Tema 7: Espacios de Banach y espacios L^p

7.1 Espacios normados

Def: Sea E un espacio vectorial sobre $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Una norma en E es una aplicación $\|\cdot\|: E \to [0,+\infty)$ que verifica:

(i) $\|x\| = 0$ sii $x = 0$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \lambda \in K$ y $x \in E$.

(iii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in E$ (desigualdad triangular).

Un espacio vectorial normado es un par $(E, \|\cdot\|)$. Si $d(x,y) = \|x-y\|$, resulta que (E,d) es un espacio métrico para el que

$$B_r(x) = x + B_r(0) \quad \forall x \in E \text{ y } r>0.$$

Si el espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es además completo, E se dice espacio normado de Banach. ($\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$).

Ej: ① $E = k^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_j \in k\}$.

$$\|\lambda\|_1 = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|, \quad \|\lambda\|_2 = \Big(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\Big)^{1/2}, \quad \|\lambda\|_p = \Big(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p\Big)^{1/p}, \ 1 \le p < +\infty$$

$$\|\lambda\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |\lambda_j|.$$

② $E = C([a,b], \mathbb{C})$, $\|f\|_\infty = \max_{[a,b]} |f(x)|$.

Todos son ejemplos de espacios de Banach.

Def: Se dice que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un espacio vectorial E son equivalentes si ambas generan la misma topología.

Prop: Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas sobre E. Entonces, son equivalentes sii existe $\alpha > 0$ t.q. $\alpha \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{\alpha} \|x\|_2$ $\forall x \in E$.

Dem:

(⇐) (trivial)

(⇒) Si denotamos $B^1_r(0) = \{x \in E : \|x\|_1 < r\}$ y $B^2_r(0) = \{x \in E : \|x\|_2 < r\}$, cuando las topologías son equivalentes, existe $\alpha > 0$ t.q. $B^1_\alpha(0) \subset B^2_1(0)$ y $B^2_\alpha(0) \subset B^1_1(0)$. Entonces, si $x \in E$ y $x \neq 0$, se tiene que $\frac{\alpha x}{\|x\|_1} \in B^2_1(0)$ y $\frac{\alpha x}{\|x\|_2} \in B^1_1(0)$;

$\left\|\frac{\alpha x}{\|x\|_1}\right\|_2 \le 1$ y $\left\|\frac{\alpha x}{\|x\|_2}\right\|_1 \le 1$, por lo que:

$$\alpha \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \frac{1}{\alpha} \|x\|_2.$$

Prop. Si M es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces todas las normas sobre M son equivalentes.

Dem.:
Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de M. Si $x \in M$, $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ de forma única. También es fácil comprobar que

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$$

define una norma en M. Para probar la proposición, mostraremos que si $\| \ \|$ es cualquier otra norma en M, se verifica que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes:

Si $x \in E$ y $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, se verifica:

$$\|x\| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|\Big) \max_{1 \leq j \leq n} \|e_j\| , \qquad \therefore \quad \|x\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

Por reducción al absurdo, si no existe $\alpha > 0$ t.q. $\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|$ $\forall x \in M$, entonces existe $x_k \in M$ t.q. $\|x_k\|_1 = 1$ y $\|x_k\| < \frac{1}{k}$. Si $x_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k e_k$, la condición $\|x_k\|_1 = 1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j^k|$, implica que la sucesión de elementos de K^n, $\lambda^k = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, tiene una subsucesión convergente en K^n. En particular, si $\lambda^k \to \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, se verifica que $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| = 1$, es decir $\lambda \neq 0$. Además, si $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, claramente $\|x_k - x\| \to 0$, por lo que $\|x_k\| \to \|x\|$. Pero $\|x_k\| \to 0$, luego $x = 0$ (absurdo).

Esta demostración muestra que si $(M, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión finita, la transformación lineal:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow K^n \\ x &\rightsquigarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal, que es continuo así como su inversa; es decir, M es topológicamente equivalente a K^n.

Prop: (**Desigualdad de Young**). Si $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \quad \forall a, b \geq 0. \quad (1)$$

Dem.:
Si $a = e^{\alpha/p}$, $b = e^{\beta/q}$, (1) es equivalente a la desigualdad:

$$e^{\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}} \leq \frac{1}{p} e^{\alpha} + \frac{1}{q} e^{\beta} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

y esta desigualdad es cierta debido a que $f(x) = e^x$ es convexa en $\mathbb{R}$.

7.2 Espacio L^p

Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida. Si $1\le p<+\infty$, definimos

$$\mathcal{L}^p(\mu)=\{f:X\to\mathbb{C}: f \text{ es medible y } \int_X |f|^p\,d\mu<+\infty\}.$$

Como $\int_X |f|^p\,d\mu=0$ sii $f=0$ en c.t.p. $(d\mu)$, decimos que dos funciones $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ son equivalentes si coinciden en casi todo punto $(d\mu)$. Así obtenemos una relación de equivalencia en $\mathcal{L}^p(\mu)$ y llamamos $L^p(\mu)$ al conjunto de las clases de equivalencia.

