times Y$. A todo conjunto de la forma $A\times B$ lo llamaremos un rectángulo en $X\times Y$.

Supongamos que $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ son espacios medibles. Un rectángulo medible es cualquier conjunto de la forma $A\times B$, con $A\in\mathcal{A}$ y $B\in\mathcal{B}$. Si $Q=R_1\cup R_2\cup\dots\cup R_N$, donde cada R_i es un rectángulo medible y $R_i\cap R_j=\emptyset$, para $i\neq j$, decimos que $Q\in\mathcal{E}$, la clase de conjuntos elementales.

$\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ se define como la σ-álgebra en $X\times Y$ más pequeña que contiene a todo rectángulo medible.

Si $E\subset X\times Y$, $x\in X$, $y\in Y$, definimos

$$E_x=\{y\in Y:(x,y)\in E\},\qquad E^y=\{x\in X:(x,y)\in E\} \quad (1)$$



Tma 1: Si $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, entonces $E_x\in\mathcal{B}$ y $E^y\in\mathcal{A}$, para todo $x\in X$ e $y\in Y$.

Dem: Sea Ω la clase de todos los $E\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ tales que $E_x\in\mathcal{B}$ y $E_y\in\mathcal{A}$, para todo $x\in X$, $y\in Y$. Si $E=A\times B$, $E_x=B$ si $x\in A$, $E_x=\emptyset$ si $x\notin A$. Por tanto, todo rectángulo medible pertenece a Ω; Además, Ω es una σ-álgebra en $X\times Y$, es decir, $\Omega=\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. □

Def: Una clase monótona $\mathcal{M}$ es una colección de conjuntos con las propiedades siguientes: Si $A_i \in \mathcal{M}$, $B_i \in \mathcal{M}$, $A_i \subset A_{i+1}$, $B_i \supset B_{i+1}$, para $i = 1, 2, 3, \dots,$ y si

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i; \qquad B = \bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i, \qquad (2)$$

entonces $A \in \mathcal{M}$ y $B \in \mathcal{M}$.

Tma 2. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es la clase monótona más pequeña que contiene a todos los conjuntos elementales.

Dem: Sea $\mathcal{M}$ la clase monótona más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$. La demostración de que esta clase existe es elemental. Como $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es una clase monótona, $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Las identidades,

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = A_1 \cap A_2 \times B_1 \cap B_2,$$

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = (A_1 \setminus A_2) \times B_1 \cup A_1 \cap A_2 \times (B_1 \setminus B_2),$$

muestran que la intersección de dos rectángulos medibles también lo es y que su diferencia es la unión de dos rectángulos medibles disjuntos y, por tanto que es un conjunto elemental. Si $P \in \mathcal{E}$ y $Q \in \mathcal{E}$, se deduce que $P \cap Q \in \mathcal{E}$ y $P \setminus Q \in \mathcal{E}$. Como

$$P \cup Q = (P \setminus Q) \cup Q$$

y $(P \setminus Q) \cap Q = \phi$, tenemos también $P \cup Q \in \mathcal{E}$.

Para un conjunto cualquiera $P \subset X \times Y$, definimos $\Omega(P)$ como la clase de todos los $Q \subset X \times Y$ tales que $P \setminus Q \in \mathcal{M}$, $Q \setminus P \in \mathcal{M}$ y $P \cup Q \in \mathcal{M}$.

Son obvias las siguientes propiedades:

a) $Q \in \Omega(P)$ sii $P \in \Omega(Q)$

b) $\Omega(P)$ es una clase monótona, puesto que $\mathcal{M}$ es una clase monótona.

Fijemos $P \in \mathcal{E}$, las observaciones anteriores sobre $\Omega(P)$, muestran que $Q \in \Omega(P)$ para todo $Q \in \mathcal{E}$; por tanto $\mathcal{E} \subset \Omega(P)$, y b) implica que $\mathcal{M} \subset \Omega(P)$.

Por otra parte, fijemos $Q \in \mathcal{M}$. Sabemos que $Q \in \Omega(P)$, si $P \in \mathcal{E}$. Por a), $P \in \Omega(Q)$; por tanto, $\mathcal{E} \subset \Omega(Q)$, y si acudimos a b) una vez más, $\mathcal{M} \subset \Omega(Q)$.

