Tema 5: Teorema fundamental del cálculo en $\mathbb{R}$

5.1 Diferenciación de funciones monótonas.

Def: Se dice que una colección $\mathcal{I}$ de intervalos recubre un conjunto E en el sentido de Vitali si $\forall \varepsilon > 0$ y $x \in E$, existe un intervalo $I \in \mathcal{I}$ t.q. $x \in I$ y $m(I) < \varepsilon$.

Lema de Vitali: Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto con medida exterior finita, y $\mathcal{I}$ un cubrimiento de E en el sentido de Vitali. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una familia finita disjunta $\{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ de intervalos en $\mathcal{I}$ tales que

$$m^*\Big(E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j\Big) < \varepsilon.$$

Dem: Como los extremos de una familia finita de intervalos tiene medida de Lebesgue nula, podemos suponer que los $I \in \mathcal{I}$ son cerrados. Además si $O \subset \mathbb{R}$ es un abierto con medida de Lebesgue finita que contiene a E, podemos suponer que $I \subset O$ $\forall I \in \mathcal{I}$.

A continuación, elegimos una sucesión disjunta $\{I_n\}$ de intervalos en $\mathcal{I}$. Si I_1 es el primer intervalo e $I_1, I_2, \dots I_n$ han sido ya elegidos, sea

$$k_n = \sup\{m(I) : I \in \mathcal{I},\ I \cap I_j = \emptyset\ \forall j = 1 \dots n\}.$$

Se verifica que $k_n \leq m(O) < +\infty$. Si para algún $n \geq 1$, $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ el proceso de construcción para, y el tma está demostrado. En caso contrario, podemos encontrar $\forall n \geq 1$ un intervalo $I_{n+1} \in \mathcal{I}$ t.q. $\ell(I_{n+1}) > \frac{k_n}{2}$, $I_{n+1} \cap I_j = \emptyset$ $\forall j = 1 \dots n$.

Como $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \subset O$ y se trata de una familia disjunta: $\sum_{n=1}^{+\infty} \ell(I_n) \leq m(O) < +\infty$, y dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ t.q. $\sum_{N+1}^{+\infty} \ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}$.

Si $J \in \mathcal{I}$ y $J \cap I_n = \emptyset$ $\forall n \geq 1$, por construcción $\ell(J) \leq k_n < 2\ell(I_{n+1})$, pero $\ell(I_{n+1}) \to 0$, luego si $J \in \mathcal{I}$, necesariamente $J \cap I_n \neq \emptyset$ para algún $n \geq 1$.

Sea $R = E \setminus \bigcup_{j=1}^{N} I_j$. Si $x \in R$, como $\bigcup_{j=1}^{N} I_j$ es un cerrado y $\mathcal{I}$ es un cubrimiento de Vitali de E, existe $I \in \mathcal{I}$ t.q. $x \in I$ y $I \cap I_j = \emptyset$ $\forall j = 1 \dots N$. Entonces $I \cap I_n \neq \emptyset$ para algún $n > N$, y si J_n es el intervalo que tiene el mismo centro que I_n pero 5 veces su longitud, obtenemos que $x \in J_n$. Luego

$$R \subset \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} J_n$$

y

$$m^*(R) \leq \sum_{N+1}^{+\infty} \ell(J_n) = 5 \sum_{N+1}^{+\infty} \ell(I_n) < \varepsilon.$$

Def: Sea f una función definida cerca de $x \in \mathbb{R}$. Definimos:

$$D^+ f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D^- f(x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$D_+ f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \qquad D_- f(x) = \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

Claramente, $D^+f \geq D_+f$, $D^-f \geq D_-f$ y f es diferenciable en x sii $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \neq \pm\infty$.