Prop: Si $1\le p<+\infty$, $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial.

Dem:

- Si $f\in L^p(\mu)$ y $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda f|^p=|\lambda|^p|f|^p$: luego $\lambda f\in L^p(\mu)$.
- Si $f,g\in L^p(\mu)$, $|f+g|^p\le(2\max(|f|,|g|))^p\le 2^p(|f|^p+|g|^p)$, $\therefore$ $f+g\in L^p(\mu)$.

Si $f\in L^p(\mu)$, definimos

$$\|f\|_p=\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Para $p=+\infty$, el espacio $L^\infty(\mu)$ se define como el conjunto de (clases de) funciones $f:X\to\mathbb{C}$ esencialmente acotadas, donde una función $f:X\to\mathbb{C}$ se dice esencialmente acotada si f es medible y existe $\alpha\ge 0$ t.q.

$$\mu(\{x\in X: |f(x)|>\alpha\})=0,$$

(tal α se dice cota esencial de f). Equivalentemente, si existe $\alpha\ge0$ t.q. $|f(x)|\le\alpha$ para c.t.p. en X $(d\mu)$. Si $f:X\to\mathbb{C}$ es esencialmente acotada, definimos:

$$\|f\|_\infty=\inf\{\alpha\ge 0: |f(x)|\le\alpha \text{ en c.t.p. } (d\mu)\}.$$

Prop: $L^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial y $|f(x)|\le\|f\|_\infty$ p-c.t. $x\in X\,(d\mu)$.

Dem.

- Si $f\in L^\infty(\mu)$ y $g\in L^\infty(\mu)$ existen $\alpha,\beta\ge0$ t.q. $\mu(\{x\in X: |f(x)|>\alpha\})=0$ y $\mu(\{x\in X: |g(x)|>\beta\})=0$. Entonces $\{x\in X: |f+g|>\alpha+\beta\}\subset\{x\in X: |f(x)|>\alpha\}\cup\{x\in X: |g(x)|>\beta\}$, y por tanto $\mu(\{x\in X: |f(x)+g(x)|>\alpha+\beta\})=0$; es decir $f+g\in L^\infty(\mu)$.
- Si $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mu(\{x: |\lambda f(x)|>|\lambda|\alpha\})=\mu(\{x: |f(x)|>\alpha\})=0$: luego $\lambda f\in L^\infty(\mu)$.
- Si $f\in L^\infty(\mu)$, por definición de $\|f\|_\infty$, existe $\alpha_1\ge\alpha_2\ge\dots\ge\alpha_n\ge\dots\ge0$ t.q. $\mu(\{x\in X: |f(x)|>\alpha_n\})=0$ $\forall n\ge1$ y $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\|f\|_\infty$. Entonces, $\{x\in X: |f(x)|>\|f\|_\infty\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x\in X: |f(x)|>\alpha_n\}$ y $\mu(\{x\in X: |f(x)|>\|f\|_\infty\})=0$; es decir, $|f(x)|\le\|f\|_\infty$ p-c.t. $x\in X\,(d\mu)$.

Prop: $(L^\infty(\mu), \| \ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Dem:

(i) $\|f\|_\infty = 0$ sii $|f(x)| \le 0$ en c.t.p $\iff f=0$ en $L^\infty(\mu)$

(ii) Claramente $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ $\forall f \in L^\infty(\mu)$.

(iii) Si $f, g \in L^\infty(\mu)$, $|f(x)| \le \|f\|_\infty$ en c.t.p y $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ en c.t.p., luego $\mu(\{x: |f(x)+g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$ y por definición de $\|f+g\|_\infty$ se sigue que $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(iv) Si $\{f_n\}$, $f_n: X \to \mathbb{C}$ es una sucesión de Cauchy, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.q. si $n, m \ge n_0$, se verifica $\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$. Si definimos $A^k_{n,m} = \{x \in X: |f_n(x) - f_m(x)| > \frac{1}{k}\}$ vemos que $\forall k \ge 1$ $\exists n_k$ t.q si n y $m \ge n_k$ se verifica que $\mu(A^k_{n,m}) = 0$. Luego el conjunto

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n,m \ge n_k} A^k_{n,m}$$

tiene medida nula en $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Además, para cada $k \ge 1$ existe n_k t.q. $|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{1}{k}$ si $n, m \ge n_k$ y $x \in X \setminus A$. Luego $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy en cada $x \in X \setminus A$, obtenemos que existe $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ en $X \setminus A$. Redefiniendo $f_n = f = 0$ en A, $\forall x \in X$ y f es medible en X. Es decir, $f \in L^\infty(\mu)$ y $\forall k \ge 1$ $\exists n_k$ t.q $|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}$ y $\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{k}$ si $n \ge n_k$. Luego $f_n \to f$ en $L^\infty(\mu)$.

