Typewriter sequence. Si $N \geq 0$, $[0,1) = \bigcup_{j=0}^{2^N-1} [\frac{j}{2^N}, \frac{j+1}{2^N})$, unión disjunta de intervalos diádicos. Si $n \geq 1$, definimos

$$f_n(x) = \chi_{\left[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n-2^k+1}{2^k}\right)},$$

si $2^k \leq n < 2^{k+1}$; es decir,

$$k = \left[\frac{\log n}{\log 2}\right].$$

Se verifica que $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp}(f_n) \subset [0,1]$,

$$\|f_n\|_{L^1([0,1])} = \frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{n} \to 0, \text{ si } n \to +\infty$$

Además, si $n = 2^N + j$, $0 \leq j < 2^N - 1$, entonces $k = N$ y

$$f_{2^N+j}(x) = \chi_{\left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right)}$$

y si $x \in [0,1)$, $\exists!\, j(x) \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ tal que

$$f_{2^N+j(x)}(x) = 1.$$

Es decir, $0 = \liminf_{n \to +\infty} f_n(x) < \limsup_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$, $\forall x \in [0,1)$

y es necesario extraer una subsucesión de $\{f_n\}$ para que esta tenga límite puntual en casi todo punto.

Por ejemplo, $g_N = f_{2^N+1} = \chi_{\left[\frac{1}{2^N}, \frac{1}{2^{N+1}}\right]}$, si $N \geq 1$.

Observamos que

$$\|f_n\|_{L^1([0,1])} = 2^{-k} = 2^{-\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]} \to 0, \text{ si } n \to +\infty.$$

Este ejemplo muestra que $\exists \{f_n\} \subset L^1([0,1])$ tal que $\{f_n\} \to 0$ en $L^1([0,1])$ y tal que $\{f_n\}$ no tiene límite puntual o en casi todo x en $[0,1]$.