Tma: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ monótona creciente. Entonces f es diferenciable en casi todo punto de $[a,b]$, f' es medible y ≥ 0, y además:

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b) - f(a).$$

Dem: Probaremos que $D^+f = D_+f = D^-f = D_-f$ en c.t.p de $[a,b]$. Sólo mostramos que $D^+f = D_-f$ en casi todo punto, los otros casos son similares. Sea

$E = \{x \in (a,b) : D^+f(x) > D_-f(x)\} = \bigcup E_{u,v}$, $u, v \in \mathbb{Q}$, $u>v$, donde

$$E_{u,v} = \{x \in (a,b) : D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}.$$

Pretendemos mostrar que $m^*(E_{u,v}) = 0$, de donde $m^*(E)=0$, y así concluimos que $D^+f(x) \leq D_-f(x)$ p.c.t. x; de forma análoga se ve que $D^+f(x) \geq D_-f(x)$ p.c.t. $x \in (a,b)$.

Sea $s = m^*(E_{u,v})$. Si $\varepsilon > 0$, sea O un abierto t.q. $E_{u,v} \subset O$, $m(O) < s+\varepsilon$. $\forall x \in E_{u,v}$ existe un intervalo $[x-h, x] \subset O$ t.q.

$$f(x) - f(x-h) < vh.$$

Por Vitali, existe $\{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ t.q. $I_j = [x_j - h_j, x_j]$, disjuntos y tal que $m^*(E \cap \bigcup_{j=1}^N I_j) \geq s - \varepsilon$, y sumando sobre los intervalos:

$$\sum_{j=1}^N [f(x_j) - f(x_j - h_j)] \leq v \sum_{j=1}^N h_j = v \sum_{j=1}^N m(I_j) \leq v\, m(O) \leq v(s+\varepsilon).$$

Cada $y \in E_{u,v} \cap \bigcup_{j=1}^N \mathring{I}_j$ es el extremo izquierdo de un intervalo pequeño contenido en algún I_j, de la forma $(y, y+k)$ y tal que

$$f(y+k) - f(y) > ku$$

Del lema de Vitali, existen intervalos $J_i = (y_i, y_i + k_i)$, $\{J_1, J_2, \dots, J_M\}$ disjuntos t.q. $m^*(E \cap \bigcup_{j=1}^N I_j \cap \bigcup_{i=1}^M J_i) \geq s - 2\varepsilon$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^M [f(y_j + k_j) - f(y_j)] \geq u \sum_{j=1}^M \ell(J_j) \geq u(s-2\varepsilon).$$

Por otro lado, como f es monótona creciente:

$$\sum_{J_i \subset I_j} [f(y_i+k_i) - f(y_i)] \leq f(x_j) - f(x_j - h_j)$$

y por tanto:

$$u(s-2\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{M} [f(y_i+k_i) - f(y_i)] \leq \sum_{j=1}^{N} [f(x_j) - f(x_j-h_j)] \leq v(s+\varepsilon).$$

$\therefore\ u(s-2\varepsilon) \leq v(s+2\varepsilon)\ \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow us \leq vs$. Pero $u > v \Rightarrow s = 0$.

y como f es monótona, D^+f M

Luego $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x)$ p.c.t. $x \in [a,b]$.

≥ 0 en $[a,b]$.

Sea $g_n(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$. Por lo anterior existe $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = D^+f(x)$ p.c.t x, $D^+f(x) = f'(x)$, $g_n \geq 0$. Entonces por Fatou: (Podemos suponer $f(x) = f(b)$ si $x \geq b$)

$$\int_a^b f'(x)dx \leq \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} n\int_a^b [f(x+\tfrac{1}{n}) - f(x)]dx = \lim_{n\to+\infty}\left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right) \leq$$

$\leq f(b) - f(a)$, pues al ser f monótona y $f(x) = f(b)\ \forall x \geq b$

$$f(a) \leq n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \quad \text{y} \quad f(b) \leq n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

6.2 Funciones de variación acotada:

Def. Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ y $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ partición de $[a,b]$, se define la variación de f respecto a P como:

$$V(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

La variación total de f en $[a,b]$ es $V(f) = \sup_P V(f,P)$. Si la variación total es finita, diremos que f es de variación acotada en $[a,b]$.