Def: Si $1 \le p \le +\infty$, se llama exponente conjugado de p al número $1 \le q \le +\infty$ que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Así $q = \frac{p}{p-1}$ si $1 < p < +\infty$, $q = +\infty$ si $p = 1$, $q = 1$ si $p = +\infty$.

Prop (Desigualdad de Hölder): Si $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$ con $1 \le p < +\infty$ y p y q conjugados, entonces $f \cdot g \in L^1(\mu)$ y $\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$; es decir,

$$\int_X |f \cdot g| \, d\mu \le \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Dem: Si $p = 1$, $q = \infty$ o viceversa la desigualdad es trivial. Supuesto que $1 < p < +\infty$, y que $\|f\|_p = 1$, $\|g\|_q = 1$, por la desigualdad de Young:

$$|f(x) \cdot g(x)| \le \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q \quad \forall x \in X$$

e integrando

$$\int_X |f \cdot g| \, d\mu \le \frac{1}{p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

En general, si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, las funciones $f/\|f\|_p$ y $g/\|g\|_q$ verifican las condición anterior, luego

$$\int_X \left| \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q} \right| d\mu \le 1 \Rightarrow \int_X |f \cdot g| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q .$$

Prop: (Desigualdad de Minkowski): Si $1 \le p \le +\infty$ y $f, g \in L^p(\mu)$, entonces

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

Dem: Si $p=1$ o ∞ el resultado es trivial ya que $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ $\forall x \in X$.

Si $1 < p < +\infty$, $|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$ en todo X. Entonces, integrando esta desigualdad en X y usando la desigualdad de Young se tiene que:

$$\int_X |f+g|^p d\mu \le \int_X |f|\,|f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g|\,|f+g|^{p-1} d\mu \le \|f\|_p \, \| |f+g|^{p-1} \|_{\frac{p}{p-1}} + \|g\|_p \, \| |f+g|^{p-1} \|_{p/p-1} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f+g|^{p-1} \|_{\frac{p}{p-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_X |f+g|^p d\mu \le (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1-1/p}$$

y dividiendo esta desigualdad por $\left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1-1/p}$ se obtiene que:

$$\|f+g\|_p = \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

De la desigualdad de Minkowski concluimos que $(L^p(\mu), \| \ \|_p)$ es un espacio normado para todo p, $1 \le p \le \infty$.

Ej

① En el caso de $X = \mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$ dotados de la medida de Lebesgue, la notación usada es:

$L^1(m) = L^1(\mathbb{R})$ o $L^1(\mathbb{R}^n)$, $L^p(m) = L^p(\mathbb{R})$ o $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^\infty(m) = L^\infty(\mathbb{R})$ o $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

② Si $X = \mathbb{N}$ y μ es la medida que cuenta el cardinal de subconjuntos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; es decir:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{número de elementos de } A \text{ si } \#(A) < +\infty \\ +\infty \quad \text{si } \#(A) = +\infty \end{cases}$$

se verifica que $f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |f(n)| < +\infty$. Si identificamos $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ con la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ t.q. $x_n = f(n)$ resulta que $L^p(\mu) = \ell^p$ (ℓ^p pequeño), donde:

$$\ell^p = \{(x_n)_{n=1}^{+\infty} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}, \quad \|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \text{ si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\ell^\infty = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : \sup_n |x_n| < +\infty\}, \quad \|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

③ Si $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ y $\mu: \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+$ cuenta el cardinal de subconjuntos de X, resulta que $f: X \to \mathbb{C}$ es integrable si $\sum_{j=1}^{n} |f(j)| < +\infty$. Identificando $f: X \to \mathbb{C}$ con la enetupla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (f(1), f(2), \ldots, f(n))$, resulta que $L^p(\mu) \simeq (K^n, \|\cdot\|_p)$, donde

$$\|\lambda\|_p = \left(\sum_{j=1}^{p} |\lambda_j|^p\right)^{1/p} \text{ si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|\lambda\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|.$$

7.3 Propiedades de los espacios $L^p(\mu)$

Tma de Riesz-Fischer: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, el espacio $L^p(\mu)$ es completo para $1 \leq p \leq \infty$. En particular $L^p(\mu)$ es un espacio de Banach.

Ya hemos visto el caso $p = +\infty$, para $1 \leq p < +\infty$ necesitamos los siguientes lemas:

Lema de Chebyshev: Si $1 \leq p < +\infty$ y $f \in L^p(\mu)$, se verifica que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}) \leq \lambda^{-p} \int_X |f|^p d\mu. \quad \forall \lambda > 0.$$

Dem.:

Si $A=\{x\in X: |f(x)|>\lambda\}$, $\chi_A \le \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^p$; e integrando esta desigualdad se tiene:

$$\mu(A)=\int_X \chi_A \, d\mu \le \int_X \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^p d\mu = \frac{1}{\lambda^p}\int_X |f|^p \, d\mu.$$

Lema: Si $1\le p<+\infty$ y $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$, entonces $\{f_n\}$ tiene una subsucesión $\{g_k\}$, $g_k=f_{n_k}$, $n_1<n_2<n_3\dots<n_k\dots$, tal que existe el $\lim_{k\to+\infty} g_k(x)=g(x)$ para casi todo $x\in X$ $(d\mu)$. Además, $g\in L^p(\mu)$.