Resumiendo: Si $P, Q \in \mathcal{M}$, entonces $P \setminus Q \in \mathcal{M}$ y $P \cup Q \in \mathcal{M}$.

Se tiene pues, que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra en $X \times Y$:

1) $X \times Y \in \mathcal{E}$; por tanto, $X \times Y \in \mathcal{M}$

2) Si $Q \in \mathcal{M}$, $Q^c \in \mathcal{M}$, puesto que la diferencia de dos elementos de $\mathcal{M}$ está en $\mathcal{M}$

3) Si $P_i \in \mathcal{M}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, y $P = \bigcup P_i$, pongamos

$$Q_n = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n.$$

Como $\mathcal{M}$ es cerrada bajo uniones finitas, $Q_n \in \mathcal{M}$. Puesto que $Q_n \subset Q_{n+1}$ y $P = \bigcup Q_n$, la monotonía de $\mathcal{M}$ muestra que $P \in \mathcal{M}$.

Entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, $\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, y (por definición) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{E}$. Por tanto, $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $\square$

Def.: Si $f: X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in X$, asociamos una función $f_x: Y \to \overline{\mathbb{R}}$, mediante $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente, si $y \in Y$, f^y es la función definida en X mediante $f^y(x) = f(x, y)$.

Tma 3: Sea f una función $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$-medible en $X \times Y$. Entonces:

a) $\forall x \in X$, f_x es $\mathcal{B}$-medible.

b) $\forall y \in Y$, f^y es $\mathcal{A}$-medible.

Dem: Para cualquier abierto V en $\overline{\mathbb{R}}$, pongamos

$$Q = \{(x, y) : f(x, y) \in V\}.$$

Entonces $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, y $Q_x = \{y : f_x(y) \in V\} = f_x^{-1}(V)$. El Tma. 1 muestra que $Q_x \in \mathcal{B}$, lo que muestra a). b) es análogo. $\square$

Tma 4. Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$, $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finita. Supongamos que $Q \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Si

$$\varphi(x)=\nu(Q_x), \qquad \psi(y)=\mu(Q^y), \quad x\in X,\ y\in Y, \tag{3}$$

entonces φ es $\mathcal{A}$-medible, ψ es $\mathcal{B}$-medible y

$$\int_X \varphi(x)\,d\mu(x) = \int_Y \psi(y)\,d\nu(y). \tag{4}$$

Notas: Las hipótesis sobre los espacios de medida son, más explícitamente, que μ y ν son medidas sobre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente, X es la unión numerable de conjuntos disjuntos X_n con $\mu(X_n)<+\infty$, y que Y es la unión numerable de conjuntos disjuntos Y_m con $\nu(Y_m)<+\infty$.

El Tma 1 muestra que tienen sentido las definiciones (3). Como,

$$\nu(Q_x)=\int_Y \chi_Q(x,y)\,d\nu(y), \quad x\in X \tag{5}$$

$$\mu(Q^y)=\int_X \chi_Q(x,y)\,d\mu(x), \quad y\in Y,$$

la conclusión (4) puede escribirse en la forma:

$$\int_X \left(\int_Y \chi_Q(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X \chi_Q(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y). \tag{6}$$

Dem: Sea Ω la clase de todas las $Q\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ para las que se verifican las conclusiones del Tma 4. Pretendemos probar que Ω posee las siguientes cuatro propiedades:

a) Todo rectángulo medible está en Ω

b) Si $Q_1\subset Q_2\subset Q_3\subset\cdots$, si cada $Q_i\in\Omega$, y si $Q=\bigcup Q_i$, entonces $Q\in\Omega$.

c) Si $\{Q_i\}$ es una colección numerable disjunta de elementos de Ω y si $Q=\bigcup Q_i$, entonces $Q\in\Omega$.

d) Si $\mu(A) < +\infty$ y $\lambda(B) < +\infty$, si

$$A \times B \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \cdots,$$

si $Q = \bigcap Q_i$ y $Q_i \in \Omega$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $Q \in \Omega$.