Ej: ① Toda función monótona acotada en $[a,b]$ es de variación acotada: $V(f,[a,b]) \leq f(b) - f(a)$

Dem: $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) \leq f(b) - f(a)$ $\therefore$ f es de variación acotada.

② Si f es Lipschitz en $[a,b]$.

Dem: $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|\ \ \forall x,y \in [a,b]$.

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \leq M|b-a| \quad \therefore V(f,[a,b]) \leq M(b-a)$$

es de variación acotada.

③ No toda función continua en $[a,b]$ es de variación acotada. Si P está formada por los reales en el conjunto

$f(x) = x\,\text{sen}(1/x)$ en $[0,1]$.

$\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+N\pi}, \frac{1}{\pi N}, \frac{1}{\frac{\pi}{2}+(N-1)\pi}, \frac{1}{(N-1)\pi} \ldots\}$, $|f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2}+i}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+i} \Rightarrow V(f,[0,1]) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2}+i} = +\infty.$$

Def: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, definimos

$$V(x) = V(f, [a,x]) \quad a \le x \le b.$$

$$D(x) = V(x) - f(x).$$

Si f es de variación acotada, V y D son funciones crecientes en $[a,b]$

Dem:

Si $x_1 \le x_2$, $0 \le V(x_1) \le V(x_2) \le V(f,[a,b]) < +\infty$ y $V(x_2) - V(x_1) \geq |f(x_2) - f(x_1)| \geq f(x_2) - f(x_1)$. $\therefore$ $D(x_2) = V(x_2) - f(x_2) \geq V(x_1) - f(x_1)$ $\therefore$ V y D son crecientes y acotadas en $[a,b]$.

Por lo tanto:

Tma: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sii f se escribe como la diferencia de dos funciones monótonas crecientes acotadas en $[a,b]$.

Dem

($\Rightarrow$) V y D son crecientes y acotadas, $f = V - D$.

($\Leftarrow$) (Trivial)

Corolario: Si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces existe $f'(x)$ para casi todo x en $[a,b]$ y $f' \in \mathcal{L}^1([a,b], dx)$

Dem

$f = V - D$, $V' \geq 0$ y $D' \geq 0$ en c.t.p $\therefore$ $f' = V' - D'$, $|f'| \le V' + D'$, $V', D' \in \mathcal{L}^1([a,b], dx)$

5-3 Diferenciación de una integral.

Lema: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable, y $\int_a^x f(t)\,dt = 0$ $\forall x \in [a,b]$, entonces $f = 0$ en c.t.p. de $[a,b]$.

Dem:

De la hipótesis se sigue que $\int_I f\,dx = 0$ $\forall I \subset [a,b]$ intervalo, y como todo O se puede escribir como unión numerable disjunta de intervalos en $[a,b]$, se verifica que $\int_O f\,dx = 0$ $\forall O \subset [a,b]$ abierto. Supongamos que existe $F \subset [a,b]$, $m(F) > 0$ t.q. $f > 0$ en F. Como $m((a,b)\setminus F) < b-a$, existe O abierto $\subset (a,b)$ t.q. $(a,b)\setminus F \subset O$ y $m(O) < b-a$. Entonces, $G = (a,b)\setminus O$ es un cerrado contenido en F, $m(G) > 0$ y $\int_G f\,dx > 0$; es decir, $\int_{[a,b]\setminus G} f\,dx < 0$ (absurdo). Por lo tanto $m(\{x \in (a,b) : f > 0\}) = 0$.
Análogamente, $m(\{x \in (a,b) : f(x) < 0\}) = 0$ y $f = 0$ en c.t.p de $[a,b]$.

Tma: Si f es integrable en $[a,b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Entonces $F' = f$ en c.t.p de $[a,b]$.