Dem.:

Sea $\{f_n\}$ sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Si $k\ge 1$ existe $n_k\ge 1$ tal que si $m,n\ge n_k$, se verifica que $\|f_m-f_n\|_p\le 4^{-k}$, y podemos suponer que $n_1<n_2<n_3\dots<n_k\dots$ Definimos la subsucesión $g_k=f_{n_k}$, para lo que $\|g_{k+1}-g_k\|_p\le 4^{-k}$. Aplicando el lema de Chebyshev:

Sea $A_k=\{x\in X: |g_{k+1}(x)-g_k(x)|>2^{-k}\}$.

$$\mu(A_k)\le 2^{kp}\int_X |g_{k+1}-g_k|^p \, d\mu \le 2^{kp}\|g_{k+1}-g_k\|_p^p \le 2^{-kp}=\left(\frac{1}{2^p}\right)^k.$$

Si $Z_n=\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k$, $\mu(Z_n)\le\sum_{k=n}^{+\infty}\mu(A_k)\le\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^p}\right)^k\le\left(\frac{1}{2^p}\right)^{k-1}$. Además, $Z_1\supset Z_2\supset Z_3\dots\supset Z_n\dots$, y si $Z=\bigcap_{n=1}^{+\infty}Z_n$, $\mu(Z)=0$. Si $x\notin Z$, existe n_x t.q. $x\notin Z_n$ $\forall n\ge n_x$; es decir, $|g_{n+1}(x)-g_n(x)|\le 2^{-n}$ si $n\ge n_x$. Entonces, si $m>n\ge n_x$,

$$|g_m(x)-g_n(x)|\le |g_m(x)-g_{m-1}(x)|+|g_{m-1}(x)-g_{m-2}(x)|+\dots+|g_{n+1}(x)-g_n(x)| \le \sum_{j=n}^{m-1}2^{-j}\le 2^{-n}.$$

Es decir, si $x\notin Z$ y $\varepsilon>0$, eligiendo $n\ge 1$ tal que $2^{-n_x}\le\varepsilon$, vemos que si n,m son $\ge n_x$, se verifica $|g_m(x)-g_n(x)|<\varepsilon$, o lo que es lo mismo, $\{g_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ y existe $\lim_{k\to+\infty}g_k(x)$ $\forall x\notin Z$. Si definimos $g(x)=\lim_{k\to+\infty}g_k(x)$ $\forall x\notin Z$ y $g(x)=0$ si $x\in Z$, resulta que g es $(X,\mathcal{A})$ medible, y por el lema de Fatou:

$$\int_X|g|^p \, d\mu=\int_X\liminf_{k\to+\infty}|g_k|^p \, d\mu\le\liminf_{k\to+\infty}\int_X|f_{n_k}|^p \, d\mu<+\infty$$

ya que $\{f_n\}$ es sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$.

Para demostrar el tma de Riesz- Fischer, si $\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$, (8

consideramos la subsucesión $\{g_k\}=\{f_{n_k}\}$ del lema anterior y su

límite puntual g. Entonces, dado $\varepsilon>0$ $\exists N\geq 1$ tal que si $n,m\geq N$, se

tiene $\|f_n-f_m\|_p\leq\varepsilon$. En particular, si $n_k\geq N$, se verifica que $\|f_n-g_k\|_p\leq\varepsilon$

si $n\geq N$. Entonces, si $n\geq N$ y por el lema de Fatou:

$$\int_X |f_n-g|^p\,d\mu=\int_X \liminf_{k\to+\infty}|f_n-g_k|^p\,d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty}\int_X |f_n-g_k|^p\,d\mu\leq\varepsilon^p;$$ es

decir, si $\varepsilon>0$ $\exists N\geq 1$ t.q si $n\geq N$ $\|f_n-g\|_p\leq\varepsilon$ y $g\in L^p(\mu)$. Luego $\{f_n\}$

converge en $L^p(\mu)$.

Ahora pasamos a estudiar subconjuntos densos en los espacios de Banach

$L^p(\mu)$ para $1\leq p\leq+\infty$. Para empezar, recordemos que dada $f: X\to[0,+\infty)$

medible, existe una sucesión S_n de funciones simples no negativas tales

que:

i. $0\leq S_1\leq S_2\leq\dots\leq S_n\leq S_{n+1}\dots\leq f$ $\forall x\in X$

ii. $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)=f(x)$ $\forall x\in X$.

iii. La convergencia puntual de S_n a f es uniforme en X si

f es acotada en X.

