Tema 6: Teoría elemental de espacios de Hilbert.

6.1 Espacios de Hilbert. Propiedades

Def: Sea H un espacio vectorial sobre k ($=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un producto escalar en H es una aplicación $\langle , \rangle : H\times H \to k$ tal que:

(i) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in H$

(ii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H, \lambda \in k$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \quad \forall x, y \in H$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, y es cero sii $x=0$.

A un espacio vectorial dotado de un producto escalar le llamaremos espacio pre-hilbert. Definimos en H

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x\in H. \text{ (norma o longitud de } x\in H).$$

Lema (Desigualdad de Cauchy-Schwartz): $\forall x, y \in H$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.

Dem.
Dados $x, y \in H$, sea $g(t) = \langle e^{-i\theta}x + ty, e^{-i\theta}x+ty\rangle$, $t\in\mathbb{R}$, donde $\theta\in[0,2\pi)$ es tal que $e^{-i\theta}\langle x, y\rangle = |\langle x,y\rangle|$. Entonces, $g(t)\geq 0 \ \forall t\in\mathbb{R}$ y

$$g(t) = \|x\|^2 + 2t|\langle x, y\rangle| + t^2\|y\|^2.$$

Como g es un polinomio de grado 2 en t y tiene a lo más una raíz real, $(b^2-4ac\leq 0)$ $4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$, es decir: se sigue que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Observación: $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff x$ e y son paralelos.

Dem: Si $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\|$, el argumento anterior muestra que $g(t)=0$ para algún $t\in\mathbb{R}$, luego $\exists t\in\mathbb{R}$ t.q. $\langle e^{-i\theta}x+ty, e^{-i\theta}x+ty\rangle = 0 \Rightarrow x = -te^{i\theta}y \Rightarrow \exists \lambda\in k$ t.q. $x+\lambda y = 0$. La otra flecha es trivial.

Lema: $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\| \quad \forall x, y\in H$. (Desigualdad triangular)

Dem:
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \leq$
$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \leq (\|x\|+\|y\|)^2 \Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$.

Por lo tanto $\|\cdot\| : H \to [0,+\infty)$ es una aplicación que verifica las siguientes propiedades:

(i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y\in H$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall x\in H, \lambda\in k$.

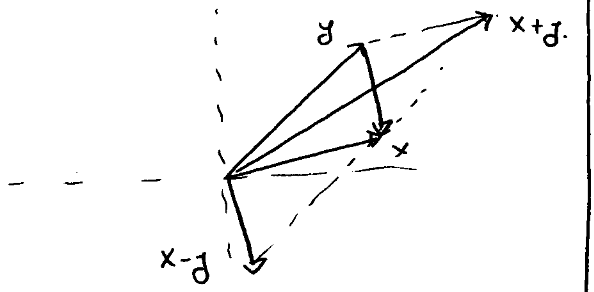
(iii) $\|x\| = 0$ sii $x=0$.

Si definimos en H la distancia $d(x,y) = \|x-y\|$, es fácil comprobar que

(H, d) es un espacio métrico cuya métrica proviene de la norma inducida por el producto escalar. Cuando este espacio métrico es completo, se dice que H es un espacio de Hilbert.

• La norma en un espacio de Hilbert verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad \forall x, y \in H.$$



[Como $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$, la función $H \to \mathbb{R} \,/\, x \rightsquigarrow \|x\|$ es continua. También, fijado $y \in H$, la función $H \to \mathbb{C} \,/\, x \rightsquigarrow \langle x, y\rangle$ es continua en H]

Dem

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$

$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle$ $\Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$

Ej ① $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con el producto escalar euclídeo son espacios de Hilbert de dimensión finita.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \quad , \quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

② El espacio $\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) : x_j \in \mathbb{C}, \ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty\}$, con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \quad , \quad \|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$$

es un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

③ En un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, definimos el espacio:

$$\mathcal{L}^2(X, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ es medible y } \int_X |f|^2 d\mu < +\infty\}.$$

y para $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$, definimos:

$$\langle f, g\rangle = \int_X f \cdot \bar{g}\, d\mu.$$

que tiene sentido ya que $|f \cdot g| \le \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^2$. Como $\int |f|^2 d\mu = 0$ sii $f = 0$ en c.t.p., decimos que dos funciones $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ son equivalentes si $f = g$ en c.t.p. Así obtenemos una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ y llamamos $L^2(X, \mu)$ al conjunto de las clases de equivalencia. Resulta entonces que el espacio $L^2(X, \mu)$ es un espacio de Hilbert.