Si $Q = A \times B$, donde $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, entonces

$$\lambda(Q_x) = \lambda(B) \chi_A(x) \quad y \quad \mu(Q^y) = \mu(A) \chi_B(y), \tag{7}$$

y por tanto, cada una de las integrales en (4) es igual a $\mu(A)\lambda(B)$. Esto proporciona a).

Para demostrar b), sean φ_i y ψ_i las asociadas a Q_i en la forma que (3) asocia φ y ψ a Q. El TCM muestra que

$$\varphi_i(x) \to \varphi(x), \quad \psi_i(y) \to \psi(y) \qquad (i \to +\infty),$$

en donde la convergencia es monótona creciente en todo punto. Como se supone que φ_i y ψ_i satisfacen la conclusión del Tma 4, b) se deduce del TCM.

Para uniones finitas de conjuntos disjuntos, c) es claro. El caso general de c), se deduce entonces de b).

La demostración de d) es como la de b), excepto que utilizamos el TCD en lugar del TCM. Esto se puede hacer porque $\mu(A) < +\infty$ y $\lambda(B) < +\infty$.

Definamos ahora

$$Q_{nm} = Q \cap (X_n \times Y_m), \quad m, n = 1, 2, 3, \ldots$$

y sea $\mathcal{M}$ la clase de todos los $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tales que $Q_{nm} \in \Omega$, para todos los $n, m \geq 1$. Entonces b) y d) muestran que $\mathcal{M}$ es una clase monótona; a) y c) muestran que $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$; y como $\mathcal{M} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, el Tma 2 implica que $\mathcal{M} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Entonces, $Q_{mn} \in \Omega$ para todo $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ y para todo $m, n \geq 1$.

Como $Q = \bigcup_{m,n=1}^{+\infty} Q_{mn}$ y estos conjuntos son disjuntos, concluimos de c) que $Q \in \Omega$, lo que completa la demostración. $\blacksquare$

Def: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ son como en el Tma 4, y si $Q \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, definimos

$$(\mu \times \nu)(Q) = \int_X \nu(Q_x)\, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y)\, d\nu(y). \qquad (8)$$

La igualdad de las integrales en (8) es el contenido del Tma 4. Llamamos a $\mu \times \nu$ el <u>producto</u> de las medidas μ y ν. De un corolario del TCM se desprende inmediatamente que $\mu \times \nu$ es realmente una medida sobre $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Obsérvese también que $\mu \times \nu$ es σ-finita.

Def: $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ se dice espacio de medida producto de μ y ν.

<u>El teorema de Fubini</u>

<u>Tma</u> 5: Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos, y sea $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-medible sobre $X \times Y$.

a) Si $0 \leq f \leq +\infty$, y si

$$\varphi(x) = \int_Y f_x(y)\, d\nu(y), \qquad \psi(y) = \int_X f^y(x)\, d\mu(x), \qquad x \in X,\ y \in Y, \qquad (9)$$

entonces φ es $\mathcal{A}$-medible, ψ es $\mathcal{B}$-medible, y

$$\int_X \varphi\, d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu) = \int_Y \psi\, d\nu \qquad (10)$$

b) Si $\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x\, d\nu(y)$, $x \in X$ y $\int_X \varphi^*(x)\, d\mu(x) < +\infty$, entonces $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

c) Si $f \in L^1(\mu\times\lambda)$, entonces $f_x \in L^1(\lambda)$ p.c.t. $x\in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ p.c.t. $y \in Y$; las funciones φ y ψ, definidas mediante (9) en c.t.p., están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\lambda)$, respectivamente, y se verifica (10).

<u>Nota</u>: Las primeras y últimas integrales de (10) pueden escribirse también en la forma más habitual:

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\lambda(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\lambda(y). \quad (11)$$

Estas son llamadas "integrales iteradas" de f. La segunda integral en (10) se llama a menudo "integral doble".

La combinación de b) y c) proporciona el útil resultado siguiente: Si f es $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$-medible y si

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\lambda(y) \right) d\mu(x) < +\infty, \quad (12)$$

entonces las dos integrales iteradas en (11) son iguales y finitas.

En otras palabras, puede cambiarse el orden de integración para funciones $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$-medibles si $f \geq 0$ y también si una de las integrales iteradas de $|f|$ son finitas.