De esto se deduce, que si $f: X\to\mathbb{R}$ es medible (podemos escribir $f=f^+-f^-$), existe

una sucesión $T_n=S_n^+-S_n^-$ de funciones simples en X tales que $|T_n|\leq S_n^++S_n^-\leq$

$\leq f^++f^-=|f|$ y $\lim_{n\to+\infty}T_n(x)=f(x)$ $\forall x\in X$. De estas observaciones deducimos el

siguiente teorema.

Tma: Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ es un espacio de medida, entonces el subespacio $S(\mu)$ de las

funciones simples sobre X es denso en $L^\infty(\mu)$, y para $1\leq p<+\infty$, el subespacio

$S(\mu)\cap L^1(\mu)$ es denso en $L^p(\mu)$.

Dem:

Dada $f\in L^\infty(\mu)$, existe $A\in\mathcal{A}$, $\mu(A)=0$ tal que $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$ $\forall x\notin A$. Re-

definiendo $f=0$ en A, podemos suponer que $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$ $\forall x\in X$. Entonces,

como f^+ y f^- son acotadas, resulta que $T_n=S_n^+-S_n^-$ es simple y converge

uniformemente a f sobre X. Es decir, $T_n\in S(\mu)$ y $\|T_n-f\|_\infty\to 0$ si $n\to+\infty$.

Si $f\in L^p(\mu)$, resulta que $|T_n|\leq|f|$, y en particular $\int_X|T_n|^p\,d\mu<+\infty$, pero como T_n es una función simple, podemos escribir

$$T_n = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}, \quad c_j \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad A_j \in \mathcal{A} \quad \forall i,j = 1 \dots n.$$

Entonces, $|T_n| = \sum_{j=1}^{m} |c_j| \chi_{A_j}$ y $\int_X |T_n|^p d\mu = \sum_{j=1}^{m} |c_j|^p \mu(A_j) < +\infty$; es decir, $\mu(A_j) < +\infty$ $\forall j = 1 \dots n$, y por tanto $T_n \in S(\mu) \cap L^1(\mu)$.

Como $|T_n - f|^p \le 2^p |f|^p$ y $\lim_{n \to +\infty} |T_n(x) - f(x)|^p = 0$ en X, por el teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_n - f\|_p^p = \lim_{n \to +\infty} \int_X |T_n - f|^p d\mu = 0.$$

y T_n converge a f en $L^p(\mu)$

Def: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es continua, llamamos soporte de f al conjunto

$$sop(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}},$$

y definimos $K(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f$ es continua y $sop(f)$ es un compacto $\subset \Omega\}$.

$K(\Omega)$ es un espacio vectorial. Si en Ω consideramos el espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}_\Omega, m)$, donde $\mathcal{M}_\Omega = \{E \cap \Omega : E \in \mathcal{M}\}$ y m es la medida de Lebesgue, definimos: $L^p(\Omega) = L^p(m)$ para $1 \le p \le +\infty$. Claramente se verifica que una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ está en $L^p(\Omega)$ sii $\chi_\Omega \cdot f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Tma: Si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $1 \le p < +\infty$, entonces $K(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Dem:

Toda función $f \in K(\Omega)$ es acotada y $\int_\Omega |f|^p dm = \int_{sop(f)} |f|^p dx \le \|f\|_\infty^p m(sop(f))$,

luego $K(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ si $1 \le p \le +\infty$.

Como $S(\Omega, m) \cap L^p(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ ($S(\Omega, m)$ = funciones simples en Ω), bastará con ver que $\forall A \subset \Omega$ medible con $m(A) < +\infty$, $\exists f \in K(\Omega)$ t.q. $\|f - \chi_A\|_p \le \varepsilon$, y esto $\forall \varepsilon > 0$.

Como $m(A) = \inf_{A \subset V,\ V \text{ abierto}} m(V) = \sup_{K \subset A,\ K \text{ compacto}} m(K)$, $\exists K$ y V compacto y abierto t.q. $K \subset A \subset V \subset \Omega$ y verificando $m(V \setminus K) \le \varepsilon^p$. La función