<u>Tma</u>: $L^2([a,b], dx) \cap C([a,b], \ )$ es denso en $L^2([a,b], dx)$, si $a < b$.

En cada uno de los ejemplos anteriores, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (3) la desigualdad triangular se reducen a las siguientes desigualdades:

① $$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

② $$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2\right)^{1/2}.$$

③ $$\left|\int_X f\bar{g}\, d\mu\right| \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}\left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

$$\left(\int_X |f+g|^2 d\mu\right)^{1/2} \leq \left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2} + \left(\int_X |g|^2 d\mu\right)^{1/2}.$$

6.2. Ortogonalidad y proyecciones

Def: En un espacio de Hilbert H, se dice que x es ortogonal a y, y se escribe $x \perp y$, si $\langle x,y\rangle = 0$. Si $A \subset H$, decimos que $x \in H$ es ortogonal a A, si $x \perp y$ $\forall y \in A$. Se define el ortogonal de $A \subset H$:

$$A^{\perp} = \{x \in H : \langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y \in A\}.$$

$A^{\perp}$ es un subespacio de H.

Def: Si $A \subset H$, $x \in H$, la distancia de x a A se define como

$$d(x,A) = \inf\{\|x-y\| : y \in A\}.$$

Prop: Sea M un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Hilbert H, y $x_0 \in H$. Entonces existe un único $y_0 \in H$ t.q.

$$d(x_0,M) = \|x_0-y_0\|.$$

Dem: Por definición existe $y_n \in M$ t.q. $\delta^2 \leq \|x_0-y_n\|^2 < \delta^2 + \frac{1}{n}$, $\delta = d(x_0,M)$. Por la identidad del paralelogramo:

$$\|(x_0-y_n)+(x_0-y_m)\|^2 + \|(x_0-y_n)-(x_0-y_m)\|^2 = 2\left(\|x_0-y_n\|^2 + \|x_0-y_m\|^2\right)$$

y como M es convexo, $(y_n+y_m)/2 \in M$, luego $\|x_0 - \frac{y_n+y_m}{2}\| \geq \delta$. Entonces:

$$\|y_n-y_m\|^2 \leq 2\left(\|x_0-y_n\|^2 + \|x_0-y_m\|^2\right) - 4\delta^2 \leq 2\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{m}\right).$$

$\therefore$ $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M. Como H es completo y M es cerrado, $\{y_n\}$ converge a algún $y_0 \in M$, y pasando al límite en $\delta^2 \leq \|x_0-y_n\|^2 < \delta^2 + \frac{1}{n}$, encontramos que $\|x_0-y_0\| = \delta^2$, $y_0 \in M$.

Si $y_0, y_1 \in M$ y $\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y_1\| = \delta$, otra vez $\|2x_0 - (y_0+y_1)\| \geq 2\delta$. Entonces: (4)

$\|y_0 - y_1\|^2 = \|(x_0-y_1) - (x_0-y_0)\|^2 = 2(\|x_0-y_1\|^2 + \|x_0-y_0\|^2) - \|(x_0-y_1) + (x_0-y_0)\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0$

$\Rightarrow y_0 = y_1$.

Tma. de la proyección. Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. Entonces

i. Todo $x \in H$ se escribe de manera única como:

$$x = y + z, \quad y \in M, \; z \in M^\perp.$$

ii. Denotando $y = Px$, $z = Qx$, las aplicaciones $P: H \to M$ y $Q: H \to M^\perp$ son lineales. Además, $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \quad \forall x \in H$, y P, Q son continuas.

