Análisis Funcional. Enero 2004

1. Sea $f_n(x) = (x + \frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} e^{-n^2 x}$.

(a) Mostrar que $f_n \in L^1(0, +\infty)$ para todo $n \geq 1$.

(b) Calcular razonadamente $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

2. Sea $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^3}}{1+x^4} dx$.

(a) Mostrar que F está bien definida en $(0, +\infty)$.

(b) Probar que F es continua en $(0, +\infty)$.

(c) Mostrar que F es derivable en $(0, +\infty)$.

(d) Calcular razonadamente $\lim_{t \to 0^+} F'(t)$.

3. Sea $f(x, y) = e^{-xy^2} \sin x$.

(a) Probar que f es integrable en $(0, R) \times (0, +\infty)$ para todo $R > 0$.

(b) Sabiendo que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, probar que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad .$$

4. Si $T(f)(x) = \int_0^x f(t) t^{-\frac{1}{3}} dt$, mostrar que T es un operador lineal y acotado de $L^2([0,1])$ en $L^2([0,1])$ y probar que $\|T\|$ entre dichos espacios es menor o igual que $\sqrt{3}$.

5. Enunciar y demostrar en su caso los siguientes resultados.

(a) Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son medibles, entonces $f + g$ es medible.

(b) La desigualdad de Hölder.