Análisis Funcional. Febrero 2003

1. Sea $f_n(x) = x^{-\frac{1}{n}} e^{-nx}$.

(a) Mostrar que $f_n \in L^1(0, +\infty)$ para todo $n \geq 2$.

(b) Calcular razonadamente $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

2. Sea $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx$.

(a) Mostrar que F está bién definida en $\mathbb{R}$.

(b) Probar que F es continua en $\mathbb{R}$.

(c) Si $0 < \varepsilon < R < +\infty$, mostrar que F es derivable en (ε, R) y en $(-R, -\varepsilon)$.

(d) Probar que

$$F'(t) = \begin{cases} -\sqrt{\pi}\; e^{-t^2} & \text{en } (0, +\infty) \\ +\sqrt{\pi}\; e^{-t^2} & \text{en } (-\infty, 0) \end{cases} .$$

3. Sea $f(x, y) = \frac{1}{1+(xy)^2}$.

(a) Determinar si f es integrable en $(0, +\infty) \times (1, \pi)$.

(b) Mostrar que $g(x) = \frac{\arctan \pi x - \arctan x}{x}$ es integrable en $(0, +\infty)$ y calcular $\|g\|_{L^1(0,+\infty)}$.

4. Si $T(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{1+y} f(y)dy$, mostrar que T es un operador lineal y acotado de $L^2(0, +\infty)$ en $L^\infty(0, +\infty)$ y con norma $\|T\| \leq 1$.

5. Definir o enunciar y demostrar en su caso lo que sigue.

(a) Los conceptos de σ-álgebra y de medida sobre una σ-álgebra.

(b) El lema de Fatou.