Dem:

Como M es convexo y cerrado, $\forall x \in H \; \exists!\, y \in M$ t.q $\|x-y\| \leq \|x-m\| \quad \forall m \in M$. Si $z = x - y$, z verifica que $\|z\| \leq \|z - m\| \quad \forall m \in M$. En particular, si $\alpha \in k$

$$\|z\|^2 \leq \|z - \alpha m\|^2 = \|z\|^2 + |\alpha|^2\|m\|^2 - \alpha\langle m, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, m\rangle \quad \forall \alpha \in k, \; m \in M.$$

$$0 \leq |\alpha|^2\|m\|^2 - \alpha\langle m, z\rangle - \bar{\alpha}\langle z, m\rangle \quad \forall \alpha \in k; \text{ y}$$

$$0 \leq |\alpha|^2\|m\|^2 - \alpha\langle m, z\rangle - \bar{\alpha}\overline{\langle m, z\rangle}$$

En particular, si $m \in M$ y $\|m\| = 1$, $\quad 0 \leq |\alpha|^2 - \alpha\langle m, z\rangle - \bar{\alpha}\overline{\langle m, z\rangle}$; haciendo $\alpha = \langle z, m\rangle = \overline{\langle m, z\rangle}$, se obtiene que $0 \leq |\langle m, z\rangle|^2 - 2|\langle m, z\rangle|^2 = -|\langle m, z\rangle|^2$.

$\therefore |\langle m, z\rangle| \leq 0 \Rightarrow \langle z, m\rangle = 0 \quad \forall m \in M \Rightarrow z \in M^\perp$ y $x = y + z$.

Para mostrar la unicidad, si $x = y + z = \hat{y} + \hat{z}$, $y, \hat{y} \in M$, $z, \hat{z} \in M^\perp$, entonces $0 = (y - \hat{y}) + (z - \hat{z})$ y $0 = \|(y-\hat{y}) + (z-\hat{z})\|^2 = \|(y-\hat{y})\|^2 + \|(z-\hat{z})\|^2 \Rightarrow y = \hat{y}, \; z = \hat{z}$.

Es trivial comprobar que P y Q son aplicaciones lineales usando simplemente que M y $M^\perp$ son subespacios de H. Finalmente $x = Px + Qx$ y

$$\|x\|^2 = \|Px + Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 + \langle Px, Qx\rangle + \langle Qx, Px\rangle = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2,$$

ya que $Qx \in M^\perp$ y $Px \in M$.

Def: El operador lineal $P: H \to M$ se llama proyección ortogonal de H en M y $d(x, M) = \|Px - x\| = \|Qx\|$.

Si H es un espacio de Hilbert e $y \in H$, el funcional lineal

$$H \to k \,/\, x \mapsto \langle x, y\rangle$$

es lineal y continuo ($|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$). El siguiente resultado de F. Riesz muestra que estos son los únicos funcionales continuos en H.

Tma de representación de F. Riesz: Sea H un espacio de Hilbert y $L: H \to k$ un funcional lineal y continuo. Entonces, existe un único $y \in H$ t.q. $Lx = \langle x, y\rangle \quad \forall x \in H$.

Dem

Si $Lx=0\ \forall x\in H$, tomamos $y=0$. Si $L\not\equiv 0$, definimos $M=\{x\in H: Lx=0\}$. La continuidad y linealidad de L prueban que M es un subespacio cerrado de H. Como $Lx\neq 0$ para algún $x\in H$, el tma. de la proyección muestra que $M^{\perp}\neq\{0\}$, y existe $z\in M^{\perp}$ tal que $\|z\|=1$. Si $x\in H$, definimos $u=(Lx)z-(Lz)x$, entonces $Lu=0$ y $\langle u,z\rangle=0$. Por lo tanto,

$$0=\langle u,z\rangle=(Lx)\|z\|^2-(Lz)\langle x,z\rangle = Lx-\langle x,\overline{Lz}\,z\rangle \quad \forall x\in H,$$

y si $y=\overline{(Lz)}\,z$, se verifica que $Lx=\langle x,y\rangle\ \forall x\in H$.

Para mostrar la unicidad, si $Lx=\langle x,y_1\rangle=\langle x,y_2\rangle\ \forall x\in H$, entonces $\langle x,y_1-y_2\rangle=0\ \forall x\in H$, y si $x=y_1-y_2$, $0=\|y_1-y_2\|^2$; es decir, $y_1=y_2$.

6.3 Sistemas y bases ortonormales

Def: Un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H es un conjunto $A\subset H$ tal que:

i. $\|x\|=1\quad \forall x\in A$

ii. $\langle x,y\rangle=0\quad \forall x,y\in A$ tal que $x\neq y$.