<u>Dem</u>: Consideremos primero a). Por el Tma 3, tienen sentido las definiciones (8), (10) de φ y ψ. Supongamos que $Q \in \mathcal{A}\times\mathcal{B}$ y $f = \chi_Q$. Por tanto, a) se verifica en entonces exactamente la conclusión del Tma 4. Por tanto, a) se verifica para toda las funciones s no negativas simples $(\mathcal{A}\times\mathcal{B})$-medibles. En el caso general, existe una sucesión de tales funciones s_n tales que

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \cdots \quad \text{y} \quad s_n(x,y) \to f(x,y) \text{ en todo punto de } X\times Y.$$

Si φ_n es la asociada a s_n de la misma forma en que φ está asociada a f, tenemos

$$\int_{X} \varphi_n \, d\mu = \int_{X\times Y} s_n \, d(\mu\times\lambda) \quad , \quad n=1,2,3,\ldots \qquad (13)$$

El TCM, aplicado en $(Y, \mathcal{B}, \lambda)$, muestra que $\varphi_n(x)$ crece hacia $\varphi(x)$ para todo $x \in X$, cuando $n \to +\infty$; y el TCM puede aplicarse otra vez a las dos integrales de (13), y se obtiene la primera igualdad de (10). La segunda mitad de dicha ecuación se obtiene intercambiando los papeles de x e y. Esto completa a).

Si aplicamos a) a $|f|$, vemos que se verifica b).

Si f es real, puede aplicarse a) a f^+ y a f^-. Sean φ_1 y φ_2 las que corresponden a f^+ y a f^- como φ corresponde a f en (9). Como $f \in L^1(\mu\times\lambda)$ y $f^+ \leq |f|$, y a) se verifica para f^+, vemos que $\varphi_1 \in L^1(\mu)$. Análogamente, $\varphi_2 \in L^1(\lambda)$. Como

$$f_x = (f^+)_x - (f^-)_x,$$

tenemos que $f_x \in L^1(\lambda)$ para todo x para el que $\varphi_1(x)+\varphi_2(x) < +\infty$; como φ_1 y φ_2 están en $L^1(\mu)$, esto ocurre p.c.t. $x \in X$; en cualquiera de tales x, tenemos $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Por tanto, $\varphi \in L^1(\mu)$. Ahora (10) se verifica con φ_1 y f^+ y con φ_2 y f^- en lugar de φ y f; si restamos las ecuaciones resultantes, obtenemos una mitad de c). La otra mitad se demuestra de la misma manera, con f^y y ψ en lugar de f_x y φ.

∎

<u>Observaciones</u>:

$\mathcal{B}_k$ = σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^k$.

$\mathcal{M}_k$ = σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}^k$.

Sabemos que $E \in \mathcal{M}_k$ sii $E = E_1 \cup E_2$, donde $E_1 \in \mathcal{B}_k$ y $m_k^*(E_2)=0$ y que $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_k, m_k)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k, m_k)$ (Ejercicio 1 del Rel. 2).

Tma 6: $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s \subsetneqq \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_k$, si $k = r+s$, $r, s \geq 1$.

Dem: Sabemos que $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s$ (Ejercicio 10, Rel. 4). Por construcción $\mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s \subset \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$.

Si $E \subset \mathbb{R}^r$ y $m_r^*(E) = 0$, sabemos que $m_k^*(E \times \mathbb{R}^s) = 0$ (Ejercicio 11, Rel. 4). Si $E \in \mathcal{M}_r$, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \in \mathcal{B}_r$, $m_r^*(E_2) = 0$. Entonces, $E \times \mathbb{R}^s = (E_1 \times \mathbb{R}^s) \cup (E_2 \times \mathbb{R}^s)$, $(E_1 \times \mathbb{R}^s) \in \mathcal{B}_k$ y $m_k^*(E_2 \times \mathbb{R}^s) = 0$, lo que muestra que $E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_k$. Por tanto, si $E \in \mathcal{M}_r$ y $F \in \mathcal{M}_s$,

$$E \times F = (E \times \mathbb{R}^s) \cap (\mathbb{R}^r \times F) \in \mathcal{M}_k;$$

y esto implica que $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_k$.

