Análisis Funcional
24 de enero de 2005

1 Calcular el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+n^2x^2}\,dx \quad .$$

2 Sea

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad .$$

- Probar que f no es integrable en $[-1,1]\times[-1,1]$.
- Calcular todas las integrales iteradas de f en $[-1,1]$. En particular, los valores de
$$\varphi(x)=\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dy \quad \text{y} \quad \psi(y)=\int_{[-1,1]} f(x,y)\,dx \text{ si } x,y\in[-1,1].$$
- ¿Es cierto que
$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]} f(x,y)\,dA = 0\ ?$$

3 Sea

$$F(t)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\,dx\,.$$

- Probar que F es continua en $\mathbb{R}$.
- Probar que F es derivable en $\mathbb{R}$ y dar una fórmula para su derivada.
- ¿Es F de clase dos en $\mathbb{R}$? En tal caso dar una formula para F''.

4 Sea $Tf(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-(x-y)^2}\,dy$ si $x\in\mathbb{R}$. Mostrar que T es un operador lineal y acotado de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$ y que su norma, $\|T\|$, verifica la desigualdad $\|T\|\leqslant 10$.

5 Dar demostraciones razonadas de los siguientes resultados:

- Si f y g son funciones que pertenecen a $L^2(\mathbb{R})$, entonces $fg\in L^2(\mathbb{R})$.
- Si $h:\mathbb{R}\longrightarrow[0,+\infty)$ es una función medible tal que
$$h(x)\geqslant \chi_{[0,1]}(x-n)$$
para todo $x\in\mathbb{R}$ y $n\geqslant 0$, entonces $h\notin L^1(0,+\infty)$.

$\boxed{\text{Tiempo: 3 horas y media}}$