Ej: $H=L^2([-\pi,\pi])$, $e_n(t)=\dfrac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$ forman un s. ortonormal.

Tma: Si $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ es un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H, se verifica lo siguiente:

(i) Si $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, $\lambda_i\in K$, entonces $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ (tma de Pitágoras). Además, $\lambda_i=\langle x,x_i\rangle\ \forall i=1\dots n$.

(ii) Si $x\in H$, $Px=\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i$; es decir, $\sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i$ es la mejor aproximación de x en el subespacio $[x_1,x_2,\dots,x_n]$ generado por $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Además,

$$\sum_{i=1}^{n}|\langle x,x_i\rangle|^2\le\|x\|^2\quad\forall x\in H.$$

(iii) (Desigualdad de Bessel) Si $\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots\}$ es un sistema ortonormal numerable en H

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|\langle x,x_n\rangle|^2\le\|x\|^2\quad\forall x\in H.$$

Dem:

i. Si $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$, $\|x\|^2=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\right\rangle=\sum_{i,j}\lambda_i\overline{\lambda_j}\langle x_i,x_j\rangle=$

$$=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$$

ii. $[x_1, x_2 \dots x_n] = \{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j : \lambda_j \in k \}$.

Si $x \in H$, y $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n \in k$,

$$\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \|^2 = \langle x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \rangle = \|x\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 - 2 Re \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j \langle x, x_j \rangle$$

pero por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$2 \left| \sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}_j \langle x, x_j \rangle \right| \leq 2 \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 .$$

Entonces,

$$\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 = \| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \|^2 .$$

$$\therefore \quad \| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \| \geq \| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \| \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n \in k$$

y $\sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$ es la mejor aproximación de x en $[x_1, x_2 \dots, x_n]$.

Por otro lado,

$$0 \leq \| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 , \quad \text{es decir,}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

iii. Si $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ es un sistema ortonormal numerable, por (ii),

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n \geq 1$$

y pasando al límite cuando $n \to +\infty$, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Si $M \subset H$ es un subespacio generado por una base $e_1, e_2, \dots, e_n$ es decir, $M = [e_1, e_2, \dots e_n]$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ linealmente independiente, el método de ortonormalización de Gram-Schmidt, permite encontrar una base ortonormal $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de M:

- $y_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = x_1$
- Si $\{x_1, x_2 \dots x_{n-1}\}$ han sido construida de forma que $[e_1, e_2 \dots, e_{n-1}] =$

$= [x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$, $\|x_j\| = 1$, $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ si $i \neq j$, se define,

$$y_n = e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle e_n, x_j\rangle x_j \quad , \quad x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$$

Claramente, $\langle x_n, x_j\rangle = 0$ si $j = 1 \dots n-1$ y $[e_1, e_2, \dots, e_n] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Ej En $H = L^2(\mathbb{R})$, si se consideran las funciones linealmente independientes

$\{e^{-x^2/2}, x e^{-x^2/2}, x^2 e^{-x^2/2}, \dots\}$, aplicando el método de Gram-Schmidt, se obtie-

nen para $n = 1, 2, \dots$,

$\phi_n(x) = 2^n (n\ )! \sqrt{\pi}\, H_n(x) e^{-x^2/2}$, donde $H_n(x) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$.

Las funciones H_n son los polinomios de Hermite, y verifican la ecuación

$H_n'(x) = 2(n\ ) H_{n-1}(x)$ $(H_0 \equiv 1)$. Las funciones $\{\Phi_1, \Phi_2, \dots \Phi_n \dots\}$ se llaman funciones

de Hermite y forman un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Def: Un base ortonormal (o sistema ortonormal completo) en un espacio de

Hilbert H es un sistema ortonormal maximal, en el sentido de que si se

añade un nuevo elemento (no nulo) al sistema, este deja de ser ortonormal.

Utilizando el lema de Zorn, se puede demostrar que todo espacio de

Hilbert H tiene una base ortonormal. Si el espacio de Hilbert es sepa-

rable, estas bases son numerables.

Tma: Sea $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert

H, entonces son equivalentes:

(i) $\{x_1, x_2, \dots\}$ es una base ortonormal.

(ii) Si $\langle x, x_j\rangle = 0$ $\forall j = 1, 2, \dots$, entonces $x = 0$.