Si $F \in \mathcal{M}_r \setminus \mathcal{B}_r$, $F \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$, pero $F \times \mathbb{R}^s \notin \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s$ por el Tma 1: $(F \times \mathbb{R}^s)^0 = F$. □

Tma 7. $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s, m_r \times m_s)$ no es completo y $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \subsetneqq \mathcal{M}_k$.

Dem: Sea $E \in \mathcal{M}_r$, $E \neq \Phi$, $m_r^*(E) = 0$. y $F \subset \mathbb{R}^s$ tal que $F \notin \mathcal{M}_s$. Entonces $E \times \mathbb{R}^s \in \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$, $m_r \times m_s(E \times \mathbb{R}^s) = m_r(E)\, m_s(\mathbb{R}^s) = 0$, pero $E \times F \notin \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$, por el Tma 1: si $x \in E$, $(E \times F)_x = F$ y $F \notin \mathcal{M}_s$; es decir $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s, m_r \times m_s)$ no es completo. Como

$$m_k^*(E \times F) \leq m_k^*(E \times \mathbb{R}^s) = 0,$$

tendremos que $E \times F \in \mathcal{M}_k$, pero $E \times F \notin \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$. □

Por el ejercicio 2 de la Rel 2, $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_k, m_k)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s, m_k)$. Recordamos ahora dos resultados en W. Rudin, Análisis Real y Complejo, p. 44 y 135 respectivamente:

Tma 2.5.2 (d): Sea $\mu : \mathcal{B}_k \to [0, +\infty]$ una medida tal que

i) $\mu(x+E) = \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}_k$, $x \in \mathbb{R}^k$.

ii) $\mu(K) < +\infty$, $\forall K \subset \mathbb{R}^k$ compacto.

Entonces,

$$\mu(E) = \mu([0,1)^n)\, m(E), \quad \forall E \in \mathcal{B}_k.$$

<u>Lema 1</u>: Sea $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ la compleción de un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función $\tilde{\mathcal{A}}$-medible. Entonces existe $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ que es $\mathcal{A}$-medible, tal que $f(x) = g(x)$ p.c.t. $x \in X$.

Por construcción es evidente que

$$m_r \times m_s (x+E) = m_r \times m_s (E), \quad \forall E \in \mathcal{B}_k, \ \forall x \in \mathbb{R}^k,$$

$$m_r \times m_s ([0,1)^k) = 1$$

y por el Tma 2.5.2(d) en W. Rudin, tendremos que

$$m_k = m_r \times m_s, \quad \text{en } \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s. \qquad (14)$$

Además, el Tma 6, que $\mathcal{M}_k$ es la compleción de $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k, m_k)$ y (14), implican que

$$\mathcal{M}_k \subset \{E \subset \mathbb{R}^k : E = E_1 \cup D, \ E_1 \in \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s, \ D \subset E_2, \ E_2 \in \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s \text{ con } m_r \times m_s(E_2) = 0\} \subset \mathcal{M}_k.$$

En particular, $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_k, m_r \times m_s)$ es la compleción de $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s, m_r \times m_s)$ y $m_k = m_r \times m_s$ en $\mathcal{M}_r \times \mathcal{M}_s$.

Finalmente, si $f: \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{M}_k$-medible y

$$f \geq 0 \quad \text{o} \quad \int_{\mathbb{R}^k} |f| \, dm_k < +\infty,$$

existe $g: \mathbb{R}^k \to \overline{\mathbb{R}}$ que es $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_r \times \mathcal{B}_s$-medible tal que $g(x) = f(x)$ en c.t.p $x \in \mathbb{R}^k$ en $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_k, m_k)$. Por tanto, podemos aplicar Fubini a f en $\mathbb{R}^k$; es decir:

$$\int_{\mathbb{R}^k} f \, dm_k = \int_{\mathbb{R}^k} g \, d(m_k \times m_s)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} g(x,y) \, dm_s(y) \right) dm_r(x) = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^r} g(x,y) \, dm_r(x) \right) dm_s(y),$$

si $f \geq 0$, y cuando f cambia de signo, si es integrable en $(\mathbb{R}^k, \mathcal{M}_k, d\omega_k)$, como

$$\int_{\mathbb{R}^k} |f| \, d\omega_k = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s} |g| \, d(\omega_r \times \omega_s) < +\infty,$$

también tendremos por Fubini que

$$\int_{\mathbb{R}^k} f \, d\omega_k = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^s} g(x,y) \, d\omega_s(y) \right) d\omega_r(x) = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x,y) \, d\omega_r(x) \right) d\omega_s(y).$$