Dem: $F(x) = \int_a^x f^+(t)\,dt - \int_a^x f^-(t)\,dt$, F es la diferencia de dos funciones monótonas acotadas. Luego F es de variación acotada en $[a,b]$ y existe F' en c.t.p de $[a,b]$

Si f es acotada en $[a,b]$, $|f| \le M$, si $g_n(x) = n\left(F(x+\frac{1}{n}) - F(x)\right)$, $g_n(x) \to F'(x)$ (5)

en c.t.p de $[a,b]$ y

$$|g_n(x)| \le \left| n\left[\int_a^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right]\right| = \left|n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt\right| \le M. \text{ a } [a,b].$$

Luego por el tma de convergencia dominada: $\int_a^x g_n(t)\,dt \to \int_a^x F'(t)\,dt$. También,

$\int_a^x g_n(t)\,dt = n\int_a^x F(t+\frac{1}{n})\,dt - n\int_a^x F(t)\,dt = n\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} F(t)\,dt - n\int_a^x F(t)\,dt = n\int_x^{x+\frac{1}{n}} F(t)\,dt -$

$-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} F(t)\,dt \to F(x) - F(a) = F(x)$ por la continuidad de F. Entonces:

$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt \quad \therefore \int_a^x (F'-f)\,dt = 0 \quad \forall x \Rightarrow F' = f$ en c.t.p. de $[a,b]$.

Si f es cualquier función integrable en $[a,b]$, podemos suponer $f \ge 0$. Entonces, si $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$, $f - f_n \ge 0$ y $\int_a^x (f-f_n)(t)\,dt$ es creciente en $[a,b]$. Luego tiene derivada en casi todo punto. Entonces

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x (f-f_n)\,dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f_n(t)\,dt\right) \ge f_n(x). \quad \text{p.c.t. } x \in [a,b].$$

$\therefore F'(x) \ge f(x)$ p.c.t. $x \in [a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b F'(x)\,dx \ge \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

pero como F es monótona creciente, $\int_a^b F'(x)\,dx \le F(b) - F(a)$. Por tanto:

$$\int_a^b (F' - f)\,dx = 0,$$

y como $F' - f \ge 0$ en $[a,b]$, se sigue que $F' = f$ en c.t.p de $[a,b]$.

Ej: $f = \chi_{[0,+\infty)}$ es creciente acotada, $f' = 0$ en c.t.p de $\mathbb{R}$ y

$$\int_a^b f'(x)\,dx < f(b) - f(a) \text{ en general}$$

5.4 Funciones absolutamente continuas

Def: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dice que es absolutamente continua si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.q. $\sum_{i=1}^{N} |f(y_i) - f(x_i)| < \varepsilon$ siempre que $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \dots, (x_N,y_N)$ sea una familia de intervalos disjunta en $[a,b]$ tales que $\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i) < \delta$.

<u>Lema</u>: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua, entonces f es de variación
acotada y derivable en casi todo punto de $[a,b]$; con $f' \in \mathcal{L}^1([a,b],dx)$.

Dem: Basta con ver que f es de variación acotada. Si $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$
t.q. si $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ es familia disjunta de intervalos verificando $\sum_{i=1}^{N}(y_i - x_i) < \delta$,

entonces $\sum_{i=1}^{N} |f(y_i) - f(x_i)| \leq 1$.

Si $M \geq 1$ y $\frac{b-a}{M} \leq \delta$, dividimos $[a,b] = \bigcup_{k=1}^{M} [a + \frac{k-1}{M}(b-a), a + \frac{k}{M}(b-a)] =$
$\bigcup_{k=1}^{M} I_k$, que es una unión de M intervalos separados, $\ell(I_k) < \delta$. Entonces, si $P =$
$\{x_0, x_1 \ldots x_e\}$ es una partición de $[a,b]$, podemos encontrar otra partición
más fina $Q = \{x_0', x_1', x_2', \ldots, x_s'\}$ que contiene a P y tal que cada intervalo
$[x_{i-1}', x_i']$ está contenido en algún I_k. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{e} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{s} |f(x_i') - f(x_{i-1}')| = \sum_{k=1}^{M} \sum_{[x_{i-1}', x_i'] \subset I_k} |f(x_i') - f(x_{i-1}')| \leq \delta \sum_{k=1}^{M} 1 = \delta M.$$

$\therefore f$ es de variación acotada.