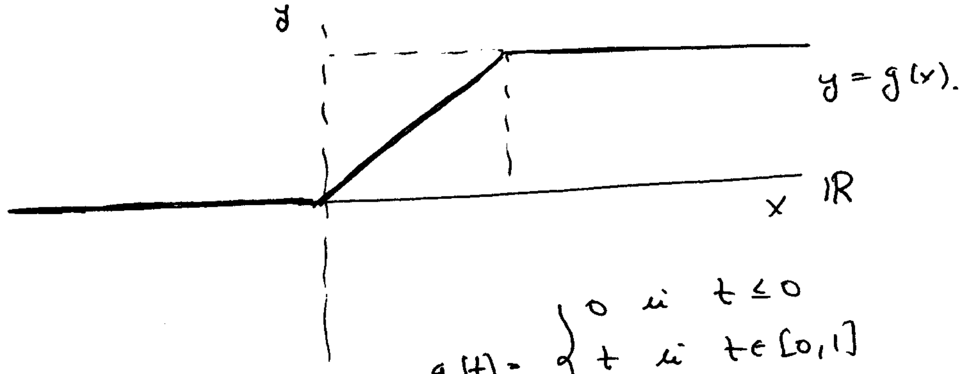
$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \rightsquigarrow d(x, \Omega \setminus V)$$

es continua y $\gamma = \min_{x \in K} d(x, \Omega \setminus V) > 0$. Sea $\delta = \gamma/2$,

$$\underbrace{\min_{x \in K} d(x, \Omega \setminus V)}_{= d(K, \Omega \setminus V)}$$

entonces si $V_\delta = \{x \in \Omega : d(x,k) < \delta\}$, V_δ es abierto, $\overline{V}_\delta = \{x \in \Omega : d(x,k) \le \delta\}$ está contenido en V y $\overline{V}_\delta$ es un compacto en Ω. Si consideremos la función (10)

$g : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida por



$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ t & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t \ge 1. \end{cases}$$

y $f : \Omega \to [0,1] \,/\, f(x) = g\left(1 - \frac{d(x,k)}{\delta}\right)$, resulta que f es continua en Ω y es de soporte compacto, pues:

$f(x) \ne 0 \iff 1 - \frac{d(x,k)}{\delta} > 0 \iff d(x,k) < \delta \iff x \in V_\delta \Rightarrow \operatorname{sop}(f) = \overline{V}_\delta$, se tendrá, luego $f \in K(\Omega)$. Además, si $x \in k$, $f(x) = g(1) = 1$, y si $x \notin V_1$ y por tanto $f(x) = 0$.

$d(x,k) \ge d(\Omega \setminus V_1, k) \ge \gamma \Rightarrow 1 - \frac{d(x,k)}{\delta} \le 1 - \gamma/\delta = 1 - 2 = -1$,

Entonces como $f = 0$ fuera de $\overline{V}_1$

$$\|f - \chi_A\|_p = \left(\int_\Omega |f - \chi_A|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_V |f(x) - \chi_A(x)|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left[\int_k |f - \chi_A|^p d\mu + \int_{V\setminus k} |f - \chi_A|^p d\mu\right]^{1/p} = \left(\int_{V\setminus k} |f - \chi_A|^p dx\right)^{1/p} \le 2^p m(V\setminus k)^{1/p} \le 2^p \varepsilon.$$

Corolario:

(i) Si $-\infty < a < b < +\infty$, $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ es denso en $L^p([a,b])$ si $1 \le p < +\infty$.

(ii) $K(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \le p < +\infty$.

Dem:

Basta observar que $L^p([a,b]) = L^p((a,b))$ si $1 \le p \le +\infty$.

Observación: $K(\Omega)$ no es denso en $L^\infty(\Omega)$ $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Dem:

Claramente $K(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}) = \{f : \Omega \to \mathbb{C} : f \text{ cont. en } \overline{\Omega}\}$ y si $g_n \in C(\overline{\Omega})$ y $\|g_n - g\|_\infty \to 0$, sabemos que necesariamente $g \in C(\overline{\Omega})$, pero $L^\infty(\Omega)$ siempre contiene funciones no continuas.

Tma. La clausura de $K(\mathbb{R}^n)$ en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es $C_0(\mathbb{R}^n)$, donde

$C_0(\mathbb{R}^n) = \{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : f$ es continua y $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0 \}$.

Dem.:
Si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ existe K compacto t.q. $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $x \notin K$. Si $h(x) = g\left(1 - \frac{d(x,K)}{2}\right)$, $h \in K(\mathbb{R}^n)$, pues $\mathrm{sop}(h) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,K) \leq 2\}$, $h(x) = 1$ $\forall x \in K$ y $0 \leq h \leq 1$. Entonces $\tilde{g} = f \cdot h \in K(\mathbb{R}^n)$ y $|\tilde{g}(x) - f(x)| = 0$ si $x \in K$, $|\tilde{g}(x) - f(x)| \leq 2|f(x)| < \varepsilon$ si $x \notin K$; es decir, existe $\tilde{g} \in K(\mathbb{R}^n)$ t.q. $\|\tilde{g} - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Recíprocamente, si $\{g_n\}$ es una sucesión en $K(\mathbb{R}^n)$ que converge en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, por la convergencia uniforme de $\{g_n\}$ se sigue que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es continua (la clase de equivalencia de f en L^∞ tiene un representante continuo). Además, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n \geq 1$ t.q. $\|f - g_n\|_\infty \leq \varepsilon$, y como $\mathrm{sop}(g_n) \subset B_R(0)$ para algún $R > 0$, necesariamente $|f(x)| \leq \varepsilon$ si $|x| \geq R$; es decir, $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$.