Cambio de variable:

Tma: Ω_1, Ω_2 abiertos en $\mathbb{R}^n$, $g: \Omega_1 \longleftrightarrow \Omega_2$ biyección de clase C^1, $J_g(x)$ = matriz Jacobiana de la diferencial de $g = \left(\frac{\partial g^i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^{n}$, $f: \Omega_2 \to [0, +\infty]$ medible. Entonces,

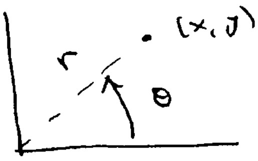
$$\int_{\Omega_2} f(y) \, dy = \int_{\Omega_1} f(g(x)) \, |\det J_g(x)| \, dx$$

Coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$:

Caso $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $g: (0, 2\pi) \times (0, +\infty) \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : \substack{y=0 \\ x \geq 0}\}$

$(\theta, r) \leadsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$dx\,dy = |\det J_g(r,\theta)| \, dr\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$



$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, dx\,dy = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r f(r\cos\theta, r\sin\theta) \, d\theta\, dr$$

Si $h: S^1 \to \mathbb{R}$, ds = medida de longitud de arco en S^1, $ds = d\theta$

$$\int_{S_1} h\,ds = \int_0^{2\pi} h(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

y para $f: \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$, si $dA = m \times m = du \times du$, por Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dA = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} r f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,d\theta\,dr = \int_{(0,+\infty)\times S^1} rf\,dr\,ds.$$

__Caso $\mathbb{R}^3$:__

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$0 < \rho < +\infty$, $0 < \theta < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$

$g: (0,+\infty)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z): y=0, x\geq 0\}$ es difeomorfismo $|J_g(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\cos\varphi$, $dV = dx\,dy\,dz =$ $= \rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$; pero si dS es la medida de área en S^2, $dS =$ $= \cos\varphi\,d\theta\,d\varphi$ y para $f: \mathbb{R}^3 \to [0,+\infty)$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,dV = \int_{(0,+\infty)\times S^2} f\,(d\rho\times dS) = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,d\rho$$

__Caso $\mathbb{R}^n$:__

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta_1 \cdots \cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_2 = \rho\cos\theta_1 \cdots \cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \\ \vdots \\ x_n = \rho\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases}$$

define un difeomorfismo de $\underset{\rho}{(0,+\infty)}\times\underset{\theta_1}{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\times\cdots\times\underset{\theta_{n-2}}{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\times\underset{\theta_{n-1}}{(0,2\pi)}$ en $\mathbb{R}^n\setminus\{(x_1,\dots,x_n): x_1\geq 0, x_2 = 0\}$. En este caso, $|\det J_g(\rho,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})| = \rho^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}$. Si dS = "medida de superficie en $S^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$",

$$dS = \cos^{n-2}\theta_1\cos^{n-3}\theta_2\cdots\cos\theta_{n-2}\,d\theta_1\,d\theta_2\dots d\theta_{n-2}\,d\theta_{n-1}$$

y para $f: \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} f(g(\rho,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}))\,\rho^{n-1}\cos^{n-2}\theta_1\cdots\cos\theta_{n-2}\,d\rho\,d\theta_1\dots d\theta_{n-2}\,d\theta_{n-1}$$

$$= \int_{(0,+\infty)\times S^{n-1}} \rho^{n-1} f\,(d\rho\times dS).$$

Si $f(x) = f(\|x\|)$, $\rho = \|x\|$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \omega_n \int_0^{+\infty} \rho^{n-1} f(\rho)\,d\rho, \qquad \omega_n = dS(S^{n-1}) = \text{"área de } S^{n-1}\text{"}.$$

Ej:
① $f = e^{-xy}\,\text{sen}\,y$ en $(0,+\infty)\times(0,N)$. Hacer $N\to\infty$ y deducir $\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,z}{z}\,dz$.