(iii) Para todo $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$ y en el sentido de que

$$\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j\rangle x_j \| \to 0 \text{ si } n \to +\infty.$$

(iv) El conjunto de combinaciones lineales finitas de $\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$ es

denso en H.

(v) Para todo $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$.

Esta última identidad, se llama identidad de Parseval

Dem

i.⇒ii. Si $x \neq 0$ y $\langle x, x_j\rangle = 0$ $\forall j$, $\{x_1, x_2, \dots x_n, \dots, x\}$ es un sis. ort. que contradice i.

ii⇒iii. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ $\forall x \in H$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$ es convergente en H. Si

$\hat{x} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, x_n\rangle x_n\right) - x$, entonces $\langle \hat{x}, x_n\rangle = 0$ $\forall n \geq 1 \Rightarrow \hat{x} = 0$.

iii. ⇒ iv.

Trivial ya que $\|x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j\rangle x_j\| \to 0$ si $n \to +\infty$.

iv. ⇒ v.

Si $M_n = [x_1, x_2 \dots x_n]$, por hipótesis, $d(x, M_n) \to 0$ si $n \to +\infty$, pero $d(x, M_n) =$ $= \|x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j\rangle x_j\|$. Luego $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x$ y como la $\|.\|$ es continua en H,

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \|\sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j\rangle x_j\|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} |\langle x, x_j\rangle|^2.$$

v. ⇒ i.

Si $x \in H$ y $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ es sistema ortonormal, $\langle x, x_n\rangle = 0$ $\forall n$ y $\|x\|^2 =$ $= \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.

<u>Corolario</u>: Sea H un espacio de Hilbert con una base ortonormal numerable $\{x_1, x_2, x_3 \dots\}$, entonces la aplicación:

$$\Phi : H \longrightarrow \ell^2$$
$$x \rightsquigarrow (\langle x, x_n\rangle)_{n=1}^{+\infty}$$

es un isomorfismo isométrico entre H y ℓ^2.

Ej

① $H = \mathbb{R}^n$, $k = \mathbb{R}$, $x_1 = (1, 0, \dots 0) \dots\dots$, $x_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

② $H = \ell^2$, $x_n = (0, 0 \dots, 0, \underset{n}{1}, 0 \dots\ 0 \dots)$

③ $H = L^2(\mathbb{R})$. Si $x_n = \Phi_n$ (función de Hermite), estas forman una base ortonormal, $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \Phi_n, \quad c_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\Phi_n(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \Phi_n(x)\, dx.$$

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2.$$

④ $H = L^2([-\pi, \pi])$, si $e_n(t) = \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}$, $n \in \mathbb{Z}$. $(e_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ es base ortonormal. $\forall f \in H$,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt., \text{ (coeficiente de Fourier).}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Para probar que $(e_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ es base ortonormal, observemos que $C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ es denso en $L^2([-\pi, \pi])$, y del tma de Stone-Weierstrass, las combinaciones finitas de $(e_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ son densas en $C([-\pi,\pi])$. En particular, si $f\in L^2([-\pi,\pi])$ existe $g\in C([-\pi,\pi])$ t.q. $\|f-g\|_2\le\varepsilon$, y como $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ es continua, por el teorema de Stone-Weierstrass, existe $Q=\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e^{ikt}$, $\lambda_k\in\mathbb{C}$ tal que $\sup_{[-\pi,\pi]}|g-Q|\le\frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}$. Entonces, $\|g-Q\|_2\le(\sup_{[-\pi,\pi]}|g-Q|)\sqrt{2\pi}\le\varepsilon$, y por la desigualdad triangular:

$$\|f-Q\|_2\le\|f-g\|_2+\|g-Q\|_2\le 2\varepsilon.$$

Es decir, dado $\varepsilon>0$ existe $Q=\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e^{ikt}$, $\lambda_k\in\mathbb{C}$ tal que

$$\|f-Q\|_{L^2([-\pi,\pi])}\le 2\varepsilon,$$

lo que implica que $Q=\{\sum_{k=-N}^{N}\lambda_k e^{ikt} : N\geq 1,\ \lambda_k\in\mathbb{C}\}$ es denso en $L^2([-\pi,\pi])$ y $\{\frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ es base ortonormal de $L^2([-\pi,\pi])$.

—— o ——