Observación:
En general, si $\mu : \mathcal{M}_\Omega \to [0,+\infty)$ es una medida en $(\Omega, \mathcal{M}_\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto que es "regular", entonces también se verifica que $K(\Omega)$ es denso a $L^p(\Omega)$ si $1 \leq p < +\infty$. La medida μ se dice regular, si $\mu(K) < +\infty$ $\forall K \subset \Omega$, K compacto, y para cada $E \in \mathcal{M}_\Omega$

$$\mu(E) = \inf_{\substack{E \subset V \\ V \text{ abierto}}} \mu(V) = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compacto}}} \mu(K).$$

7.4 Operadores lineales en espacios normados. Duales

Def. Sean E, F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$; $T : E \to F$ es un operador lineal si $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Un operador lineal T entre dos espacios normados E y F se dice acotado si

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < +\infty,$$

o equivalentemente, si existe $M > 0$ t.q. $\|Tx\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in E$.

Prop. Sean E, F espacios normados y $T : E \to F$ un operador lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) T es continua,

(ii) T es continua en $x = 0$.

(iii) T es acotado.

Dem

(i) $\Rightarrow$ (ii) (trivial)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como T es continua en $x=0$ y $T(0)=0$, si $W=\overline{B}_1(0)$ en F, existe $\alpha>0$ t.q. $\overline{B}_\alpha(0)\subset T^{-1}(W)$, dado $B_\alpha(0)$ es una bola en E; es decir, $T(\overline{B}_\alpha(0))\subset\overline{B}_1(0)$. Entonces, si $\|x\|\le\alpha$, es $\|Tx\|\le 1$; y si $x\in E$, $x\neq 0$, $\|T(\frac{\alpha x}{\|x\|})\|\le 1$, implicando por la linealidad que $\|Tx\|\le\frac{1}{\alpha}\|x\|$ $\forall x\in E$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) (trivial).

Def: Si E y F son espacios normados, definimos

$$L(E,F)=\{T: E\longrightarrow F : T \text{ es lineal y acotado}\},$$

$L(E,F)$ es un espacio vectorial; y $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Tx\|=\sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ es una norma en $L(E,F)$.

Prop: Si F es de Banach, $(L(E,F),\|\cdot\|)$ es también espacio de Banach.

Dem:

Si $\{T_n\}$ es sucesión de Cauchy en $L(E,F)$, dado $\varepsilon>0$ $\exists N\ge 1$ t.q. si $n,m\ge N$ se verifica $\|T_n(x)-T_m(x)\|\le\varepsilon\|x\|$ $\forall x\in E$. Luego, existe $Tx=\lim\limits_{n\to+\infty}T_nx$ en F $\forall x\in E$, puesto que F es espacio de Banach y claramente T es lineal. Entonces, si hacemos $m\to+\infty$ en la condición de Cauchy, obtenemos que $\|T_n(x)-T(x)\|\le\varepsilon\|x\|$ $\forall x\in E$ si $n\ge N$; es decir, $\|T_n-T\|\le\varepsilon$ si $n\ge N$, luego $\{T_n\}$ es convergente.

Prop: Sean E, F, G espacios normados, $T\in L(E,F)$ y $S\in L(F,G)$. Entonces $S\circ T\in L(E,G)$ y $\|S\circ T\|\le\|S\|\,\|T\|$.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "S"] & \\ E \arrow[ur, "T"] \arrow[rr, "S\circ T"'] & & G \end{tikzcd}$$

Dem

$\|S\circ T(x)\|=\|S(Tx)\|\le\|S\|\,\|Tx\|\le\|S\|\,\|T\|\,\|x\|$ $\forall x\in E$, y por definición de norma en $L(E,G)$, $\|S\circ T\|\le\|S\|\,\|T\|$.

Def: Sea E un espacio normado, llamaremos espacio dual de E al espacio de Banach $L(E,K)$, que denotaremos E^*. A sus elementos los llamaremos funcionales lineales acotados.

Ej

① $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^m$. $L(E,F)\cong\{$matrices reales de m filas y n columnas$\}$.

② Si $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$, $\|f\| = \sup_{[-1,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty$, $T(f) = f(0)$. Entonces $T \in E^*$.

③ Si $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ es continua y definimos

$$T(f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy, \quad \text{entonces } T \in L(L^1([0,1]), L^\infty([0,1]))$$

y $\|T\| \le \sup_{[0,1]\times[0,1]} |k(x,y)| < +\infty$.