Tma: $f, g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medibles. Entonces,

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, (x,y) \rightsquigarrow f(x)\,g(y)$$

es medible.

Dem: Si $A, B \in \mathcal{M}$ o $(\mathcal{B})$, $\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y)$, que es $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ (o $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ medible). Si $S, T : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son simples, $(x,y) \rightsquigarrow S(x)T(y)$ es medible. En general, existen $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}$ funciones simples tales que

$$0 \le |S_n| \le 2|f|,\quad 0\le |T_n| \le 2|f|,\quad \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(y) = g(y)$$

y $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)T_n(y) = f(x)\,g(y)$.

Tma: Si $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son medibles Borel, entonces

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, (x,y) \rightsquigarrow f(y)\,g(x-y)$$

es medible Borel.

Dem.: Sean $\alpha(u,v) = f(u)g(v)$,

$$\beta(x,y) = (u,v) = (y, x-y).$$

La función $h(x,y) = f(y)g(x-y)$ verifica que $h = \alpha \circ \beta$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Como β es homeomorfismo,

$$\Omega = \{ E \in \mathcal{B}_2 : \beta^{-1}(E) \in \mathcal{B}_2 \}$$

es una σ-álgebra que contiene a todo abierto de $\mathbb{R}^2$ y $\Omega = \mathcal{B}_2$. Luego, si V es un abierto en $\mathbb{R}$,

$$h^{-1}(V) = (\alpha\circ\beta)^{-1}(V) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(V)) \text{ y } \alpha^{-1}(V) \in \mathcal{B}_2.$$

Tma: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son medibles Lebesgue. Entonces

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, (x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$$

es medible Lebesgue en $\mathbb{R}^2$.

Dem: Se puede mostrar que

$$\tilde{\Omega} = \{ E \in \mathcal{M}_2 : \beta^{-1}(E) \in \mathcal{M}_2 \}$$

es $\mathcal{M}_2$. Pues si $E \in \mathcal{M}_2$, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \in \mathcal{B}_2$ y $m_2^*(E_2) = 0$. Entonces $\beta^{-1}(E) = \beta^{-1}(E_1) \cup \beta^{-1}(E_2)$, $\beta^{-1}(E_1) \in \mathcal{B}_2$. Además, como β es lineal y $\det \beta = -1 \neq 0$, $\beta^{-1}(E_2)$ también tiene medida exterior cero: si $I \times J$ es un paralelogramo abierto, $\beta^{-1}(I\times J)$ es un paralelogramo de lados no paralelos a los ejes coordenados, pero si $\varepsilon>0$, existen cajas abiertas $\{I_j\times J_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$\beta^{-1}(I\times J)\subset\bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j\times J_j$$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} a(I_j\times J_j)\le m_2(\beta^{-1}(I\times J))+\varepsilon$$
$$= m_2(I\times J)+\varepsilon.$$

Entonces, si $V\subset\mathbb{R}$ es abierto

$$h^{-1}(V)=(\alpha\circ\beta)^{-1}(V)=\beta^{-1}(\alpha^{-1}(V))\in\Lambda_2,\text{ pues } \alpha^{-1}(V)\in\Lambda_2.$$

Tma: Si $E\in\mathcal{B}_2$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, entonces

$$m\times m((a,b)+E)=m\times m(E).$$

Dem: Por definición:

$$m\times m((a,b)+E)=\int_{\mathbb{R}} m(((a,b)+E)_x)\,dx.$$

$$((a,b)+E)_x=\{y\in\mathbb{R}:\ (x-a,y-b)\in E\}$$
$$=\{y\in\mathbb{R}:\ y\in b+E_{x-a}\}=b+E_{x-a}.$$

Por tanto:

$$m\times m((a,b)+E)=\int_{\mathbb{R}} m(b+E_{x-a})\,dx=\int_{\mathbb{R}} m(E_{x-a})\,dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}} m(E_x)\,dx=m\times m(E),$$

puesto que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\,dx,$$

para toda $f \geq 0$ y $a \in \mathbb{R}$.