Tma <u>fundamental del cálculo</u>: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces las siguientes
proposiciones son equivalentes:

i. f es absolutamente continua en $[a,b]$

ii. Existe f' en c.t.p de $[a,b]$, $f' \in \mathcal{L}^1([a,b], dx)$ y $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$
para <u>todo</u> $x \in [a,b]$.

<u>Dem</u>

<u>Lema</u>: Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua y $f'(x) = 0$ para c.t. punto
x en $[a,b]$, entonces $f \equiv f(a)$ en $[a,b]$.

<u>Dem</u>:
Dado $c \in [a,b]$, queremos mostrar que $f(c) = f(a)$. Sean $E = \{x \in (a,c) : f'(x) = 0\}$ y
$\varepsilon, \eta > 0$. $\forall x \in E$ existe un intervalo $[x, x+h] \subset (a,c)$ tan pequeño como queremos
t.q. $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$. Si $\delta > 0$ es el número que corresponde a $\varepsilon > 0$ en la
definición de continuidad absoluta, por el lema de Vitali, por el lema de
Vitali existe una familia finita disjunta de intervalos $[x_k, y_k]$, $k = 1 \ldots N$, t.q.
$|f(y_k) - f(x_k)| < \eta(y_k - x_k)$, $m^*(E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} [x_k, y_k]) < \delta$. Si reordenamos los $\{x_k\}$ de
forma que $x_k < x_{k+1}$ tendremos:

$y_0 = a \le x_1 < y_1 < x_2 < y_2 \cdots < x_N < y_N = c = x_{N+1}$

y $\sum_{k=0}^{N} |x_{k+1} - y_k| < \delta$, ya que $\bigcup_{k=0}^{N} [y_k, x_{k+1}] = E \setminus \bigcup_{k=1}^{N} [x_k, y_k]$ excepto para un conjunto de medida nula. Entonces:

$$\sum_{k=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| \le \eta \sum_{k=1}^{N} (y_k - x_k) < \eta (c-a)$$

$$\sum_{k=0}^{N} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon$$

$$\therefore\ |f(c) - f(a)| \le \left| \sum_{k=0}^{N} (f(x_{k+1}) - f(y_k)) \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} (f(y_k) - f(x_k)) \right| \le \varepsilon + \eta (c-a),$$

y como ε y η son arbitrarios, entonces $f(c) = f(a)$ $\forall c \in [a, b]$.

Continuando con la demostración del teorema fundamental:

$ii. \Rightarrow i.$

Recordamos que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ t.q. $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$ si $A \in \mathcal{A}$ y $\mu(A) < \delta$. Entonces si $f' \in \mathcal{L}^1([a,b], dx)$ y $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$ $\forall x \in [a, b]$, se tendrá que

$$\sum_{i=1}^{N} |f(y_k) - f(x_k)| \le \sum_{i=1}^{N} \int_{x_k}^{y_k} |f'(t)| dt \le \int_{\bigcup_{k=1}^{N} (x_k, y_k)} |f'| dt.$$

si $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ es familia disjunta de intervalos. Esto implica claramente que f es absolut. conti.

$i. \Rightarrow ii.$

Si f es absolut. cont, f es de variación acotada, luego $f' \in \mathcal{L}^1([a,b], dx)$. Si $G(x) = \int_a^x f'(u)\, du$, $G - f$ es absolut. cont. en $[a, b]$ porque G lo es. Además, $(G-f)' = 0$ en c.t.p de $[a, b]$. Entonces, por el último lema $G - f$ es constante, en particular

$$f(x) - \cancel{f(a)} = \int_a^x f'(t) dt \qquad \forall x \in [a, b].$$

Nota:

Es posible construir $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ t.q. existe $f'(x)$ p.c.t x en $[0,1]$, f es continua, pero no se verifica que

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt. \quad \text{(W. Rudin, pag. 155).}$$