Tma: Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida σ-finita y $1 \le p < +\infty$. Entonces, si $T : L^p(\mu) \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal acotado en $L^p(\mu)$, existe una única $g \in L^q(\mu)$ siendo q el conjugado de p, tal que

$$T(f) = \int_X f\cdot \bar{g}\, d\mu.$$

Además, $\|g\|_q = \|T\|$.

$$\boxed{\text{En particular, si } \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ es abierto, } L^p(\Omega)^* = L^q(\Omega) \text{ si } 1 \le p < +\infty, \text{ y } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.}$$

Dem: Si $g \in L^q(\mu)$ y $1 \le p < +\infty$, sabemos que sólo probamos que $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)^*$. En particular, si $T(f) = \int_X f\cdot\bar{g}\, d\mu$, T es lineal y $\|f\cdot\bar{g}\|_{L^1(\mu)} \le \|f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^q(\mu)}$.

$$|T(f)| \le \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1/q} = \|g\|_q \|f\|_p \quad \forall f \in L^p(\mu),$$

luego $T \in L^p(\Omega)^*$ y $\|T\| \le \|g\|_q$. Además, si $f = g|g|^{q-2}$ para $g \ne 0$, $f = 0$ si $g = 0$, f es medible, $|f|^p = |g|^{\frac{p}{p-1}} = |g|^q$ y

$$|T(f)| = T(f) = \int_X |g|^q d\mu \le \|T\| \|f\|_p$$

luego

$$\left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{1-1/p} = \|g\|_q \le \|T\|. \quad \therefore \|T\| = \|g\|_q \text{ si } 1 < p < +\infty.$$

Si $p = 1$, hacemos $f = \frac{g}{|g|}\chi_A$ donde $A \in \mathcal{A}$ y $T(f) = \int_A |g|\, d\mu$, $|f| \le \chi_A$.

Entonces $\int_A |g|\,d\mu = T(f) \le \|f\|_{L^1(\mu)} \|T\| = \mu(A)\|T\|$. En particular

$$\frac{1}{\mu(A)}\int_A |g|\,d\mu \le \|T\| \quad \forall A \in \mathcal{A},\ 0<\mu(A)<+\infty$$

y esto implica que $\mu(\{x\in X : |g(x)| > \|T\|\}) = 0$; es decir, $\|g\|_\infty \le \|T\|$.

Claramente, $L^1(\mu) \subset L^\infty(\mu)^*$, pues si $g\in L^1(\mu)$ y $T(f) = \int_X f\cdot \bar g\,d\mu$, entonces $|T(f)| \le \|g\|_\infty \|f\|_1$ y $\|T\| \le \|g\|_\infty$. Pero no es cierto que $L^\infty(\mu)^* \subset L^1(\mu)$. Por el Tma. de Representación de Riesz [W. Rudin, Real and Complex Analysis, Th. 6.19], $C(K)^* = \{$medidas finitas con signo sobre $K\}$, $C(K) \subset L^\infty(K)$, $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto, y $L^\infty(K)^* \subset C(K)^*$, pero $L^\infty(K)^* \subsetneq C(K)^*$. Si $x_0 \in K$, $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$, $\delta_{x_0} \in C(K)^*$, pero $\delta_{x_0} \notin L^\infty(K)^*$.

Se verifica que $C(K)^* = \{\mu : \mathcal{B}_K \to \mathbb{R} : \mu = \mu^+ - \mu^-,\ \mu^\pm$ medidas positivas finitas en $K\}$,

$$\|\mu\| = \inf_{\mu = \mu^+ - \mu^-} \mu^+(K) + \mu^-(K).$$

Otras curiosidades sobre los espacios L^p son las siguientes:

<u>Tma</u>: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, $L^p(\Omega)$ es separable si $1 \le p < +\infty$, pero $L^\infty(\Omega)$ no lo es.

<u>Tma</u>: Si $1 \le p < +\infty$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p = 0.$$

<u>Dem</u>: Como $K(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, basta demostrar el tma para funciones $g \in K(\Omega)$, ya que entonces:

$$\|f(\cdot+h) - f(\cdot)\|_p \le \|f(\cdot+h) - g(\cdot+h)\|_p + \|f-g\|_p + \|g(\cdot+h) - g(\cdot)\|_p$$
$$\le 2\|f-g\|_p + \|g(\cdot+h) - g(\cdot)\|_p.$$

y basta encontrar $g \in k(\Omega)$ t.q. $\|f-g\| \le \frac{\varepsilon}{4}$ y usar que

$$\lim_{h \to 0} \| g(\cdot+h) - g(\cdot) \|_p = 0.$$

Por otro lado, si $g \in k(\Omega)$, $g(\cdot+h) - g(\cdot)$ tiene soporte contenido en $sop(g) + \overline{B}_1(0)$ si $|h| \le 1$ que es un compacto $\mathbb{K}$, luego

$$\| g(\cdot+h) - g(\cdot) \|_p \le m(\mathbb{K}) \| g(\cdot+h) - g(\cdot) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

pero como g es uniformemente continua en $\mathbb{R}^N$, $\lim_{h \to 0} \| g(\cdot+h) - g(\cdot) \|_\infty = 0.$